Fisica Generale

Capitolo 1

Introduzione

La Fisica è una *scienza sperimentale quantitativa*. Lo scopo della Fisica è di trovare le *leggi fondamentali* che regolano tutti i *fenomeni osservabili* nel nostro Universo.

Allo scopo di contestualizzare i contenuti di questo testo, conviene iniziare con un riassunto della nostra conoscenza attuale dell'Universo. Si tratterà necessariamente di una esposizione qualitativa, utile ad introdurre una serie di concetti fondamentali (materia, massa, particelle, interazioni, forze, energia, ...). La trattazione scientifica di questi concetti sarà il contenuto dei capitoli successivi.

1.1 La materia e la sua struttura

Qualunque struttura presente nel nostro Universo — che sia un atomo, un materiale solido, liquido, gassoso, che sia più piccolo di un batterio, o grande come un pianeta o una stella — è formato di *materia*.

1.1.1 Materia e massa

Uno dei concetti fondamentali della fisica è quello di *massa*. Rimandando ai capitoli successivi una definizione precisa, in questa fase introduttiva associamo il concetto di "massa di un oggetto" a quello di "quantità di materia che costituisce un oggetto". Più è grande la massa di un oggetto, più è difficile metterlo in moto se è fermo, oppure frenarlo o fargli cambiare direzione se è già in movimento.

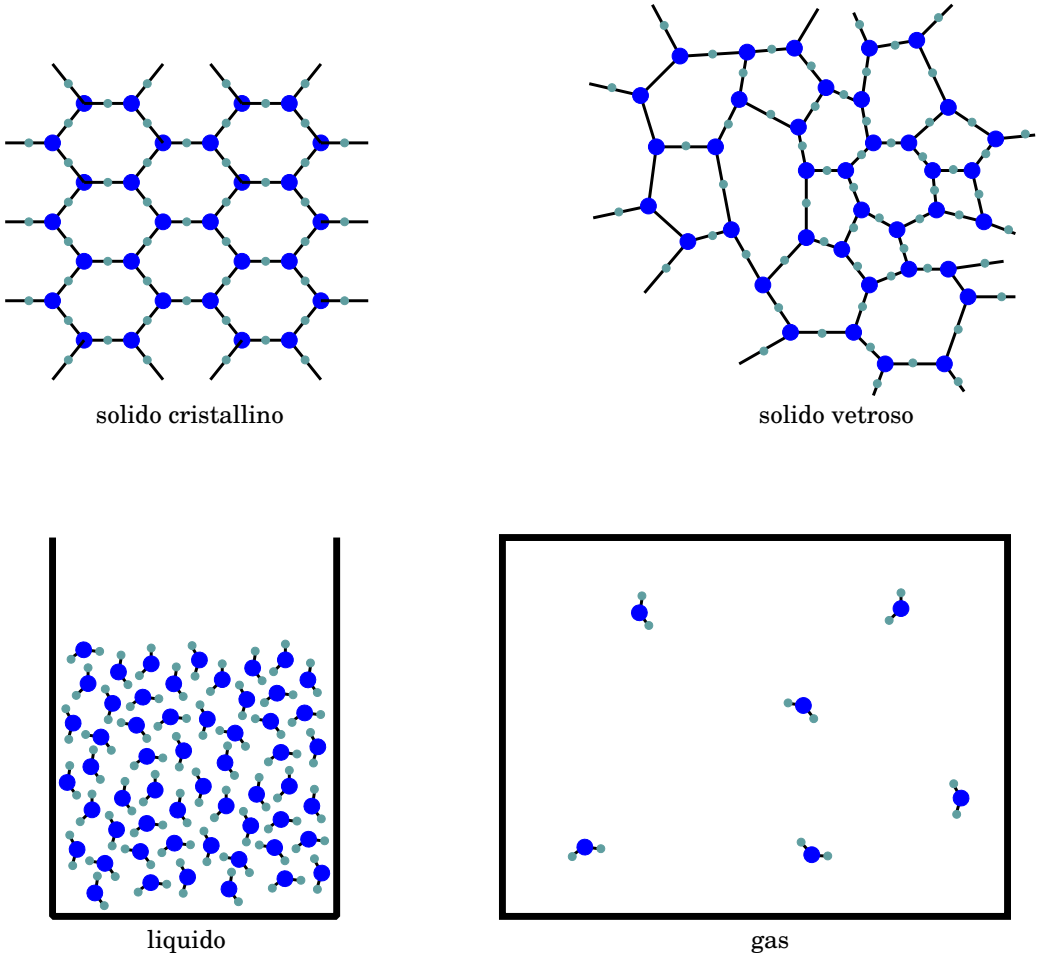


Figura 1.1: *Stati di aggregazione della materia: solido cristallino (ordinato) e vetroso (disordinato); liquido; gas.*

1.1.2 Gli stati di aggregazione della materia

La materia a noi nota — solida, liquida, o gassosa — è formata di *atomi*. Questi, nell'ambiente in cui viviamo, sono solitamente aggregati a formare *molecole*, o in alcuni casi *cristalli*.

Le possibili aggregazioni della materia sono schematicamente rappresentate in Fig. 1.1.

- Lo stato solido ha forma e volume propri. La sua rigidità è dovuta al fatto che le distanze interatomiche sono fisse. La geometria può essere ordinata (cristalli) o disordinata (solidi "vetrosi").

- Lo stato liquido ha volume definito ma non ha forma propria. Le

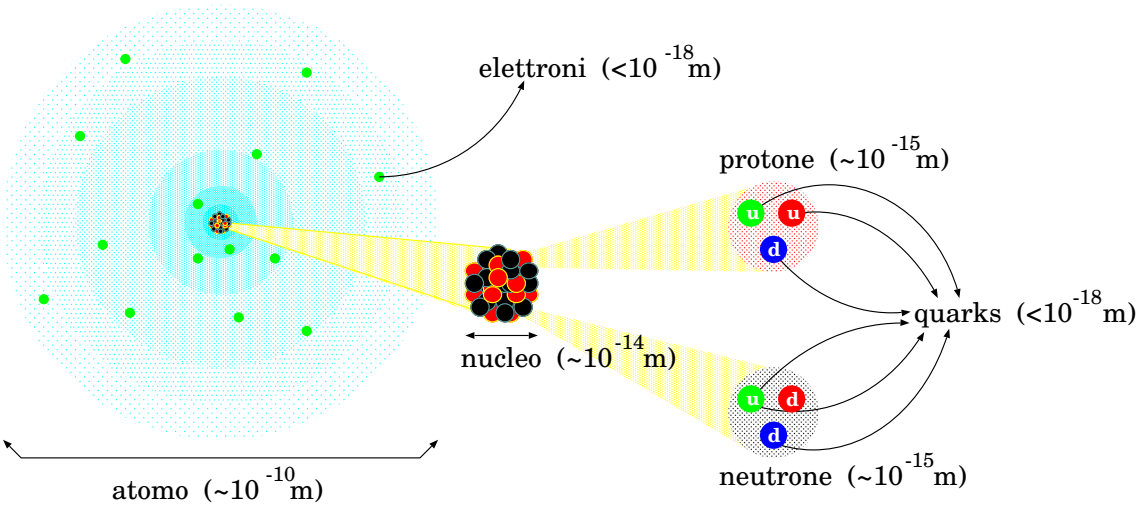


Figura 1.2: *Struttura dell'atomo, con le dimensioni approssimative. La zona sfumata intorno al nucleo centrale rappresenta la nube elettronica: essa non ha confini precisi, è una distribuzione di probabilità che decresce con la distanza dal nucleo, azzerandosi asintoticamente. NOTA: Elettroni e quarks non sono "statici": al contrario si muovono invece molto rapidamente — anche se il concetto di "movimento" in sistemi così piccoli non va inteso nel senso comune,*

molecole sono vicine fra loro ma non sono rigidamente legate, quindi possono spostarsi, purché non si allontanino l'una dall'altra, e purché ciascuna non invada il volume occupato da un'altra.

- Lo stato gassoso non ha volume proprio né forma propria: il gas può espandersi indefinitamente, occupando tutto il volume che ha a disposizione. Un gas è formato da atomi o molecole rarefatti, che si muovono in maniera relativamente libera nel volume disponibile — anche se gli urti sono possibili.

I cristalli e le molecole sono aggregati di atomi, tenuti insieme dai "legami chimici".

1.1.3 La struttura degli atomi

Gli atomi non sono costituenti fondamentali: in effetti sono strutture composte, come schematizzato in Fig. 1.2.

Un atomo ha una parte centrale, il *nucleo*, che porta sostanzialmente tutta la massa dell'atomo. Intorno al nucleo si muovono gli *elettroni*. Dal

numero di elettroni Z (o "numero atomico") dipendono tutte le proprietà chimiche di un elemento. È proprio la struttura degli elettroni di un atomo che consente di formare legami chimici con altri atomi, formando le molecole.

Il nucleo è costituito di *protoni* e *neutroni*. Protone e neutrone hanno masse molto simili, e circa 2000 volte maggiori della massa dell'elettrone: $m_p \simeq m_n \simeq 2000\, m_e$. Il numero dei protoni è sempre uguale al numero degli elettroni, Z. Il numero dei neutroni è variabile: per nuclei leggeri protoni e neutroni sono in uguale quantità, mentre per nuclei pesanti i neutroni sono più numerosi, approssimativamente 1.5 volte più numerosi dei protoni. Il numero totale di protoni e neutroni si chiama "numero di massa" A. In natura esistono molti elementi chimici che, a parità di numero atomico Z, hanno diversi numeri di massa A: si chiamano *isotopi*, e differiscono per il numero di neutroni contenuti nel nucleo.

Protoni e neutroni sono a loro volta formati da tre particelle più piccole, chiamate *quarks*. Secondo lo stato attuale della nostra conoscenza, gli elettroni e i quarks sono *particelle elementari*, ovvero non sono costituite da componenti più piccoli. Per quel che ne sappiamo essi sono *puntiformi*... in ogni caso, se possiedono un'estensione spaziale, essa deve essere inferiore a 10^{-18} m (un miliardesimo di miliardesimo di metro!)

La materia ordinaria che ci circonda, è per lo più "vuota": le dimensioni tipiche di un atomo (cioè il diametro della sua "nuvola di elettroni") sono circa di 10^{-10} m (un decimo di nanometro); tuttavia, quasi tutta la materia dell'atomo è concentrata nel nucleo, che è 10 000 volte più piccolo (10^{-14} m). Quindi, la materia di un atomo occupa solo $\dfrac{1}{(10\,000)^3} = 10^{-12}$ del volume dell'atomo: un millesimo di miliardesimo [1]!

1.2 Materia in continuo movimento

La natura non è statica. Ogni cosa che ci circonda è caratterizzata da un continuo movimento. Molti esempi cadono direttamente sotto la nostra esperienza comune: la caduta di un oggetto, lo scorrere dell'acqua in un fiume o il soffiare del vento... Ma anche il moto della Luna intorno alla Terra, dei pianeti intorno al Sole, delle stelle in una galassia.

Vi sono poi molti altri fenomeni caratterizzati da movimenti, ma troppo piccoli per cadere direttamente sotto i nostri sensi. Vediamo alcuni esempi.

[1] Se un atomo fosse grande come il Duomo di Milano, il nucleo in proporzione sarebbe grande come un moscone...

In un liquido o in un gas apparentemente fermo, le molecole sono in continuo movimento disordinato. Persino nei solidi, gli atomi non sono fermi, ma vibrano, ciascuno intorno alla propria posizione di equilibrio. La percezione macroscopica che abbiamo di questi movimenti microscopici è la *temperatura*: più un oggetto è "caldo", più rapido è il moto delle molecole o degli atomi che lo costituiscono.

I suoni che udiamo, sono in realtà *onde acustiche*, ovvero rapide compressioni e rarefazioni del mezzo (aria), prodotte dalla vibrazione di una sorgente sonora (uno strofinio, un motore, uno strumento musicale, ...), che possono propagarsi nello spazio, fino a raggiungere le nostre orecchie.

Gli elettroni si muovono molto rapidamente all'interno dell'atomo, tipicamente restando confinati intorno al nucleo. Tuttavia, in alcune configurazioni della materia (per esempio nei metalli), esistono elettroni meno legati all'atomo: essi possono quindi trasferirsi ad atomi vicini, e sotto opportune condizioni possono acquisire un moto collettivo "medio" (o "di deriva"), al netto dei singoli spostamenti caotici. L'effetto macroscopico è la *corrente elettrica*.

1.3 Le interazioni fondamentali

Dunque l'Universo è in continuo movimento. I corpi celesti si muovono nello Spazio. Le molecole e gli atomi di un qualunque materiale non sono mai fermi. Anche le stesse particelle elementari non sono da pensare come "mattoni" attaccati gli uni agli altri. Al contrario, esse sono in continua agitazione: gli elettroni si muovono intorno ai nuclei atomici, i quarks si muovono all'interno dei protoni e dei neutroni.

Che cosa aggrega le stelle in galassie, tiene i pianeti in orbita intorno al Sole, tiene uniti nuclei, atomi e molecole? Che cosa impedisce loro di "scappare via"?

La materia resta "legata" a causa delle "interazioni".

In generale, possiamo definire le "interazioni" come qualunque cosa che modifichi il moto di oggetti.

1.3.1 Forze e campi di forza

In Fisica classica, la grandezza associata alle interazioni è la *forza* [2]. Un oggetto che può produrre interazione, crea nello spazio circostante un *campo di forza*: qualunque altro oggetto che possa subire quell'interazione "sente" la presenza del campo di forza.

1.3.2 La gravità

Grandi quantità di materia (pianeti, stelle, galassie, etc etc) sono tenute insieme dalla *interazione gravitazionale*: essa è sempre attrattiva, e tanto più intensa quanto più grandi sono le quantità di materia coinvolte.

I pianeti orbitano intorno al Sole (e non intorno alla Terra!) perché esso è l'oggetto più massiccio del Sistema Solare: contiene da solo il 99.9% della materia del Sistema Solare.

La forza gravitazionale è un'*interazione a distanza*, che si indebolisce all'aumentare della distanza r fra oggetti, con una legge quadratica inversa: $\propto \frac{1}{r^2}$.

La nostra Galassia, la Via Lattea, contiene circa 400 miliardi di stelle, si estende per circa 100 000 anni-luce, ovvero circa 10^{18} km (un miliardo di miliardi di chilometri!), ed ha una massa stimata pari a 10^{12} volte (1000 miliardi di volte) la masse del Sole. La Via Lattea fa parte di un gruppo locale di galassie. Anche questi sistemi, ben più estesi di un sistema planetario, sono tenuti insieme dalla attrazione gravitazionale.

La gravità governa il moto delle grandi strutture nell'Universo (sistemi planetari, galassie, ammassi di galassie, ...), ma è del tutto ininfluente nella descrizione di sistemi più piccoli, in cui dominano le interazioni fra molecole, atomi e loro costituenti (elettroni, protoni, neutroni, ...)

[2] Come vedremo meglio, per descrivere correttamente le forze, occorre poter definire la *posizione* e la *velocità* di un oggetto. In Fisica classica, ciò è sempre possibile. Viceversa, quando si deve trattare la fisica di sistemi molto piccoli — atomici o sub-atomici — occorre utilizzare la *meccanica quantistica*. Una delle peculiarità più notevoli di questa branca della Fisica è che non è più possibile definire simultaneamente la posizione e il moto di una particella: è il cosiddetto *principio di indeterminazione di Heisenberg*. In questa situazione, anche il concetto di forza deve essere abbandonato, mentre si mantiene il più generale concetto di interazione.

1.3.3 Interazioni fra cariche elettriche

Molte particelle fondamentali sono dotate di una proprietà intrinseca chiamata *carica elettrica*. Si tratta di una quantità dotata di *segno*, ovvero può essere *positiva* o *negativa*. Due oggetti dotati di carica elettrica possono interagire fra loro: se le due cariche elettriche hanno lo stesso segno, si respingono; viceversa, se hanno segno opposto, si attraggono.

Anche l'interazione fra cariche elettriche è un'*interazione a distanza*. Anch'essa, come la gravità, si indebolisce all'aumentare della distanza r fra oggetti, con una legge quadratica inversa: $\propto \frac{1}{r^2}$.

Ciascun elettrone porta una carica elettrica negativa, che si indica con $-e$, mentre ciascun protone ha carica elettrica positiva $+e$. Ogni atomo contiene lo stesso numero (Z) di elettroni e protoni: di conseguenza è *elettricamente neutro*.

Durante processi chimici, o a causa di urti con altre particelle, può accadere che un atomo perda (o acquisti) uno o più elettroni: in tal caso forma uno *ione*, dotato di carica elettrica positiva o negativa, a seconda che abbia perso o acquistato elettroni. Alcuni esempi di legami chimici sono proprio formati in questo modo: se un atomo ha tendenza ad acquistare elettroni ed un altro a cederli, formano rispettivamente uno ione negativo ed uno positivo, che tendono poi ad attrarsi in quanto dotati di cariche di segno opposto. L'esempio familiare a noi tutti è il *cloruro di sodio*, NaCl (è il normalissimo sale da cucina). In effetti l'atomo di sodio tende a cedere un suo elettrone, diventando uno ione Na^+, e l'atomo di cloro tende ad acquisirlo, diventando uno ione Cl^-.

Anche per gli atomi che non subiscono ionizzazione, la distribuzione di carica al loro interno non è sempre simmetrica, anzi viene alterata dalla vicinanza di altri atomi. Il risultato è che essi producono interazioni residue con gli atomi vicini: esse sono responsabili della formazione delle molecole, attraverso il *"legame covalente"*.

Le stesse molecole hanno interazioni mutue: esse non possono essere spinte troppo vicine le une alle altre (interazione repulsiva), e nel caso dei solidi non possono essere allontanate (interazione attrattiva). Questo è il motivo per cui i solidi non possono essere deformati, e i liquidi non possono essere compressi. Lo stesso "principio di non compenetrabilità della materia solida", che esprime che due corpi solidi non possono occupare una porzione di spazio comune, è conseguenza delle interazioni elettriche degli atomi o delle molecole costituenti, che costituiscono la loro

rigidità. In ultima analisi, quindi, anche le interazioni "di contatto" sono una manifestazione macroscopica dell'interazione elettromagnetica, che è un'interazione a distanza!

Nei gas, le molecole sono molto rarefatte, pertanto le loro interazioni sono più sporadiche: solo quando due molecole si avvicinano, nel loro moto caotico, allora si urtano e rimbalzano via. Tuttavia, comprimendo molto un gas, le distanze intermolecolari si riducono sempre più, rendendo più probabile l'interazione: con una compressione sufficiente il gas può liquefarsi.

1.3.4 Interazioni elettriche e gravitazionali

Le interazioni elettriche fra oggetti carichi decrescono con la distanza, secondo una legge quadratica inversa, $\propto \frac{1}{r^2}$. Lo stesso vale per la gravitazione. A parità di distanza, l'interazione elettrica è molto più forte di quella gravitazionale: l'attrazione elettrica fra protone ed elettrone in un atomo di idrogeno è 10^{39} volte (mille miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di volte!) più forte di quella gravitazionale.

D'altra parte, le interazioni elettriche residue fra aggregati elettricamente neutri, come atomi e molecole, seguono una legge (almeno) cubica inversa, $\propto \frac{1}{r^3}$, quindi si attenuano con la distanza molto più rapidamente della interazione gravitazionale. Questo ha una conseguenza fondamentale: su scale di distanza atomiche e molecolari l'interazione dominante è quella elettrica, ma su scale più grandi ($\gtrsim 10^3$ km, pianeti, stelle, sistemi planetari, galassie, ammassi di galassie) l'interazione dominante è gravitazionale. Non esistendo masse negative, un corpo non può mai essere "gravitazionalmente neutro": la gravità diminuisce sempre con una legge quadratica inversa della distanza, e da certe scale di distanza in poi prevale sull'interazione elettromagnetica.

1.3.5 Campo elettrico e magnetico, onde elettromagnetiche

Una carica elettrica produce nello spazio circostante un *campo elettrico*. Se la carica elettrica è dotata di movimento, produce anche un *campo magnetico*. Inoltre, ogni carica elettrica sente l'azione dei campi elettrici prodotti dalle altre cariche circostanti. Se una carica è in movimento, sente anche l'azione dei campi magnetici prodotti dalle altre cariche in movimento.

Questo vale anche per le correnti elettriche, che come abbiamo detto sono dovute al movimento di elettroni. Esse producono campi magnetici, e sono anche sensibili alla presenza di campi magnetici.

Esistono materiali dotati di magnetismo naturale: tipicamente si tratta di minerali ferrosi. In essi, il moto degli elettroni intorno ai nuclei atomici presenta un certo ordine, cosicché il loro effetto collettivo è quello di produrre un campo magnetico, anche in assenza di correnti elettriche macroscopiche.

Se una carica elettrica si muove di moto oscillante, genera nello spazio circostante un campo elettrico e un campo magnetico oscillanti. Questi hanno una proprietà fondamentale: un campo elettrico variabile è sorgente di campo magnetico; viceversa, un campo magnetico variabile è sorgente di campo elettrico. Pertanto i due fenomeni si sostengono a vicenda, e il campo elettromagnetico risultante può propagarsi anche lontano dalla sorgente (la carica oscillante): la sua legge di attenuazione sarà $\propto \frac{1}{r}$. Questo tipo di campo si chiama *onda elettromagnetica*.

Le onde elettromagnetiche costituiscono la luce visibile, ma anche le onde radio, le microonde, i raggi infrarossi e ultravioletti, e i raggi X. Nonostante la diversità delle loro applicazioni pratiche, sono tutti descritti dalle stesse leggi fisiche.

1.3.6 Interazioni nucleari: forte e debole

Le interazioni gravitazionali ed elettromagnetiche non sono le due sole forze fondamentali della natura. In particolare, le interazioni elettromagnetiche non sono assolutamente in grado di descrivere le proprietà dei nuclei atomici e le reazioni che questi possono produrre.

Esistono in natura altre due interazioni fondamentali: l'interazione forte e l'interazione debole. Queste due interazioni giocano il loro ruolo solo a livello sub-atomico, quindi su distanze molto piccole ($\lesssim 10^{-14}$ m), in un regime fisico che è non descrivibile in termini di dinamica classica (cioè usando i concetti di forza e accelerazione), ma solo mediante la *meccanica quantistica*.

Tuttavia esse sono comunque fondamentali in alcuni ambiti del nostro Universo. Pertanto ne diamo qui una breve descrizione, sebbene molto parziale e qualitativa.

I protoni hanno carica positiva, quindi tenderebbero a respingersi l'un l'altro con forze elettriche, e il nucleo atomico si disgregherebbe. Dunque, deve necessariamente esistere un'altra interazione, attrattiva e più forte della

repulsione elettrica. Inoltre, si osserva che nuclei atomici con molti protoni per essere stabili necessitano di un numero sempre maggiore di neutroni. La notazione con cui si indicano i costituenti di un nucleo è ${}^{A}_{Z}X$, essendo X il simbolo chimico, e Z, A rispettivamente il numero atomico e di massa. Mentre elementi relativamente leggeri, come l'elio (${}^{3}_{2}He$, ${}^{4}_{2}He$), il carbonio (${}^{12}_{6}C$), l'azoto, (${}^{14}_{7}N$), l'ossigeno (${}^{16}_{8}O$) hanno $A \simeq 2Z$ (cioè un ugual numero di protoni e neutroni), elementi più pesanti tendono a $A \simeq 2.5\,Z$. Un piccolo difetto di neutroni rende il nucleo instabile. Un esempio noto è costituito dall'uranio: l'isotopo ${}^{238}_{92}U$ è stabile, mentre l'isotopo ${}^{235}_{92}U$ tende a disgregarsi — è "fissile", infatti viene usato nelle centrali nucleari. In sintesi, il numero dei neutroni è fondamentale per garantire la stabilità del nucleo.

Tutto ciò è oggi spiegato dall'*interazione forte*: essa agisce fra i quarks, tenendoli uniti a formare i protoni e i neutroni, e a loro volta tiene questi ultimi uniti all'interno dei nuclei. Dal punto di vista dell'interazione forte, protoni e neutroni si comportano alla stessa maniera: l'interazione forte non è sensibile alla carica elettrica.

Vi è poi una quarta interazione fondamentale, l'*interazione debole* che è responsabile di reazioni nucleari in cui si ha la trasmutazione di protoni in neutroni, o viceversa. Se in una reazione nucleare si produce un nucleo con un rapporto troppo "sbilanciato" fra protoni e neutroni, esso può "riassestarsi", attraverso una o più trasformazioni del tipo:

$$n \to p\, e^- \,\nu \qquad \text{oppure} \qquad p \to n\, e^+ \,\nu$$

Le trasmutazioni $p \leftrightarrow n$ sono sempre accompagnate dalla produzione di altre particelle, che vengono "generate" a spese dell'energia del nucleo: fra queste, oltre al familiare elettrone (e^-), possiamo trovare la sua anti-particella, il *positrone* (e^+), che ha le stesse proprietà dell'elettrone, a parte la carica elettrica che è positiva! Il positrone non può esistere a lungo nella materia ordinaria: appena viene prodotto può incontrare un elettrone di un atomo, e nell'interazione che ne risulta entrambi si disgregano (si "annichilano") trasformandosi in energia elettromagnetica. Nelle interazioni deboli appare sempre un'altra particella, il *neutrino* ν, che non possiede carica elettrica.

Nei casi di nuclei con un eccesso di neutroni, il processo più frequente è la trasmutazione di un neutrone in protone:

$$n \to p\, e^- \,\bar{\nu} \qquad \text{(decadimento-}\beta\text{, o } \beta^-\text{)}$$

oppure, in alcuni casi, l'espulsione diretta di un neutrone. Quando invece c'è un difetto di neutroni, rispetto alla configurazione più stabile, il processo più

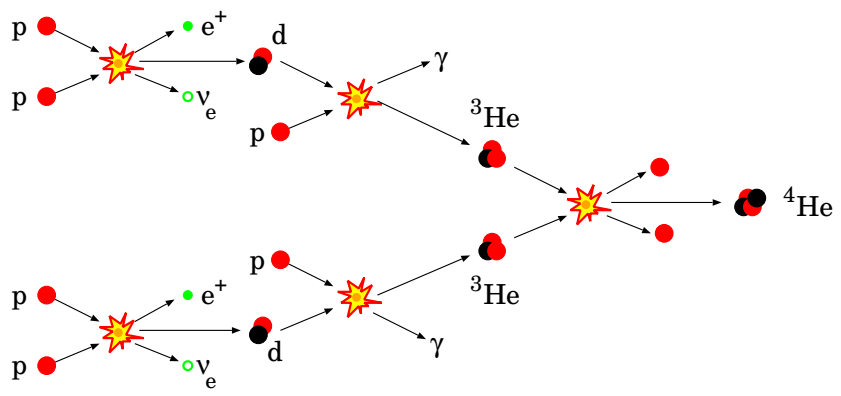


Figura 1.3: *La "fusione dell'idrogeno", che alimenta le stelle.*

frequente è la trasmutazione di un protone in neutrone:

$$p \to n\, e^+\, \nu \qquad \text{(decadimento-}\beta\text{ inverso , o }\beta^+\text{)}$$

oppure, in alcuni casi, l'espulsione diretta di un protone. Infine, alcuni nuclei pesanti tendono a disgregarsi spontaneamente in nuclei più leggeri, mediante il fenomeno della *fissione*.

I processi β^+ e β^- sono governati dall'interazione debole, mentre tutti gli altri avvengono per interazione forte.

1.3.7 La fusione nucleare nelle stelle

I processi nucleari che alimentano le stelle sono un esempio notevole di come le quattro interazioni fondamentali (gravitazionale, elettromagnetica, forte e debole) giochino ciascuna il suo ruolo.

Abbiamo già detto che le stelle contengono molta più materia dei pianeti. In effetti, la forza di gravità che la massa di una stella applica a sè stessa, sottopone il nucleo stellare a pressioni altissime. La materia nel nucleo di una stella è estremamente compressa. Come conseguenza, la struttura atomica ordinaria (in cui ogni atomo ha i suoi elettroni) collassa, e si trasforma in un *plasma*: una sorta di "gas" in cui i nuclei atomici e gli elettroni si comportano come oggetti distinti. In particolare, i nuclei atomici possono muoversi e interagire liberamente, senza essere protetti dai rispettivi gusci di elettroni.

Una stella trae la sua energia da reazioni di *fusione nucleare*, in cui nuclei leggeri si "uniscono" per formare nuclei più pesanti. In queste reazioni viene liberata una grande quantità di energia, grazie all'*interazione forte*, che favorisce l'aggregazione dei nuclei leggeri. La reazione dominante è la *fusione dell'idrogeno*, in cui 4 protoni (cioè nuclei di idrogeno), attraverso

una catena di processi, arrivano a produrre un nucleo di ^{4}He (due protoni e due neutroni). La reazione è schematizzata in Fig. 1.3. Si può notare che il primo processo è la fusione di due protoni che formano un nucleo di deuterio (un protone e un neutrone).

La fusione di due protoni sarebbe estremamente sfavorita dalla repulsione *elettromagnetica*, in quanto entrambi hanno carica elettrica positiva. Tuttavia, grazie all'*interazione debole*, uno dei due protoni si trasmuta in neutrone, la repulsione elettrica fra i due protoni viene meno, e la fusione diventa possibile.

Riflessione: "universalità" delle leggi fisiche

Tutte le leggi fisiche conosciute derivano da osservazioni compiute qui, sul pianeta Terra. Possiamo supporre che le stesse leggi valgano anche altrove? (su altri pianeti? su altre stelle? in altre galassie?)

Siamo confidenti che la risposta sia SÌ. Effettivamente non siamo in grado di andare a compiere esperimenti su altre stelle. Tuttavia le stelle — anche di altre galassie — sono gli oggetti che meglio possiamo osservare, nonostante la loro lontananza. Abbiamo visto che il funzionamento di una stella dipende dalle 4 interazioni fondamentali: gravitazionale, elettromagnetica, forte, debole. Le stelle osservate nella nostra galassia appartengono in gran parte alla cosiddetta "sequenza principale", che è caratterizzata da relazioni precise fra la massa di una stella, la sua luminosità, la sua temperatura di superficie (quest'ultima a sua volta collegata alla "classe spettrale" — o più approssimativamente al suo colore). Queste relazioni valgono per stelle vicine, stelle lontane, stelle appartenenti ad altre galassie. Questo fatto ci porta a concludere che le 4 interazioni fondamentali valgano allo stesso modo (anche quantitativamente!) in diverse regioni dell'Universo — e quindi siano, appunto, "universali".

1.4 L'energia

In generale, al movimento e alle interazioni è associato il concetto di *energia*. L'energia può assumere molte forme, per cui non è facile darne una definizione generale. Procediamo quindi caso per caso.

Un oggetto in movimento è dotato di *energia cinetica*: più l'oggetto è veloce, maggiore è la sua energia cinetica.

Abbiamo già detto che la temperatura di un materiale, a livello microscopico, è dovuta all'agitazione degli atomi o molecole che lo compongono: dunque anche la temperatura è associata a una forma di energia, che si chiama *energia termica*.

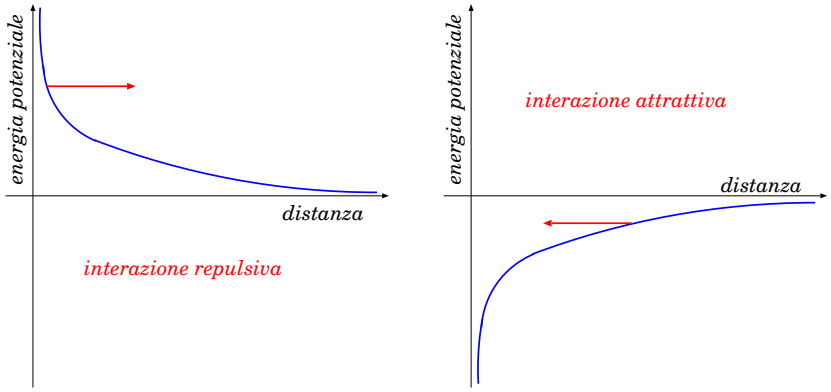


Figura 1.4: *Andamento qualitativo dell'energia potenziale in funzione della distanza, per interazioni repulsive e attrattive. La freccia mostra la direzione in cui agisce la forza: in entrambi i casi, tende ad accelerare, dunque ad aumentare l'energia cinetica: di conseguenza è orientata verso un'energia potenziale decrescente.*

Le interazioni hanno la capacità di modificare il moto di particelle elementari o di oggetti macroscopici. Pertanto le interazioni possono modificare (aumentando o diminuendo) l'energia cinetica. Per alcune interazioni, è possibile introdurre una forma di energia, detta *energia potenziale*, o anche *energia di interazione* [3]. L'idea è che a tali interazioni è associato un "magazzino di energia" (per così dire), per cui quando un'interazione, modificando il moto di un oggetto, aumenta o diminuisce la sua energia cinetica, lo fa rispettivamente cedendo parte della sua energia potenziale, oppure incamerandone altra.

Un'interazione può essere *attrattiva* (come quella gravitazionale, o quella elettrica fra cariche di segno opposto) oppure *repulsiva* (come quella elettrica fra cariche di uguale segno). Un oggetto che subisce un'interazione attrattiva, tende ad aumentare la propria velocità man mano che si avvicina, aumentando la propria energia cinetica: ciò avviene a spese dell'energia potenziale, che quindi diminuisce durante l'avvicinamento. Viceversa, in caso di interazione repulsiva, l'oggetto aumenterà la sua energia cinetica allontanandosi, quindi l'energia potenziale deve diminuire con l'allontanamento. A distanze infinite, l'interazione tende ad annullarsi, pertanto anche l'energia potenziale si annulla. La situazione è schematizzata in Fig. 1.4:

[3] Il secondo nome sembrerebbe più logico, ma il primo ("energia potenziale") è in realtà quello più usato in Fisica classica, perché esprime l'idea di un'energia che non è ancora manifesta in un moto, è un'energia "in potenza".

- per interazioni *repulsive* l'energia potenziale è *positiva* e decrescente con la distanza;
- per interazioni *attrattive* l'energia potenziale è *negativa* e crescente con la distanza.

Ripensando alle interazioni fondamentali, possiamo dunque parlare, in particolare, di *energia gravitazionale*, *energia elettromagnetica*, *energia nucleare* (quest'ultima associata all'interazione forte).

Anche i legami chimici, essendo dovuti all'interazione elettromagnetica, costituiscono una forma di energia potenziale: tipicamente viene riferita come *energia chimica*, o *energia di legame*.

In alcuni casi, l'energia potenziale non è definita. Per esempio, se un oggetto scivola su una superficie ruvida, viene frenato per *attrito*, pertanto perde energia cinetica, ma non vi è un'energia potenziale che aumenta. Tuttavia, l'oggetto e la superficie si scaldano, dunque la loro energia termica aumenta. Quel che succede è che l'energia cinetica di un moto macroscopico (quello dell'oggetto) si trasferisce al moto degli atomi/molecole che costituiscono l'oggetto e il piano.

I campi elettromagnetici possono propagarsi nello spazio, costituendo la *radiazione elettromagnetica*. Anche ad essa è associata un'energia, detta *energia radiante*. Un sistema di cariche elettriche interagenti in generale sarà dotato di una energia cinetica totale e di un'energia elettromagnetica: la somma di queste due energie può variare nel tempo, per esempio diminuendo o aumentando, se il sistema emette o assorbe radiazione. La radiazione che riceviamo dal Sole è un noto esempio di energia radiante: essa scalda gli oggetti che colpisce — anzi, cede continuamente energia a tutto il nostro pianeta — e con apparati fotovoltaici può essere parzialmente convertita in altre forme di energia.

L'energia dunque può assumere diverse forme. Si tratta di una quantità estremamente versatile, che può cambiare di forma, trasformandosi fra potenziale, cinetica, termica, radiante, etc. Tuttavia, in tutte queste trasformazioni, presenta una proprietà estremamente notevole:

l'energia totale di un sistema fisico si conserva

ovvero, se chiamiamo

$$E_{tot} = [E_{cinetica} + E_{potenziale} + E_{termica} + E_{radiante} + E_{chimica} + \dots]$$

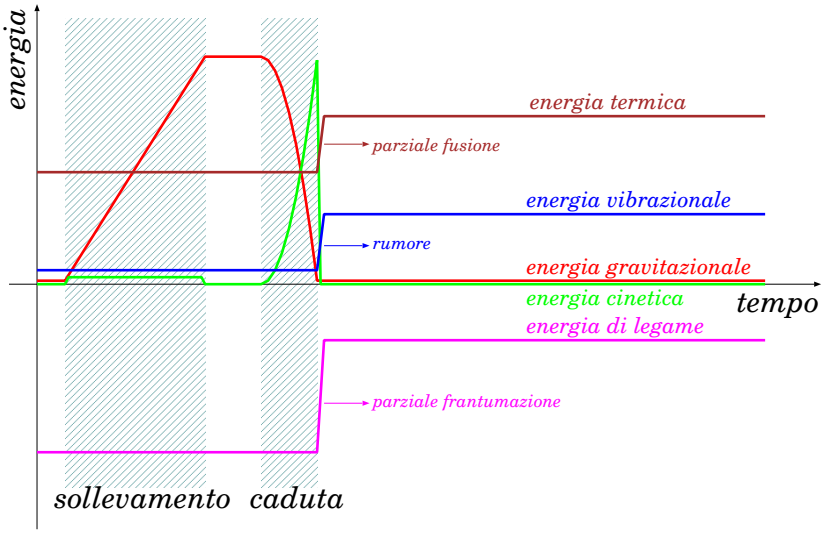


Figura 1.5: *Esempio di possibili trasformazioni dell'energia.*

l'energia totale di un sistema, durante un qualunque processo fisico, o chimico, possiamo scrivere qualcosa come:

$$E_{tot}^{iniziale} = E_{tot}^{finale}$$

Facciamo un esempio semplice, sulla trasformazione e conservazione dell'energia. Supponiamo di sollevare un pesante blocco di ghiaccio da terra e di appoggiarlo su una mensola (Fig. 1.5). Con la fatica fatta, abbiamo ceduto energia gravitazionale all'oggetto. Poi il blocco scivola dalla mensola e cade verso il basso, sempre più velocemente: la sua energia gravitazionale diminuisce, convertendosi in energia cinetica. Quando arriva per terra si rompe in pezzi, sparge gocce d'acqua e produce rumore. La sua energia cinetica si è azzerata (alla fine è fermo), ma non è semplicemente scomparsa: si è trasformata. Infatti:

- ha rotto i legami chimici che tenevano unite le sue molecole (ha aumentato l'energia di legame, che è diventata quindi "meno negativa");
- ha aumentato la temperatura (energia termica) producendo una parziale fusione;
- ha prodotto onde sonore (vibrazioni dell'aria).

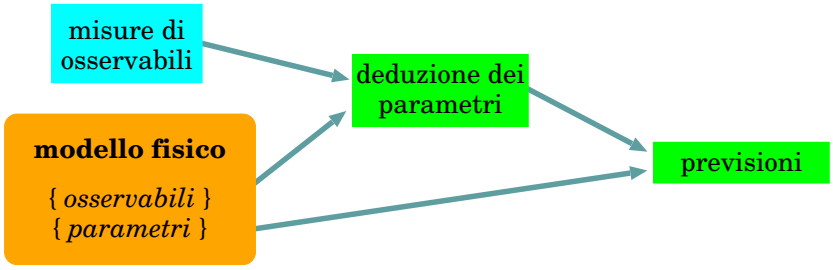


Figura 1.6: *Schema di utilizzo di un modello fisico*

1.5 Le leggi della Fisica e il metodo sperimentale

Le osservazioni in Fisica devono essere oggettive e ripetibili. Pertanto devono essere sempre *quantitative*. Un esperimento non può dare come risultato che "un oggetto è pesante o leggero", o che "è veloce o lento", oppure che è "caldo o freddo": non sarebbe un risultato oggettivo (pesante rispetto a cosa? etc...). Piuttosto, il risultato deve essere formulato in termini di "*quanto* pesa", "*quanto* vale la sua velocità", "*quanto* è la sua temperatura", e così via. In altre parole il risultato di un esperimento deve essere espresso da quantità numeriche. Questo è necessario per verificare se, eseguendo nuovamente l'esperimento, il risultato viene ripetibile o meno.

Una legge fisica è espressa come un modello matematico, ovvero una o più equazioni che mettono in relazione delle *quantità osservabili* — cioè misurabili. Il modello può contenere altre quantità che sono *parametri intrinseci* del sistema fisico, e che sono collegate alle quantità osservabili da relazioni matematiche.

In generale, il modello fisico permette di ricavare i *parametri* da una serie di misure degli *osservabili*; oppure, noti i parametri, permette di effettuare previsioni sul comportamento del sistema fisico: vedi lo schema in Fig. 1.6.

Un esempio concreto, per quanto semplice, può aiutare la comprensione. Consideriamo una molla agganciata ad un estremo, disposta verticalmente; all'altro estremo vengono appesi diversi oggetti, uno alla volta, e si osserva che la molla subisce allungamenti maggiori se l'oggetto appeso è più pesante — il peso P dell'oggetto è determinato con una bilancia. L'apparato è illustrato in Fig. 1.7.

In questo esempio, gli *osservabili* sono i pesi P e le lunghezze ℓ. Eseguendo misure ripetute degli osservabili (cioè appendendo diversi pesi P_i e rilevando

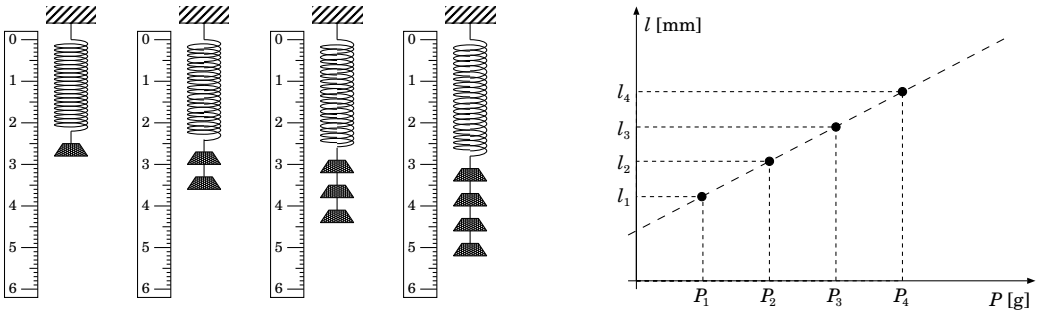


Figura 1.7: *Esempio di sistema fisico: una molla cui si possono appendere diversi pesetti.*

diverse lunghezze ℓ_i) e disponendole su un piano cartesiano si osserva una dipendenza lineare, che consente di estrarre una legge fisica — ovvero un modello: $\ell = \ell_0 + \alpha \cdot P$. I parametri del modello sono la costante α e la "lunghezza a riposo" ℓ_0. Essi possono essere ricavati dalle misure effettuate. Inoltre, una volta noti i parametri, possiamo effettuare previsioni, per esempio predire quale lunghezza la molla raggiungerebbe se appendessimo un certo peso, mai provato, o viceversa, quale peso sarebbe necessario per raggiungere un dato allungamento.

In seguito ad una serie di osservazioni di un fenomeno naturale, si formula un'ipotesi che spieghi in maniera coerente tutte le osservazioni. Si ottiene così una *legge fisica*.

La legge fisica deve essere predittiva, ovvero deve permettere di prevedere l'esito di ulteriori osservazioni, prima che queste vengano effettuate. Questo aspetto è fondamentale: grazie ad esso è possibile mettere la legge alla prova, ovvero progettare esperimenti in condizioni particolari, per vedere se il risultato che si ottiene è quello previsto. In caso affermativo, la legge *viene confermata*, e noi acquisiamo più confidenza che essa sia "giusta".

Viceversa, può accadere che una legge fisica sia confutata da uno o più esperimenti, che forniscono risultati in disaccordo con le previsioni. In tal caso bisogna analizzare la situazione da due punti di vista.

- Occorre stabilire i *limiti di validità* della legge in esame. L'esperimento che l'ha invalidata, ha messo in evidenza una sua inconsistenza interna a livello generale? Ci sono ambiti in cui la legge può ancora essere considerata valida, anche se come conveniente approssimazione di una qualche legge più fondamentale?

- Se possibile, *la legge va riformulata*, per estendere i suoi limiti di

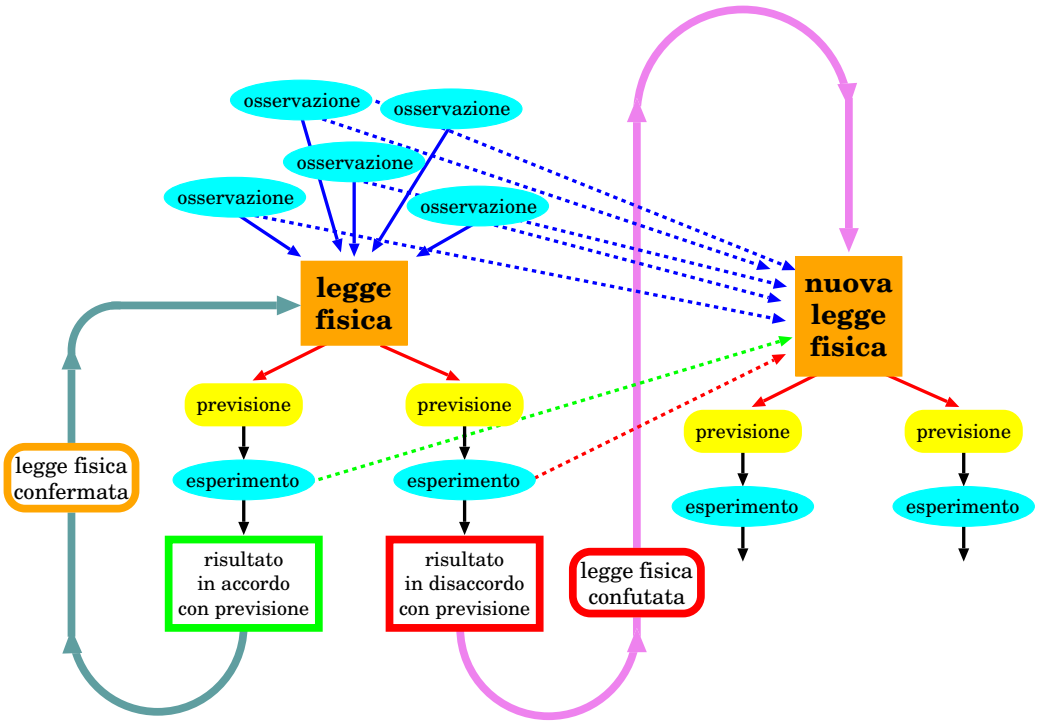


Figura 1.8: *Diagramma che schematizza il metodo scientifico: formulazione di una legge che compendia una serie di osservazioni, esperimenti per verificare le previsioni della legge, eventuale riformulazione della legge se una previsione è disattesa da risultati sperimentali.*

validità, cioè includere nelle sue previsioni sia le osservazioni che hanno portato alla sua prima formulazione, sia quelle che l'hanno confutata.

Questo processo si chiama "metodo scientifico sperimentale", ed è schematizzato in Fig. 1.8.

Vale la pena ricordare che il potere predittivo delle leggi fisiche ha anche un'importante conseguenza di carattere applicativo, poiché consente lo sviluppo tecnologico. Nel progetto di un qualunque apparato ci si basa infatti su modelli fisici (o più in generale anche chimici, biologici, ...) che dovrebbero descrivere il suo comportamento nelle condizioni di utilizzo previste. Un apparato non viene mai "costruito alla cieca, e poi vediamo che cosa fa". Naturalmente, una volta realizzato, va poi sottoposto a scrupolosi test, per vedere se funziona come previsto. Anche questi test hanno valenza di esperimento scientifico che validi i modelli su cui ci si è basati.

Per una legge fisica occorre sempre stabilire l'ambito di validità.

Per esempio, abbiamo a disposizione modelli che descrivono in modo più che ragionevole le "interazioni di contatto": il loro ambito di validità è quello in cui gli oggetti sono formati da molti atomi, cosicché anziché osservare le singole interazioni fondamentali fra gli atomi, si osserva il loro effetto collettivo. Oppure, un gas o un liquido, oppure un oggetto rigido, possono essere caratterizzati da alcune grandezze macroscopiche (temperatura, pressione, densità, ...), senza esplorare la loro struttura microscopica. Questi sono esempi di "modelli efficaci", che funzionano bene quando il sistema è formato da molti ($\approx 10^{20}$ o più) atomi o molecole. Per sistemi più semplici, con un piccolo numero di costituenti, questi modelli efficaci sono inadeguati: siamo usciti dall'ambito di validità.

1.6 Ambiti di validità della Meccanica Newtoniana

Fino alla fine del 19° secolo, tutti i fenomeni fisici osservati erano ben descritti da quella che oggi (più di un secolo dopo) chiamiamo "Fisica Classica": un insieme di leggi coerenti basati sulla Meccanica di Newton e sulla Teoria dell'Elettromagnetismo di Maxwell.

La teoria di Maxwell (1864), tra le altre cose, prevedeva l'esistenza delle *onde elettromagnetiche*, osservate pochi anni dopo da Hertz. Secondo Maxwell, le onde elettromagnetiche nel vuoto viaggiano sempre alla stessa velocità — la *velocità della luce*, $c = 300\,000$ km/s — *a prescindere dalla velocità con cui si muove la sorgente che le emette.* Il risultato aveva un che di sorprendente: in meccanica newtoniana tutte le velocità sono *relative* al sistema di riferimento in cui si osservano! Il paradosso veniva "accettato" ipotizzando che le onde elettromagnetiche si propagassero attraverso un qualche mezzo materiale, l'*etere luminifero*, e che la velocità della luce fosse riferita all'etere stesso. Va notato che c è così sproporzionatamente grande rispetto alle velocità accessibili all'epoca, che non era banale immaginare esperimenti in cui ci si muovesse rispetto all'etere con una velocità non trascurabile rispetto a c. L'esperimento è arrivato, con Michelson e Morley (1881-87), che pensarono di sfruttare il moto orbitale della Terra intorno al Sole (a circa 30 km/s). Il risultato fu che non si osservò nessuna variazione della velocità della luce: dunque questa è "assoluta", e l'etere luminifero non esiste! La meccanica newtoniana, pur perfettamente funzionante in tanti ambiti, era quindi inadeguata a trattare fenomeni a velocità luminale. La

sua rivisitazione portò alla formulazione della *Teoria della Relatività Speciale* (A.Einstein, 1905).

Lo stesso Einstein si rese conto che la teoria della gravità di Newton non era compatibile con la Relatività Ristretta: secondo Newton, gli effetti della gravità si propagano istantaneamente nello spazio a qualunque distanza, mentre Einstein aveva mostrato che propagazioni a velocità superluminale avrebbero creato inconsistenze nella *causalità* degli eventi. Inoltre erano state osservate anomalie nell'orbita di Mercurio che non erano spiegabili con la meccanica newtoniana. Dieci anni più tardi della Relatività Speciale, nel 1915, Einstein formulò la *Teoria della Relatività Generale*, necessaria per ristabilire la coerenza fra gravità e relatività: la nuova descrizione forniva previsioni diverse da quelle newtoniane, soprattutto per campi gravitazionali intensi e/o moti a velocità elevate in campi gravitazionali [4].

Negli anni 1920–1930, in ambiti completamente diversi, furono osservati fenomeni che coinvolgono particelle elementari e loro interazioni a distanze molto piccole, interatomiche o subatomiche: onde elettromagnetiche che manifestavano comportamenti corpuscolari (effetto fotoelettrico e Compton), particelle che producevano fenomeni ondulatori (diffrazione di fasci di elettroni), o che esibivano proprietà apparentemente "casuali", cioè non ripetibili in esperimenti identici... Questi fenomeni risultavano assolutamente inspiegabili con la Fisica Classica, ed anche in questo caso fu stato necessario formulare una nuova teoria, la *Meccanica Quantistica* [5].

[4] In questa formulazione, ciò che genera e subisce la gravità non sono più solo le masse, ma anche qualunque cosa dotata di energia. Per esempio, la luce può essere deflessa da un campo gravitazionale intenso ("lente gravitazionale"). Inoltre la gravità di oggetti molto massivi e compatti può diventare così intensa da non lasciare sfuggire niente, compresa la luce ("buchi neri"). Tutte le previsioni della Relatività Generale si sono poi rivelate valide. La prima osservazione di "lente gravitazionale" è stata fatta da Eddington nel 1919: durante un'eclisse di Sole (quindi con la luce solare schermata dal disco lunare) è stato possibile osservare un apparente spostamento della luce di stelle vicine alla posizione del Sole, dovuto in realtà al fatto che la gravità prodotta dalla massa solare imprimeva una traiettoria incurvata alla luce stellare. Ad oggi, il fenomeno di lente gravitazionale è spesso osservato, per esempio quando la luce di una galassia lontana è deviata dalla gravità di galassie più vicine. Anche l'esistenza dei buchi neri è ormai accettata: anche se non si vedono direttamente, si vede il loro effetto gravitazionale su oggetti celesti vicini (per esempio, sistemi binari stella-buco nero). Al centro della Via Lattea c'è un buco nero supermassiccio: la sua presenta è rivelata dalle orbite delle stelle intorno al centro galattico. La più recente conferma della Relatività Generale viene dall'osservazione delle *onde gravitazionali*, avvenuta per la prima volta nell'autunno 2015 grazie all'esperimento LIGO negli Stati Uniti e pubblicata nella primavera 2016. Inoltre, nella primavera del 2019, è stata effettuata la prima "fotografia" di un buco nero galattico, situato al centro della galassia ellittica M87.

[5] Vale la pena notare che tutta la tecnologia elettronica, basata sui materiali semiconduttori, è comprensibile solo mediante la meccanica quantistica: una branca della

Attualmente, per descrivere le interazioni fondamentali fra particelle elementari si usa una teoria che unisce le caratteristiche di relatività speciale e meccanica quantistica, e va sotto il nome di *Teoria dei Campi Quantistici*. È una teoria che trova ottimi riscontri sperimentali agli attuali esperimenti sugli acceleratori di particelle. Anche questa tuttavia non può essere una teoria "finale", perché non descrive la gravità. Viceversa, ad oggi non è stata formulata una teoria quantistica che includa la gravità, nè si hanno osservazioni sperimentali che suggeriscano, o escludano, la presenza di fenomeni quantistici nella gravità.

La "mappa" delle teorie fisiche, con i loro ambiti di validità, è schematizzata in Fig. 1.9. Come si può vedere, i confini di validità delle diverse teorie non sono netti: tutto dipende da qual è la precisione che si vuole ottenere nella descrizione. La fisica newtoniana funziona per:

- velocità molto minori della velocità della luce: $v \ll c$;
  [quanto minori? gli effetti relativistici si misurano in generale con la quantità $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$, quindi per esempio se $\dfrac{v}{c} < 0.01$ abbiamo approssimazioni dell'ordine 10^{-4} — una parte su 10 000]

- distanze molto maggiori delle dimensioni molecolari: $\Delta\ell \gg 10^{-9}$ m
  [quanto maggiori? per fissare le idee diciamo per $\Delta\ell \gtrsim 10^{-8}$ m, cioè dai centesimi di micro-metro (0.01 μm) in su... però esistono fenomeni che manifestano la loro natura quantistica anche su scale più grandi]

- ... ma anche distanze inferiori ai miliardi di anni-luce
  [la dilatazione dell'universo su scale così grandi è governata dalla "costante cosmologica", un parametro della Relatività Generale]

- campi gravitazionali deboli;
  [quanto deboli? qui è più difficile rispondere: dipende sia dall'intensità del campo gravitazionale, sia dalle velocità degli oggetti che vi si muovono]

Siccome le due teorie più generali che abbiamo sono la Teoria dei Campi Quantistici e la Relatività Generale, perché non iniziare lo studio

---

fisica, apparentemente così lontana dal senso comune, eppure che ci circonda in ogni aspetto della nostra vita. Quelli che affermano che la ricerca scientifica serve solo se ha scopi pratici ben definiti, dovrebbero pensare a questo esempio: nel 1920 i fisici potevano prevedere lo sviluppo tecnologico che è derivato dalla meccanica quantistica? Chi sostiene che la ricerca di base sia inutile, è disposto a vivere senza computer e smartphone? La storia della scienza ci insegna sicuramente una cosa: una nuova scoperta, prima o poi, avrà applicazioni pratiche, non importa se passeranno mesi, anni, o decenni.

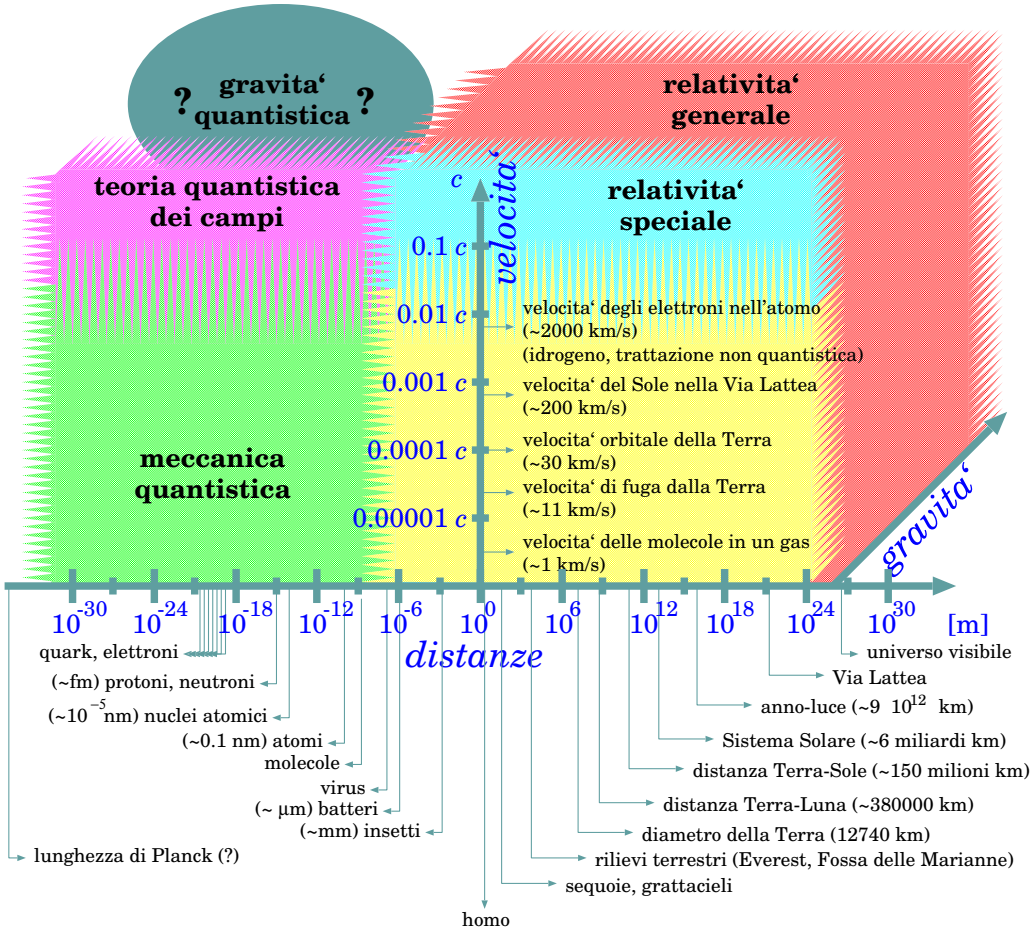


Figura 1.9: *Regioni di validità della Fisica Classica Newtoniana (in giallo) e delle più moderne teorie: Meccanica Quantistica, Relatività Ristretta, Teoria dei Campi Quantistici, e Relatività Generale.*

della fisica partendo da esse, e ricavare la Meccanica Newtoniana come un limite matematico, simultaneamente per *(i)* campi gravitazionali deboli; *(ii)* velocità piccole rispetto a c; *(iii)* distanze grandi rispetto a quelle molecolari?

Per rispondere, bisogna considerare che queste teorie generali richiedono una matematica molto avanzata, e fanno uso di concetti per niente intuitivi. La qual cosa non deve stupirci: sono state formulate apposta per descrivere situazioni estreme, rispetto all'esperienza comune. Viceversa, la meccanica newtoniana può essere formulata in maniera autoconsistente, e consente di descrivere la vastità dei fenomeni che cadono direttamente sotto i nostri sensi con un'ottima (OTTIMA!!) approssimazione: pertanto entro questi *limiti di validità* è di per sè una teoria corretta.

1.7 Misure in Fisica

Abbiamo già detto che le grandezze fisiche devono essere quantitative. D'altra parte esprimerle tramite numeri e nient'altro non è sufficiente. Una frase del tipo "la distanza Milano-Roma è 580" non ha senso: 580 *cosa???* Chilometri? Centimetri? Miglia nautiche? Litri?? Chili?? Alcune di queste "proposte" sono palesemente assurde (litri, chili, ...). Altre sarebbero accettabili (centimetri, miglia nautiche), perché fanno riferimento a quantità che descrivono distanze, ma non sono quelle giuste. La formulazione giusta è "580 chilometri".

In ogni caso è necessaria una specificazione.

In generale, quando si deve descrivere quantitativamente una grandezza fisica X, si fornisce una *misura*. Per fare ciò, la si confronta con un'altra grandezza $\overline{X}$, ad essa omogenea, che si assume come *campione*, o *unità di misura*, e si calcola quante volte $\overline{X}$ è contenuto in X. Se chiamiamo x il risultato di questo calcolo, allora scriviamo la *misura di* X come:

$$\underbrace{X}_{\text{(grandezza fisica)}} = \underbrace{x}_{\text{(misura)}} \underbrace{\overline{X}}_{\text{(unità di misura)}} \tag{1.1}$$

1.7.1 Unità di misura

Per ogni grandezza fisica abbiamo a disposizione diverse unità di misura. In Fisica è stato adottato il *Sistema Internazionale di unità di misura* (SI), in cui le distanze si misurano in metri (m), i tempi in secondi (s), le masse in kilogrammi (kg) [6]. Le unità di misura del SI sono elencate nella seguente tabella. Alcune grandezze hanno unità di misura fondamentali, e sono scritte in **grassetto**, tutte le altre sono derivate, nel senso che l'unità di misura si deduce dalla definizione della grandezza.

[6] Molti Paesi del mondo hanno aderito al SI anche nella vita quotidiana — un'importante eccezione è costituita dai Paesi anglosassoni, che usano ancora le yarde, le miglia, le pinte, i galloni e i cucchiai da tè: so much for them!

grandezza fisica	unità di misura	
	simbolo	nome
grandezze cinematiche		
distanza, spostamento	m	**metro**
tempo	s	**secondo**
velocità	m/s	metri al secondo
accelerazione	m/s^2	metri al secondo quadrato
frequenza	$Hz = s^{-1}$	Hertz
velocità angolare, pulsazione	rad/s	radianti al secondo
grandezze dinamiche		
massa	kg	**chilogrammo**
forza	$N = kg \cdot m/s^2$	Newton
quantità di moto	$kg \cdot m/s$	
momento angolare	$kg \cdot m^2/s$	
momento meccanico	$N \cdot m$	Newton per metri
energia, lavoro	$J = N \cdot m$	Joule
potenza	$W = J/s$	Watt
grandezze elettromagnetiche		
carica elettrica	C	**Coulomb**
campo elettrico	V/m	Volt su metro
potenziale elettrico	$V = J/C$	Volt
corrente elettrica	$A = C/s$	Ampere
campo magnetico	$T = NC^{-1}m^{-1}s$	Tesla

Spesso, per fini pratici, queste unità di misura sono affiancate da altre, che sono multipli o sottomultipli. Per esempio, la lunghezza di un mobile si misura più spesso in centimetri (cm), e una distanza stradale in chilometri (km), le distanze interatomiche in nanometri (nm, miliardesimi di metro), le distanze astrofisiche in anni-luce ("ly", ovvero "light-years"). Analogamente, la durata delle lezioni si misura in minuti (min) o in ore (h), i tempi nell'agricoltura si misurano in giorni o mesi, la durata della vita umana in anni, i periodi storici in secoli... Anche le masse possono essere misurate in grammi (g) o quintali, o tonnellate... Riportiamo una tabella di conversione dalle unità di misura "pratiche" a quelle del SI.

	unità di misura	conversione a SI
simbolo	nome	
nm	nanometro	10^{-9} m
μm	micrometro (o micron)	10^{-6} m
mm	millimetro	10^{-3} m
cm	centimetro	10^{-2} m
km	chilometro	10^{3} m
A.U.	unità astronomica	149 597 870.7 km = $1.495\,978\,707 \cdot 10^{11}$ m
ly	anno luce ("light year")	$9.460\,730\,472\,580\,800 \cdot 10^{15}$ m
ps	picosecondo	10^{-12} s
ns	nanosecondo	10^{-9} s
μs	microsecondo	10^{-6} s
ms	millisecondo	10^{-3} s
min	minuto	60 s
h	ora ("hour")	3600 s
d	giorno ("day")	86 400 s
yr	anno ("year")	$3.155\,760\,0 \cdot 10^{7}$ s (365.25 d)
μg	microgrammo	10^{-9} kg
mg	milligrammo	10^{-6} kg
g	grammo	10^{-3} kg
q	quintale	100 kg
ton	tonnellata	1000 kg
eV	elettron-Volt	$1.602\,176\,6 \cdot 10^{-19}$ J
keV	chilo-elettron-Volt	$1.602\,176\,6 \cdot 10^{-16}$ J
MeV	mega-elettron-Volt	$1.602\,176\,6 \cdot 10^{-13}$ J
GeV	giga-elettron-Volt	$1.602\,176\,6 \cdot 10^{-10}$ J

Come si vede, per molte grandezze si fa uso di prefissi come "nano-", "micro-", "mega-", "giga-", etc, per riscalare l'unità di misura SI ad un livello comparabile alla quantità che si vuole misurare. Riassumiamo qui i prefissi più usati:

f	femto-	10^{-15}
p	pico-	10^{-12}
n	nano-	10^{-9}
μ	micro-	10^{-6}
m	milli-	10^{-3}
k	chilo-	10^{3}
M	mega-	10^{6}
G	giga-	10^{9}
T	tera-	10^{12}

1.8 Le costanti fondamentali della Fisica

Abbiamo visto che qualunque modello fisico contiene dei parametri, che possono essere determinati con una o più misure delle grandezze osservabili.

Esistono in natura alcuni parametri che sono *universali*, nel senso che — a quanto ne sappiamo — assumono gli stessi valori in qualunque parte dell'Universo, e in qualunque condizione dinamica. Questi sono le *costanti fondamentali della Fisica*. Le elenchiamo qui, per referenza a qualunque problema incontreremo. Per ciascuna di esse, sono riportate tutte le cifre non affette da incertezza: con questo intendiamo che un valore indicato per esempio con $x.xxx\,xxx \cdot 10^{yy}$ UdM è affetto da un'incertezza minore di $0.000\,001 \cdot 10^{yy}$ UdM.

simbolo	valore	nome
G	$6.674 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}	costante della gravitazione universale
g	9.806 m/s^2	accelerazione gravitazionale
		(valore medio alla superficie terrestre)
N_A	$6.022\,141 \cdot 10^{23}$	numero di Avogadro (particelle per mole)
k_B	$1.380\,65 \cdot 10^{-23}$ J K^{-1}	costante di Boltzmann
R	8.314 47 J K^{-1}	costante dei gas perfetti ($R \equiv k_B N_A$)
m_e	$9.109\,383 \cdot 10^{-31}$ kg	massa dell'elettrone
m_p	$1.672\,621\,8 \cdot 10^{-27}$ kg	massa del protone
m_n	$1.674\,927\,4 \cdot 10^{-27}$ kg	massa del neutrone
u.m.a	$1.660\,538\,9 \cdot 10^{-27}$ kg	unità di massa atomica ($\frac{m[^{12}\mathrm{C}]}{12}$)
		(1/12 della massa dell'atomo ^{12}C)
e	$1.602\,176\,6 \cdot 10^{-19}$ C	carica elettrica del protone
		($-e$ carica elettrica dell'elettrone)
c	299 792 458 m/s	velocità della luce nel vuoto
ϵ_0	$8.854\,187\,817 \cdot 10^{-12}$ C^2 N^{-1} m^{-2}	costante dielettrica del vuoto
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$8.987\,551\,788 \cdot 10^{9}$ N C^{-2} m^2	
μ_0	$12.566\,370\,614 \cdot 10^{-7}$ N A^{-2}	permeabilità magnetica del vuoto
		($\mu_0 \equiv \frac{1}{c^2\epsilon_0}$)
h	$6.626\,070 \cdot 10^{-34}$ J s	costante di Planck
$\hbar$	$1.054\,571\,7 \cdot 10^{-34}$ J s	costante di Planck ridotta ($\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$)

1.9 Simboli usati per le grandezze fisiche

Riassumiamo qui i simboli che useremo per indicare le grandezze fisiche.

Tutte le grandezze che si caratterizzano completamente con un valore numerico sono dette *scalari*, e si indicano genericamente con una lettera X (latina, greca, ...) — per esempio, massa m, pressione P, temperatura T, energia $\mathcal{E}$, ...

Le grandezze che necessitano anche una specifica di orientamento si chiamano *grandezze vettoriali* e si indicano in neretto e con una freccia sopra: $\vec{\boldsymbol{X}}$. Esempi sono gli spostamenti $\Delta\vec{\boldsymbol{r}}$, le velocità $\vec{\boldsymbol{v}}$, le accelerazioni $\vec{\boldsymbol{a}}$, le forze $\vec{\boldsymbol{F}}$, ... Per ogni grandezza vettoriale si può definire il *modulo* (o intensità, o lunghezza...) e si indica con $|\vec{\boldsymbol{X}}|$ o più semplicemente anche con X.

È spesso utile introdurre *vettori unitari* — o *versori* — caratterizzati da modulo = 1 (senza unità di misura). Questi non definiscono delle quantità, ma solo degli orientamenti: si indicano in neretto con un accento circonflesso: $\hat{\boldsymbol{X}}$. Esempi di versori sono i 3 assi cartesiani $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$ che useremo per identificare una posizione nello spazio, oppure un asse di rotazione, oppure ancora una direzione tangente alla traiettoria di un moto, o ortogonale ad essa (rispettivamente $\hat{\boldsymbol{t}}$, $\hat{\boldsymbol{n}}$).

Quindi, in sintesi:

X	quantità scalare
$\vec{\boldsymbol{X}}$	quantità vettoriale
$\lvert\vec{\boldsymbol{X}}\rvert \equiv X$	modulo di una quantità vettoriale
$\hat{\boldsymbol{X}}$	versore

Una grandezza generalmente subisce variazioni nel tempo, che si indicano con Δ: considerando una situazione "prima" e una "dopo", scriviamo:

$$\Delta X = X^{(dopo)} - X^{(prima)} \qquad \text{(variazione di una grandezza scalare)}$$

$$\Delta\vec{\boldsymbol{X}} = \vec{\boldsymbol{X}}^{(dopo)} - \vec{\boldsymbol{X}}^{(prima)} \qquad \text{(variazione di una grandezza vettoriale)}$$

Si noti che la differenza è sempre definita come (dopo)−(prima).

Variazioni infinitesime (che tipicamente avvengono in intervalli di tempo infinitesimi) si indicano con d:

$$dX \quad ; \quad d\vec{\boldsymbol{X}} \qquad \text{(variazioni infinitesime)}$$

Può accadere di dover introdurre grandezze infinitesime che *non sono variazioni di qualcosa*: in tal caso usiamo il simbolo δ, per non confonderci con le variazioni infinitesime:

$$\delta X \quad ; \quad \delta\vec{\boldsymbol{X}} \qquad \text{(grandezze infinitesime che non sono variazioni)}$$

Ora introduciamo la simbologia che si userà nel testo, per diverse grandezze specifiche

grandezza fisica	simbolo
raggio vettore, vettore spostamento (finito/infinitesimo)	$\vec{\boldsymbol{r}}$, $\Delta\vec{\boldsymbol{r}}$, $d\vec{\boldsymbol{r}}$
coordinata, spostamento (finito/infinitesimo) lungo una curva	s, Δs, ds
tempo, intervallo (finito/infinitesimo) di tempo	t, Δt, dt
raggio di curvatura	ρ (oppure r, R)
volume, superficie	V, Σ
velocità (scalare, vettoriale)	v, $\vec{\boldsymbol{v}}$
velocità angolare	$\vec{\boldsymbol{\omega}}$
accelerazione (totale, tangenziale, centripeta)	$\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{a}}_t$, $\vec{\boldsymbol{a}}_n$
frequenza angolare (o pulsazione), frequenza, periodo	Ω, ν, T
massa	m (oppure M)
forza	$\vec{\boldsymbol{F}}$
quantità di moto	$\vec{\boldsymbol{p}}$
lavoro	$\mathcal{W}$
energia cinetica	$\mathcal{E}$
energia potenziale	$\mathcal{U}$
potenziale	Φ
energia meccanica	E
potenza	$\mathcal{P}$
momento angolare	$\vec{\boldsymbol{L}}$
momento torcente (o meccanico)	$\vec{\boldsymbol{M}}$
tensore di inerzia	$\mathbb{I}$
momento di inerzia	I
campo gravitazionale	$\vec{\boldsymbol{g}}$
densità (di massa in volume)	ρ
pressione	P

Per completezza, elenchiamo altre grandezze, presenti in termodinamica, elettromagnetismo, ottica.

grandezza fisica	simbolo
temperatura assoluta	T
calore	Q
capacità termica, calore specifico	$C,\ c$
calore latente di fusione/vaporizzazione	$\lambda_F,\ \lambda_V$
campo elettrico	$\vec{\boldsymbol{E}}$
campo magnetico	$\vec{\boldsymbol{B}}$
carica elettrica	$q,\ Q$
densità (di carica in volume)	ρ
corrente elettrica	I
densità di corrente	$\vec{\boldsymbol{J}}$
resistenza elettrica	R
lunghezza d'onda, frequenza	$\lambda,\ \nu$
costante dielettrica relativa, indice di rifrazione	$\epsilon_r,\ n$

Parte I

Meccanica

Capitolo 2

Cinematica unidimensionale

In questo capitolo ci concentreremo sui moti *unidimensionali*, ovvero che avvengono lungo una linea predefinita. Questo approccio è utile per introdurre i concetti di *posizione rispetto a un riferimento*, di *velocità* e di *accelerazione* istantanee, e la matematica necessaria a discuterli — nella fattispecie, il concetto di intervalli di tempo "infinitamente brevi" e le operazioni di derivata e di integrale. Nei capitoli successivi affronteremo i concetti, più utili in Fisica, di posizione e moto nello spazio tridimensionale.

Il moto di qualunque cosa (oggetto o particella elementare) è caratterizzato da uno *spostamento*, ovvero da un *cambiamento di posizione*. Tutte le posizioni sono riferibili come spostamenti rispetto ad una *posizione di riferimento*. Nel descrivere un moto, però, solitamente si vuole anche dire quanto rapidamente esso avviene. Più precisamente si vuole mettere in relazione *lo spostamento* (proprietà geometrica) con un'altra quantità: *il tempo*. Si parla perciò di *velocità* e di *accelerazione*. La cinematica è la branca della fisica che definisce quantitativamente queste proprietà del moto e le loro relazioni.

Inoltre, considereremo sempre il moto di oggetti che siano *molto più piccoli rispetto alle distanze che percorrono*, in modo da poterli considerare "puntiformi" — per esempio, biglie che rotolano lungo una pista, o automobili che viaggiano sull'autostrada [1], o treni su una rotaia. L'idea generale dell'approssimazione puntiforme è che *la posizione dell'oggetto sia definita solo dalla sua collocazione, e non per esempio dal suo orientamento*, e quindi che il suo movimento sia solo di natura traslatoria, e si possa trascurare qualunque rotazione.

[1] Un'automobile può essere considerata "puntiforme" mentre viaggia sull'autostrada da Milano a Roma — la stessa automobile è tutt'altro che "puntiforme" quando cercate di parcheggiarla a Milano o a Roma.

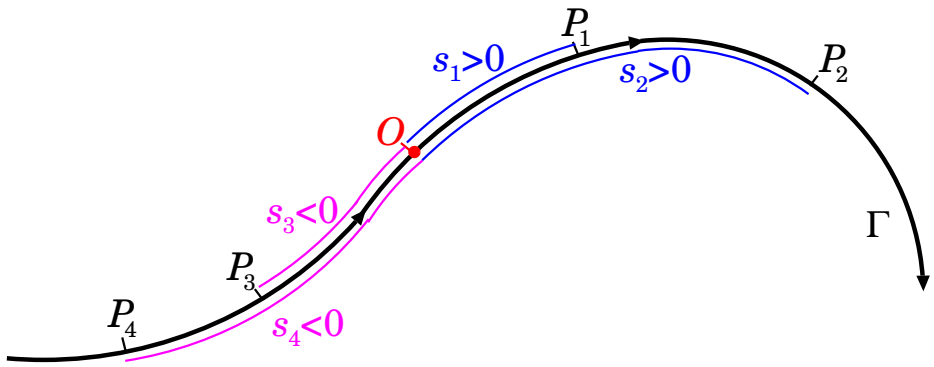


Figura 2.1: *Esempi di posizione lungo una linea. O è l'origine, che ha per definizione coordinata $= 0$. Dato l'orientamento della linea, le posizioni P_1, P_2 hanno coordinate positive, $s_1 > 0$ e $s_2 > 0$, mentre P_3, P_4 hanno coordinate negative, $s_3 < 0$ e $s_4 < 0$. Le coordinate dei 4 punti presi ad esempio sono tali che $s_4 < s_3 < 0 < s_1 < s_2$.*

2.1 Posizione e spostamenti su una linea

Per definire la posizione di un oggetto puntiforme su una linea Γ, è necessario anzitutto scegliere un punto O di riferimento, che viene chiamato *origine*, e un *orientamento* convenzionale. Ogni altro punto P può essere identificato in modo univoco specificando la *distanza* s misurata lungo la linea Γ da O a P: a questa si attribuisce segno $+$ se per andare da O a P si segue l'orientamento di Γ, segno $-$ se si segue l'orientamento opposto. La grandezza s così definita si chiama *coordinata* del punto P lungo la linea orientata Γ.

Per esempio, in Fig. 2.1, è data la curva Γ con il suo orientamento e l'origine O. I 4 punti indicati P_1, P_2, P_3, P_4 hanno rispettivamente coordinate s_1, s_2, s_3, s_4. Poiché i punti P_1, P_2 si raggiungono da O seguendo l'orientamento di Γ, la loro coordinata è positiva. Viceversa, i punti P_3, P_4 hanno coordinata negativa, perché si raggiungono da O seguendo l'orientamento opposto a quello di Γ.

Se un oggetto puntiforme si sposta dalla posizione P_1, di coordinata s_1, alla posizione P_2, di coordinata s_2, si definisce lo *spostamento* come la differenza fra la coordinata di arrivo e quella di partenza:

$$\Delta s = s_2 - s_1 \tag{2.1}$$

Anche lo spostamento è dotato di segno: se avviene lungo l'orientamento di Γ, allora $s_2 > s_1$, cioè $\Delta s > 0$. Viceversa, se avviene con orientamento opposto a quello di Γ, allora $s_2 < s_1$ e $\Delta s < 0$. Vedi Fig. 2.2.

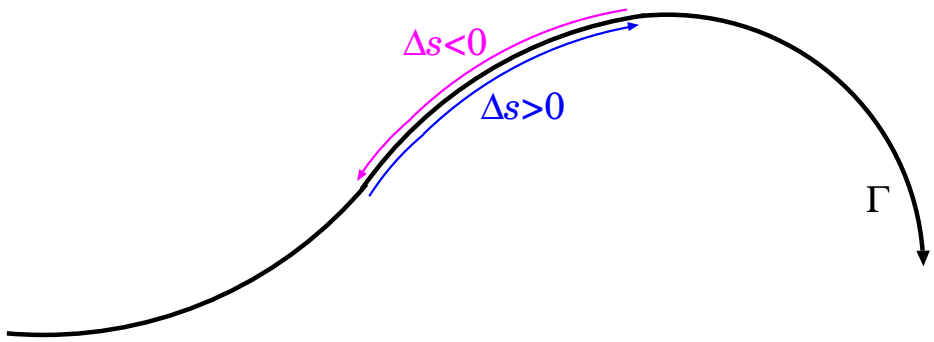


Figura 2.2: *Esempi di spostamenti Δs lungo una linea orientata Γ: si ha $\Delta s > 0$ oppure $\Delta s < 0$, a seconda che lo spostamento sia concorde o discorde rispetto all'orientamento della linea.*

Un esempio

Consideriamo un'automobile che viaggia lungo un'autostrada (senza svincoli o raccordi nel tratto che ci interessa): per quanto l'autostrada possa fare delle curve, o avere salite o discese, la posizione dell'automobile può essere definita univocamente da una sola coordinata *s, definita come la distanza, misurata lungo l'autostrada, da un luogo preciso di riferimento. Così, per esempio, se l'autostrada è la A1 ("AutoSole" Milano-Napoli) possiamo prendere come riferimento il casello di Roma Est e da lì misurare tutte le distanze. Inoltre l'autostrada può essere percorsa in due direzioni, verso Milano o verso Napoli. Per specificare la direzione, scegliamo un orientamento convenzionale dell'autostrada, per esempio da Sud verso Nord, e attribuiamo un* segno *alle distanze: positivo se sono percorse nella direzione convenzionale, negativo altrimenti. Così per esempio la coordinata di Firenze è positiva perché si trova a Nord di Roma, mentre la coordinata di Napoli è negativa perché si trova a Sud di Roma. Assumendo che un solo percorso sia possibile, senza varianti, le coordinate di qualunque luogo lungo l'autostrada sono espresse come distanze dal casello di Roma Est: le coordinate di alcune città saranno quelle espresse nella seguente tabella:*

luogo	*coordinata s*
Milano	579 *km*
Parma	452 *km*
Bologna	363 *km*
Firenze	273 *km*
Arezzo	195 *km*
Roma	0 *km*
Frosinone	−62 *km*
Napoli	−197 *km*

Si noti che le città a Sud di Roma hanno coordinata negativa, per la convenzione di orientamento Sud-Nord che abbiamo scelto.

Calcolare i seguenti spostamenti (con il loro segno): Roma-Firenze; Roma-Napoli; Milano-Bologna; Arezzo-Parma, Napoli-Frosinone.

Risposta*:*

Roma-Firenze	$\Delta s = 273$ km $- 0$ km	$= +273$ *km*
Roma-Napoli	$\Delta s = -197$ km $- 0$ km	$= -197$ *km*
Milano-Bologna	$\Delta s = 363$ km $- 579$ km	$= -216$ *km*
Arezzo-Parma	$\Delta s = 452$ km $- 195$ km	$= +257$ *km*
Napoli-Frosinone	$\Delta s = (-62)$ km $- (-197)$ km	$= +135$ *km*

Anche qui, a causa dell'orientamento convenzionale, gli spostamenti verso Nord sono positivi, quelli verso Sud sono negativi... Attenzione: niente di ideologico, è solo che siamo abituati alle carte geografiche con il Nord in alto. Se volete potete cambiare l'orientamento dell'autostrada — e se non vi piace mettere l'origine a Roma mettetela dove meglio credete — ridefinitevi tutte le coordinate con il nuovo sistema di riferimento e ripetete l'esercizio.

2.2 Legge oraria del moto

Un oggetto che si sposta lungo una linea, modifica la sua coordinata s al passare del tempo t, pertanto possiamo pensare a "mappare" la sua posizione a diversi istanti di tempo $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$, chiamando s_i la sua coordinata all'istante t_i: si ottiene una tabella del tipo:

t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	$\ldots$	t_N
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	$\ldots$	s_N

che può anche essere rappresentata come un grafico, in Fig. 2.3. Immaginando di infittire sempre più gli istanti t_i a cui si rileva la coordinata s_i si ottiene una successione continua di punti $(t; s)$, che può essere rappresentata come una funzione della coordinata s rispetto al tempo t:

$$s = s(t) \tag{2.2}$$

Questa funzione si chiama *legge oraria del moto.*

2.3 Velocità media

Quanto rapidamente si muove l'oggetto? Ovvero: qual è la distanza che percorre in un certo intervallo di tempo? La quantità che risponde a questa domanda è la *velocità media.* Se un oggetto si trovava nella posizione (1)

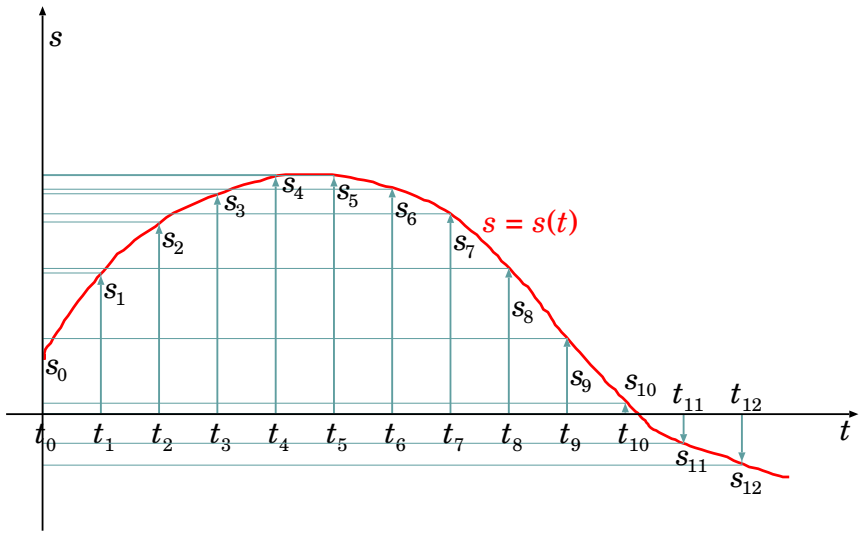


Figura 2.3: *Moto di un oggetto in funzione del tempo, rappresentato in un grafico (tempo;spazio), $(t; s)$. La coordinata s_i corrisponde all'istante t_i, la curva continua rappresenta la legge oraria $s = s(t)$. In questo esempio, per semplicità, gli istanti t_i sono presi ad intervalli di tempo regolare, cioè sono equispaziati.*

all'istante t_1 e poi si è spostato raggiungendo la posizione (2) all'istante t_2, ha percorso una distanza $\Delta s = s_2 - s_1$ in un intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$. La sua velocità media è definita come:

$$\bar{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \text{(velocità media)} \tag{2.3}$$

Esempio sulle velocità medie

Un'automobile percorre una distanza $\Delta s_1 = 35$ km alla velocità media $\bar{v}_1 = 100$ km/h, poi rallenta rapidamente a $\bar{v}_2 = 80$ km/h e percorre altri $\Delta s_2 = 40$ km. Quanto tempo ha impiegato lungo il suo tragitto? Qual è la velocità media su tutto il tragitto?

Risposta. *Il tratto Δs_1 è stato percorso in un tempo $\Delta t_1 = \Delta s_1/\bar{v}_1 = 0.35$ h, mentre il tratto Δs_2 è stato percorso in un tempo $\Delta t_2 = \Delta s_2/\bar{v}_2 = 0.5$ h. Dunque il tempo totale è $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 0.85$ h. La lunghezza di tutto il tragitto è $\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 = 75$ km, quindi la velocità media lungo tutto il tragitto è $\bar{v} = \Delta s/\Delta t = (75 \text{ km})/(0.85 \text{ h}) \simeq 88.2$ km/h.*

Come si vede nell'esempio, la velocità media su un tragitto non è uguale alle velocità medie calcolate su tratti più brevi del tragitto stesso. In effetti la ragione è che il moto dell'oggetto è cambiato lungo il tragitto. Nell'esempio,

l'automobile ha rallentato. I dati del problema consentono solo di dire che l'automobile era più veloce sul tratto Δs_1 e più lenta sul tratto Δs_2, ma non sappiamo se su ciascuno dei due tratti abbia tenuto un'andatura regolare o abbia fatto accelerate o frenate. Per avere dettagli più precisi in merito occorrerebbe suddividere a loro volta i tratti Δs_1 e Δs_2 in tratti più brevi...

Riconsideriamo la Fig. 2.3: la velocità media dal punto (0) al punto (7) è ovviamente $\bar{v}_{0,7} = (s_7 - s_0)/(t_7 - t_0)$. D'altra parte, segmentando l'intervallo (0)–(7) in sottointervalli, cioè andando a considerare anche le posizioni intermedie (1),(2),...,(6), possiamo definire velocità medie "più localizzate", per esempio $\bar{v}_{0,1} = (s_1 - s_0)/(t_1 - t_0)$, $\bar{v}_{1,2} = (s_2 - s_1)/(t_2 - t_1)$, $\bar{v}_{2,3} = (s_3 - s_2)/(t_3 - t_2)$, etc. Ovviamente queste sono diverse fra loro. Nell'esempio in esame, gli intervalli di tempo sono tutti uguali: $(t_1 - t_0) = (t_2 - t_1) = (t_3 - t_2) = (t_4 - t_3) = \ldots$: per questa scelta, a velocità medie maggiori corrispondono spostamenti maggiori, e viceversa. Quindi per esempio $\bar{v}_{0,1} > \bar{v}_{1,2} > \bar{v}_{2,3} > \bar{v}_{3,4}$: queste velocità medie sono tutte positive, ma decrescono. Fra t_4 e t_5 l'oggetto praticamente non si è mosso, $s_4 = s_5$, quindi in questo caso la velocità media è nulla: $\bar{v}_{4,5} = 0$. Poi la coordinata prende a decrescere, sempre più rapidamente, quindi da t_5 in poi la velocità media diventa negativa, e sempre più piccola: $0 > \bar{v}_{5,6} > \bar{v}_{6,7} > \bar{v}_{7,8} > \bar{v}_{8,9}$. L'oggetto sta tornando indietro.

Che cosa succede in particolare fra t_4 e t_5? Dalle misure di posizione abbiamo $s_4 = s_5$, ma nei tempi intermedi? Se il nostro campionamento temporale fosse più fitto, forse potremmo vedere che dopo t_4 l'oggetto avanza ancora un po', poi si arresta un istante e poi comincia a indietreggiare prima di t_5?

2.4 Velocità istantanea

Volendo avere una descrizione ancora più dettagliata occorrerebbe suddividere il percorso in intervalli temporali ancora più piccoli: idealmente vorremmo che essi diventassero *infinitamente piccoli*! Questo è ciò che in analisi matematica si chiama *passaggio al limite*: nel nostro caso il limite è per $\Delta t \to 0$. La velocità *media* è una proprietà dell'intervallo di tempo Δt in cui la si misura, ma se $\Delta t \to 0$ gli estremi dell'intervallo tendono a coincidere, e l'intervallo si riduce di fatto ad un istante. Pertanto, in questo limite, la velocità si chiama *velocità istantanea*:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \tag{2.4}$$

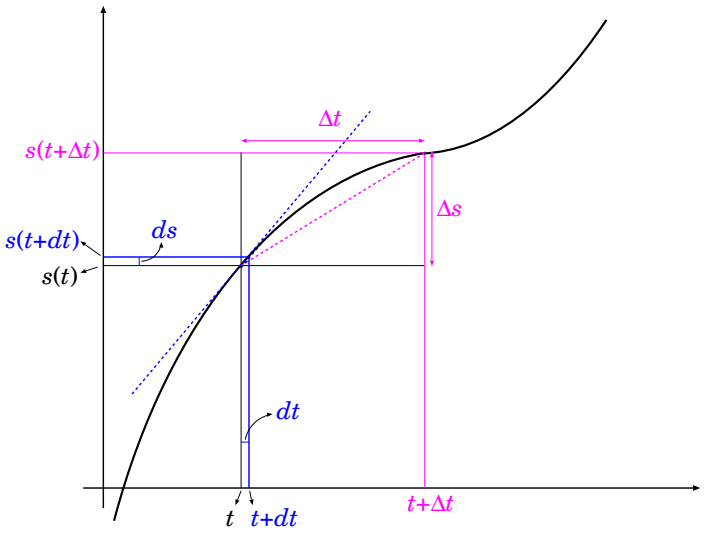


Figura 2.4: *Calcolo della velocità media* $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ *e della velocità istantanea* $v = \dfrac{ds}{dt}$ *di un oggetto che si muove con una legge oraria* $s(t)$*. La velocità media può essere visualizzata come il coefficiente angolare della* corda *che collega i punti* $(t; s(t))$ *e* $(t + \Delta t; s(t + \Delta t))$*, e pertanto vale* $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$*. La velocità istantanea invece è il coefficiente angolare della* tangente *alla curva nel punto* $(t; s(t))$*, e vale* $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$*.*

Le quantità ds, dt indicano variazioni infinitesime di posizione e di tempo, rispettivamente: è consuetudine, nella condizione di limite, sostituire la notazione Δ con la d. In analisi matematica, $\Delta s/\Delta t$ si chiama *rapporto incrementale*. Il suo limite per $\Delta t \to 0$, ds/dt, si chiama *derivata* della funzione $s(t)$ rispetto alla variabile t.

Il passaggio al limite si può rappresentare graficamente come nella Fig. 2.4: data la legge oraria $s(t)$, la velocità istantanea può essere visualizzata come il coefficiente angolare della retta tangente alla curva del moto. A meno che il grafico di $s(t)$ non sia una linea retta, la tangente modifica la sua pendenza da un punto all'altro, perciò la velocità in generale cambia: essa stessa è funzione del tempo. Quindi l'Eq. (2.4) va riscritta più precisamente come:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds(t)}{dt} \tag{2.5}$$

D'ora in poi, ogni volta che si parlerà di velocità si intenderà quella

istantanea, a meno che non sia altrimenti specificato.

2.4.1 Spostamento come integrale della velocità istantanea

Le Eq. (2.3) e Eq. (2.5) consentono di calcolare la velocità — rispettivamente media e istantanea — di un oggetto quando sia nota la sua legge oraria $s = s(t)$. Il procedimento si può anche invertire, ovvero si può ricavare uno spostamento Δs che avviene in un intervallo di tempo $[t; t + \Delta t]$ se è nota la velocità in funzione del tempo, $v(t)$.

Con riferimento alla Fig. 2.3, consideriamo dapprima le velocità medie $\bar{v}_{0,1}, \bar{v}_{1,2}, \bar{v}_{2,3}, \ldots, \bar{v}_{n-1,n}$. Ovviamente

$$\begin{aligned} \Delta s = s_n - s_0 &= (\bar{v}_{0,1} \cdot \Delta t_{0,1}) + (\bar{v}_{1,2} \cdot \Delta t_{1,2}) + \cdots + (\bar{v}_{n-1,n} \cdot \Delta t_{n-1,n}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_{i-1,i} \cdot \Delta t_{i-1,i} \end{aligned}$$

Anche qui possiamo immaginare di dividere l'intervallo di tempo $[t; t + \Delta t]$ in un numero sempre maggiore di intervallini sempre più piccoli. Occorre dunque considerare il passaggio al limite, per $\Delta t \to 0$: le quantità $\bar{v} \cdot \Delta t$ diventano infinitesime, e il numero di addendi nella somma $\sum_{i=1}^{n}$ tende all'infinito. Questa operazione, in analisi matematica, si chiama *integrale*, e si scrive in questa forma:

$$\Delta s = s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt \tag{2.6}$$

e si legge "lo spostamento Δs è pari all'integrale nel tempo della velocità istantanea".

Si può rappresentare graficamente questo concetto come in Fig. 2.5.

2.5 Accelerazione

Come si è visto, in generale la velocità cambia durante il moto, quindi può essere espressa come funzione del tempo: $v = v(t)$. Pertanto è utile definire una quantità che esprime quanto rapidamente cambia la velocità: essa è l'accelerazione:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} \tag{2.7}$$

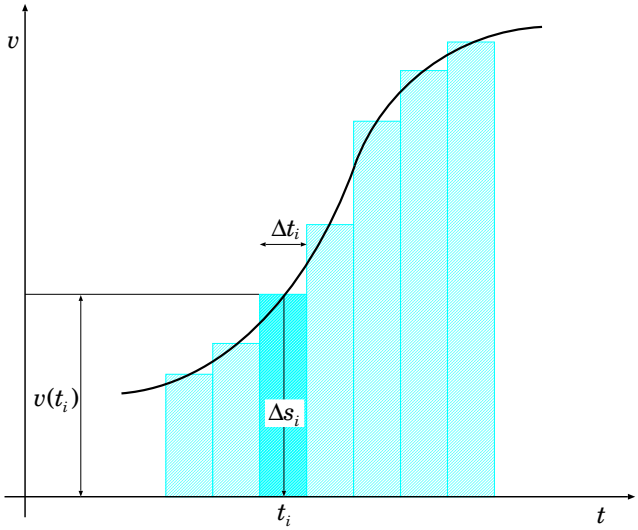


Figura 2.5: *Calcolo dello spostamento come integrale della velocità. Si considerano molti piccoli intervallini Δt_i, in ciascuno dei quali si assume che la velocità istantanea v_i sia praticamente uguale alla velocità media $\bar{v}_i$. Questa approssimazione permette di scrivere lo spostamento nel tempo Δt_i come $\Delta s_i = \bar{v}_i \cdot \Delta t_i \simeq v_i \cdot \Delta t_i$.*

L'accelerazione è dunque il rapporto fra la variazione di velocità Δv ed il tempo Δt in cui essa ha luogo, nel limite di $\Delta t \to 0$. In altre parole, *l'accelerazione è la derivata della velocità rispetto al tempo.*

Il formalismo è del tutto analogo a quello introdotto per definire la velocità. Pertanto, senza ulteriori discussioni, possiamo affermare che la variazione di velocità da un istante t_1 ad un istante t_2 può essere calcolata se si conosce l'accelerazione in funzione del tempo, $a = a(t)$:

$$\Delta v = v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\, dt \tag{2.8}$$

Poiché la velocità, a sua volta, è derivata della posizione rispetto al tempo, possiamo anche scrivere:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{ds(t)}{dt}\right] = \frac{d^2 s(t)}{dt^2}$$

L'accelerazione è la derivata della derivata della posizione rispetto al tempo: *l'accelerazione è la derivata seconda della posizione rispetto al tempo.*

2.6 Unità di misura

Le distanze e gli spostamenti si misurano in metri (m). A seconda del contesto si fa uso di multipli o sottomultipli del metro (1 cm=0.01 m ; 1 mm=0.001 m ; 1 km=1000 m ; etc...). Analogamente, il tempo si misura in secondi (s), oppure in altre unità più comode a seconda delle situazioni (1 min=60 s ;1 h=60 min=3600 s).

In fisica si fa uso specialmente del *Sistema Internazionale* (SI) di unità di misura, cui molti Paesi del mondo hanno aderito — un'importante eccezione è costituita dai Paesi anglosassoni: too bad for them! Nel SI le unità di misura per le grandezze cinematiche finora introdotte sono riassunte nella seguente tabella:

grandezza fisica	unità di misura	
	simbolo	nome
distanza, spostamento	m	metro
tempo	s	secondo
velocità	m/s	metri al secondo
accelerazione	m/s^2	metri al secondo quadrato

Nella vita quotidiana, spesso le velocità sono espresse in *chilometri all'ora*, km/h. Pertanto ricaviamo una volta per tutte la conversione fra *metri al secondo* e *chilometri all'ora*. Poiché 1 h = 3600 s e 1 km = 1000 m, otteniamo che 1 km/h $= \dfrac{1000\text{ m}}{3600\text{ s}} = \dfrac{1}{3.6}$ m/s, ovvero:

$$1\text{ m/s} = 3.6\text{ km/h} \tag{2.9}$$

2.7 Moto uniforme

Un caso molto particolare, e facile da trattare, è il moto uniforme, definito come moto a velocità costante

$$v \text{ costante} \qquad \text{(moto uniforme)} \tag{2.10}$$

Essendo $a = \dfrac{dv}{dt}$, segue ovviamente che

$$a = 0 \qquad \text{(moto uniforme)} \tag{2.11}$$

Il calcolo dello spostamento, Eq. (2.6), diventa ora ovvio: $\Delta s = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v\,dt = v, \int_{t_1}^{t_2} dt = v(t_2 - t_1)$, ovvero

$$\Delta s = v\,\Delta t \qquad \text{(moto uniforme)} \tag{2.12}$$

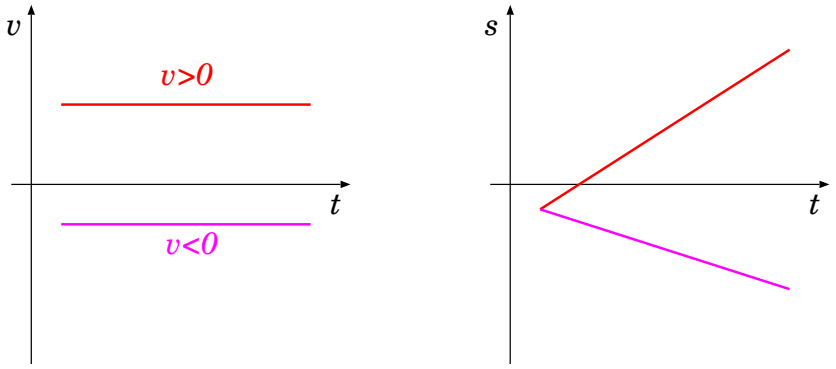


Figura 2.6: *Grafici temporali del moto uniforme: a sinistra, la velocità (due casi: in rosso $v > 0$, in violetto $v < 0$); a destra, l'andamento di $s(t)$, per i casi $v > 0$ e $v < 0$, assumendo la stessa condizione iniziale $s(t_0)$.*

Graficamente, velocità e posizione evolvono nel tempo come indicato in Fig. 2.6.

Incidentalmente, come conseguenza la velocità media coincide con quella istantanea:

$$\bar{v} = v \qquad \text{(moto uniforme)} \tag{2.13}$$

2.8 Moto uniformemente accelerato

Un altro caso notevole è il moto uniformemente accelerato, definito come moto con accelerazione costante

$$\begin{gathered} a \text{ costante} \\ \text{(moto uniformemente accelerato)} \end{gathered} \tag{2.14}$$

Il calcolo della velocità si esegue facilmente partendo dall'Eq. (2.8):

$$v(t_2) \;=\; v(t_1) \;+\; \int_{t_1}^{t_2} a\,dt \;=\; v(t_1) \;+\; a\,\Delta t$$

che può essere scritto, per t generico, come:

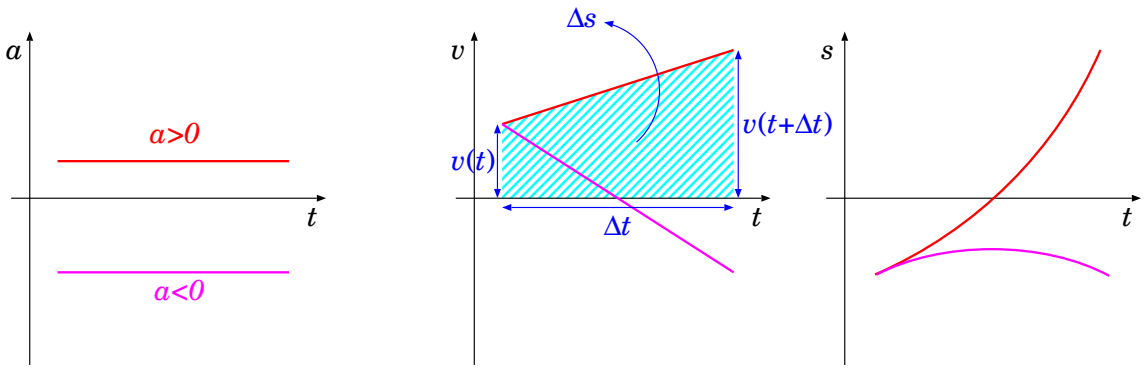


Figura 2.7: *Grafici temporali del moto uniformemente accelerato: a sinistra, l'accelerazione (due casi: in rosso $a > 0$, in violetto $a < 0$); al centro, andamento di $v(t)$, per i due casi $a > 0$ e $a < 0$, assumendo la stessa velocità iniziale $v(t_0)$; a destra, $s(t)$, sempre nei due casi, assumendo le stesse condizioni iniziali $s(t_0)$, $v(t_0)$. L'area tratteggiata nella figura centrale è la rappresentazione grafica dell'integrale $\int_t^{t+\Delta t} v(t)\,dt$, usata per calcolare lo spostamento Δs.*

$$v(t+\Delta t) \;=\; v(t) \;+\; a\,\Delta t \tag{2.15}$$

(moto uniformemente accelerato)

Il grafico di a e $v(t)$ in funzione del tempo t sono mostrati in Fig. 2.7 (sinistra e centro).

Il calcolo dello spostamento — Eq. (2.6) — può essere eseguito servendosi della rappresentazione grafica dell'integrale, Fig. 2.5. In particolare, l'area sottesa dalla curva $v(t)$ è un trapezio rettangolo, come evidenziato in Fig. 2.7 (centro), la cui area è

$$\Delta s \;=\; \frac{v(t_0)+v(t_0+\Delta t)}{2}\Delta t \;=\; \frac{v(t_0)+[v(t_0)+a\Delta t]}{2}\Delta t$$

ovvero:

$$\Delta s \;=\; v(t_0)\,\Delta t + \frac{a}{2}(\Delta t)^2 \tag{2.16}$$

(moto uniformemente accelerato)

La dipendenza di Δs da $(\Delta t)^2$ significa che il grafico di $s(t)$ è parabolico:

$$s(t) = s_0 + v(t_0)\,(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2 \qquad (2.17)$$

(moto uniformemente accelerato)

come mostrato in Fig. 2.7 (destra)

2.9 Esercizi di cinematica unidimensionale

Negli esercizi che seguono si farà abbondante uso di derivate e integrali. Può essere utile consultare le regole di derivazione e integrazione e i casi notevoli che sono riassunti in Sezione 3.3.

Esercizio 2.1. *Un'automobile viaggia alla velocità di* 130 km/h. *Calcolare la sua velocità in unità di misura SI.*

Risposta *:* $v = 130 \text{ km/h} = 130 \cdot \frac{1}{3.6} \text{ m/s} = 36.11 \text{ m/s}$

Esercizio 2.2. *Un oggetto, lanciato su un tavolo orizzontale con velocità iniziale* $v_0 = 2$ m/s, *rallenta fino a fermarsi dopo 3 secondi; durante il moto ha seguito una legge oraria*

$$s(t) = v_0 t - \alpha t^2$$

Scrivere l'evoluzione temporale della velocità e dell'accelerazione. Calcolare α. *Quanto spazio è stato percorso in tutto?*

Risposta. *La velocità si ottiene derivando la posizione rispetto al tempo:*

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_0 t - \alpha t^2\right) = v_0 - 2\alpha t$$

Derivando la velocità rispetto al tempo si ottiene l'accelerazione:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_0 - 2\alpha t\right) = -2\alpha$$

Sappiamo che a $t_1 = 3$ s *l'oggetto si è arrestato: quindi* $0 = v(t = 3 \text{ s}_1) = v_0 - 2\alpha t_1$, *ovvero* $\alpha = \frac{v_0}{2t_1} = 0.3333 \text{ m/s}^2$. *L'accelerazione è costante e negativa (cioè è una decelerazione):* $a = -2\alpha = -0.6667 \text{ m/s}^2$. *Lo spazio totale percorso è*

$$\Delta s = s(t_1) - s(0) = v_0 t_1 - \alpha t_1^2 = (2 \text{ m/s})(3 \text{ s}) - (0.3333 \text{ m/s}^2)(3 \text{ s})^2 = 3 \text{ m}$$

Esercizio 2.3. *Un'automobile che viaggia sull'autostrada, all'istante $t = 0$ si trova al chilometro 286 con velocità $v_0 = 60$ km/h, quando comincia ad accelerare, con un'accelerazione $a(t) = \alpha\left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right)$, per $\Delta t = 5$ s, fino a raggiungere una nuova velocità $v_1 = 80$ km/h. Ricavare come la velocità $v(t)$ e la posizione $s(t)$ evolvono nel tempo. Calcolare α e la nuova posizione s_1 raggiunta nel tempo Δt.*

Risposta. *Anzitutto convertiamo tutti i dati in unità S.I.:* $s_0 = 286\,000$ m; $v_0 = 16.67$ m/s; $v_1 = 22.22$ m/s.

La velocità si ottiene integrando l'accelerazione nel tempo, e tenendo conto della condizione iniziale v_0:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + \int_0^t dt' a(t') = v_0 + \int_0^t dt'\, \alpha\left(1 - \frac{t'}{\Delta t}\right) = v_0 + \alpha t - \frac{\alpha}{\Delta t}\left[\frac{(t')^2}{2}\right]_0^t \\ &= v_0 + \alpha\left(t - \frac{t^2}{2\Delta t}\right) \end{aligned}$$

Dopo un tempo Δt, $t = t_1 = \Delta t = 5$ s. Per avere $v(t_1) = v_1$ deve essere $v_1 - v_0 = \alpha\frac{\Delta t}{2}$, quindi $\alpha = 2\frac{v_1 - v_0}{\Delta t} = 2.222$ m/s^2.

La posizione si ottiene integrando la velocità nel tempo, e tenendo conto della condizione iniziale s_0:

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + \int_0^t dt' v(t') = s_0 + \int_0^t dt'\left(v_0 + \alpha\left(t - \frac{t^2}{2\Delta t}\right)\right) \\ &= s_0 + \left[v_0 t' + \alpha\left(\frac{(t')^2}{2} - \frac{(t')^3}{6\Delta t}\right)\right]_0^t \\ &= s_0 + v_0 t + \alpha\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6\Delta t}\right) \end{aligned}$$

Per calcolare $s_1 = s(t_1)$, o introduciamo "brute force" tutti i dati nell'equazione per $s(t)$, oppure — visto che in questo caso possiamo — cerchiamo di semplificare un po' la formula, tenendo presente che $t_1 = \Delta t$ e $\alpha = 2\frac{v_1 - v_0}{\Delta t}$. Quindi $s_1 - s_0 = v_0\Delta t + \frac{2}{3}(v_1 - v_0)\Delta t = (5\text{ s})\left(16.67\text{ m/s} + \frac{2}{3}(22.22 - 16.67)\text{ m/s}\right) = 101.9$ m; $s_1 = 286\,102$ m.

Esercizio 2.4. *Un oggetto cade verso terra con una velocità che varia nel tempo, secondo la legge:*

$$v(t) = \frac{g}{\alpha}\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}\right)$$

essendo $g = 9.806$ m/s^2 l'accelerazione che la gravità imprime a qualunque oggetto che cade, e α un parametro che descrive il frenamento dovuto all'aria.

Si determini α sapendo che la velocità massima raggiunta dall'oggetto è $v_{max} = 10$ m/s. Si scriva la legge oraria del moto $s = s(t)$, supponendo che a $t = 0$

sia $s = 0$, e l'andamento dell'accelerazione nel tempo, $a = a(t)$. Si calcolino l'accelerazione, la velocità istantanea e la distanza percorsa dopo 2 s.

Risposta. *Dall'equazione per $v(t)$ si nota che per $t \to +\infty$ $\mathrm{e}^{-\alpha t} \to 0$, quindi $v(t) \to \dfrac{g}{\alpha} \equiv v_{max}$. Si deduce che $\alpha = \dfrac{g}{v_{max}} = 0.9806\ \mathrm{s}^{-1}$.*

La legge oraria si ottiene integrando la velocità nel tempo. Definiamo l'origine della coordinata nel luogo dove l'oggetto si trova a $t = 0$. Allora

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t dt'\, v(t') = \frac{g}{\alpha}\left(\int_0^t dt' - \int_0^t dt' \mathrm{e}^{-\alpha t'}\right) \\ &= \frac{g}{\alpha}\left(t - \left[-\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t'}}{\alpha}\right]_0^t\right) = \frac{g}{\alpha}\left(t + \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t} - 1}{\alpha}\right) \\ &= v_{max}\left(t + \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t} - 1}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

Invece, l'accelerazione si ottiene derivando la velocità rispetto al tempo:

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{g}{\alpha}\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}\right)\right] \\ &= \frac{g}{\alpha}\frac{d}{dt}\left[-\mathrm{e}^{-\alpha t}\right] = \frac{g}{\alpha} \cdot \alpha \mathrm{e}^{-\alpha t} \\ &= g\mathrm{e}^{-\alpha t} \end{aligned}$$

Per $t = 2$ s si trova $\mathrm{e}^{-\alpha t} = \mathrm{e}^{-1.9612} = 0.1407$, quindi:

$$\begin{aligned} a(t = 2\ \mathrm{s}) &= g\mathrm{e}^{-\alpha t} = (9.806\ \mathrm{m/s^2}) \cdot 0.1407 = 1.380\ \mathrm{m/s^2} \\ v(t = 2\ \mathrm{s}) &= v_{max}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}) = (10\ \mathrm{m/s})(1 - 0.1407) = 8.593\ \mathrm{m/s} \\ s(t = 2\ \mathrm{s}) &= v_{max}\left(t + \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t} - 1}{\alpha}\right) = (10\ \mathrm{m/s})\left(2\ \mathrm{s} + \frac{0.1407 - 1}{0.9806\ \mathrm{s}^{-1}}\right) = 12.24\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

Esercizio 2.5. *Un'automobile che viaggia alla velocità di* 100 km/h *inizia a frenare gradualmente, fino a fermarsi. La frenata dura per 10 secondi, durante i quali la velocità segnata dal tachimetro cala in modo regolare, indicando una decelerazione costante. Quanto vale l'accelerazione? Quanto spazio percorre l'auto durante la frenata? Qual è la velocità media dell'auto durante tutta la frenata?*

Risposta. *Anzitutto convertiamo la velocità iniziale in unità SI: $v_0 = 100\ \mathrm{km/h} = \dfrac{100}{3.6}\ \mathrm{m/s} = 27.78\ \mathrm{m/s}$.*

Il moto è caratterizzato da un'accelerazione costante a — che dovrà risultare negativa, trattandosi di una decelerazione.

La legge oraria della velocità deve essere tale che $\dfrac{dv}{dt} \equiv a$ sia costante, quindi deve essere della forma $v(t) = v_0 + at$. A $t_1 = 10$ s l'auto si ferma, quindi deve essere $v(t_1) = v_0 + at_1 = 0$, da cui $a = -\dfrac{v_0}{t_1} = -2.778\ \mathrm{m/s^2}$ — negativa, come aspettato.

Lo spazio percorso si ottiene integrando la velocità nel tempo: $\Delta s = \int_0^{t_1} v(t)dt = \int_0^{t_1} (v_0 + at)\, dt = \left[v_0 t + \frac{at^2}{2}\right]_{t=0}^{t=t_1} = v_0 t_1 + \frac{a}{2}t_1^2$ *Inserendo i dati numerici,* $\Delta s = (27.78 \text{ m/s})(10 \text{ s}) + \frac{-2.778 \text{ m/s}^2}{2}(10 \text{ s})^2 = 139 \text{ m}$.

La velocità media durante la frenata è $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{t_1 - 0} = 13.9 \text{ m/s}$.

2.10 Riassunto dei concetti sul moto lungo una linea

In sintesi, la posizione di un oggetto lungo una linea orientata può essere descritta con una singola *coordinata* s rispetto ad un punto di riferimento, che avrà per definizione $s = 0$. La coordinata è positiva se per raggiungere il punto dall'origine si deve seguire l'orientamento della linea; in caso contrario la coordinata è negativa.

La distanza fra due posizioni (1) e (2), definite dalle coordinate s_1 e s_2, è definita come $\Delta s = s_2 - s_1$. Si noti che in generale la linea è orientata, vale a dire che ha senso scrivere $s_1 < s_2$ o viceversa. Pertanto Δs può essere positivo o negativo.

Il moto di un oggetto lungo la linea è completamente descritto dalla *legge oraria*, espressa come funzione $s(t)$. Essa, una volta nota, consente di calcolare la posizione s dell'oggetto ad un qualunque istante t.

La *velocità* di moto dell'oggetto è definita come il rapporto fra uno spostamento Δs ed il tempo Δt impiegato ad effettuarlo, nel limite $\Delta t \to 0$:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

La *accelerazione* dell'oggetto è definita come il rapporto fra la variazione di velocità Δv ed il tempo Δt impiegato ad effettuarlo, nel limite $\Delta t \to 0$:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Lo spostamento Δs a sua volta è ottenibile come integrale della velocità:

$$\Delta s = s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$$

e la variazione di velocità è calcolabile come integrale dell'accelerazione:

$$\Delta v = v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\, dt$$

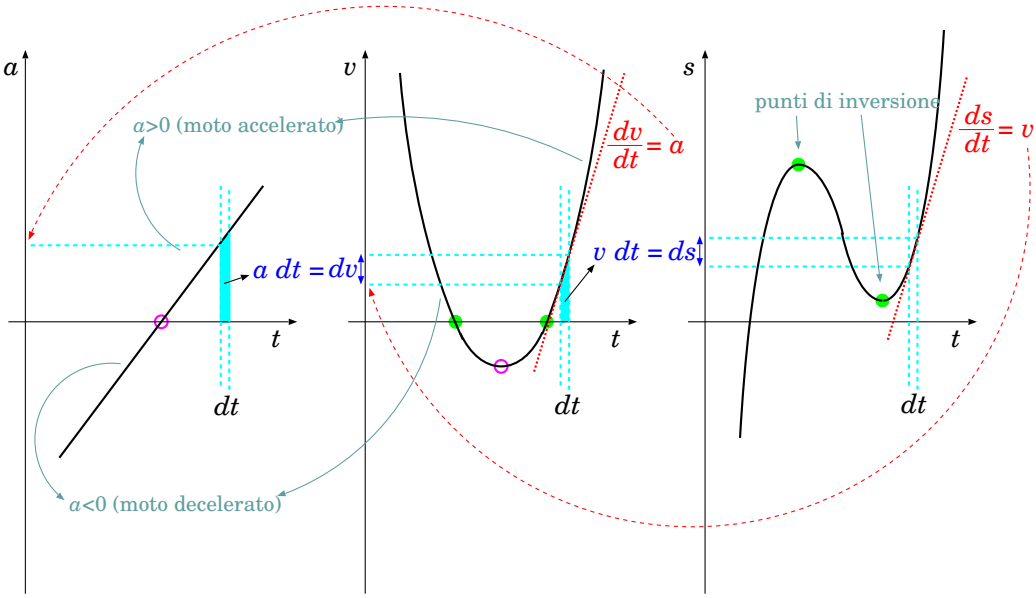


Figura 2.8: *Rappresentazione grafica dell'evoluzione nel tempo di una accelerazione a, una velocità v e una posizione s. In un tempo brevissimo dt, la velocità varia di $dv = a\,dt$ e la posizione di $ds = v\,dt$.*

Come si vede sin da qui, le operazioni di derivazione e integrazione di una funzione ricoprono un ruolo imprescindibile nella fisica. Per questo motivo le principali regole vengono riportate nel Capitolo 3.

Per offrire un punto di vista diverso, possiamo rivedere queste definizioni da un punto di vista grafico. La situazione è illustrata in Fig. 2.8.

In un tempo infinitesimo dt la variazione di velocità è $dv = a\,dt$; nello stesso tempo la variazione di posizione è $ds = v\,dt$. Entrambe queste espressioni sono rappresentate dall'area del trapezoide di larghezza dt e altezza rispettivamente a e v.

Viceversa, la velocità si può ricavare come $v = \dfrac{ds}{dt}$ e l'accelerazione come $a = \dfrac{dv}{dt}$. La rappresentazione grafica di queste espressioni corrisponde alle pendenze ($\equiv$ coefficienti angolari) delle rette tangenti rispettivamente al grafico $(t; s)$ e $(t; v)$.

In figura sono anche indicati i "punti di inversione" (in verde), in cui si inverte il moto: inizialmente s cresce col tempo, poi inizia a diminuire, poi torna a crescere. A queste tre fasi corrispondono diversi segni della velocità: prima positiva, poi negativa, poi di nuovo positiva. Nei punti di inversione la velocità è istantaneamente nulla.

Infine è anche indicato (in fucsia) un istante in cui l'accelerazione è nulla: questo corrisponde ad un punto di stazionarietà nel grafico $(t; v)$, come se la velocità fosse "temporaneamente costante".

Un esempio semplice

Consideriamo un'auto che parte da ferma, accelera uniformemente fino a 108 km/h *per* 20 s, *quindi prosegue a velocità costante per* 2 min, *infine decelera uniformemente fino a fermarsi in* 10 s. *Chiamando* (1), (2), (3) *i 3 tratti di percorso, vogliamo determinare i valori delle accelerazioni* a_1, a_2, a_3 *e gli spostamenti percorsi* Δs_1, Δs_2, Δs_3 *in ciascuno dei tratti, per via analitica e per via grafica.*

Approccio analitico

Occorre prima di tutto scrivere la legge oraria della velocità. Introduciamo i 3 intervalli di tempo corrispondenti ai 3 tratti, e i rispettivi istanti iniziale e finale di ciascun tratto:

$$\begin{array}{r|ll} & t_0 = 0 & \textit{(per convenzione)} \\ \Delta t_1 = 20 \text{ s} & t_1 = t_0 + \Delta t_1 = 20 \text{ s} & \\ \Delta t_2 = 120 \text{ s} & t_2 = t_1 + \Delta t_2 = 140 \text{ s} & \\ \Delta t_3 = 10 \text{ s} & t_3 = t_2 + \Delta t_3 = 150 \text{ s} & \end{array}$$

Nel 1° e nel 3° tratto, l'accelerazione è costante, pertanto la velocità deve avere una dipendenza lineare dal tempo, qualcosa del tipo $v(t) = v_{in} + a(t - t_{in})$, *essendo* t_{in}, v_{in} *relativi all'istante iniziale dell'intervallo considerato. Nel 1° tratto l'accelerazione sarà positiva, nel 3° sarà negativa. Nel 2° tratto l'accelerazione sarà nulla e la velocità costante, pari a* $v_{max} = 108$ km/h $= 30$ m/s. *La legge oraria sarà dunque:*

$$v(t) = \begin{cases} a_1\, t & \textit{(per } 0 \le t \le t_1\textit{)} \\ v_{max} & \textit{(per } t_1 \le t \le t_2\textit{)} \\ v_{max} + a_3\,(t - t_2) & \textit{(per } t_2 \le t \le t_3\textit{)} \end{cases}$$

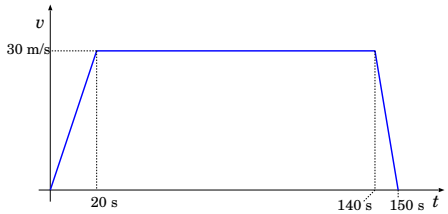
L'accelerazione a_1 *si può ricavare imponendo che* $v(t)$ *sia continua in* $t = t_1$: $a_1 t_1 = v_{max}$, *ovvero* $a_1 = \dfrac{v_{max}}{t_1} = 1.5$ m/s^2. *Analogamente,* a_3 *si ricava imponendo che* $v(t_3) = 0$, *quindi* $v_{max} + a_e(t_3 - t_2) = 0$, *cioè* $a_3 = -\dfrac{v_{max}}{t_3 - t_2} = -3$ m/s^2 — *negativa, come aspettato.*

Per la distanza percorsa in ciascun intervallo si usa la formula del moto uniformemente accelerato: $\Delta s = v_{in}\Delta t + \dfrac{a}{2}(\Delta t)^2$. *Quindi:*

$$\begin{array}{rclcll} \Delta s_1 & = & \dfrac{a_1}{2}(\Delta t_1)^2 & = & 300 \text{ m} & \textit{(moto uniformemente accelerato)} \\ \Delta s_2 & = & v_{max}\Delta t_2 & = & 3600 \text{ m} & \textit{(moto uniforme)} \\ \Delta s_3 & = & v_{max}\Delta t_3 + \dfrac{a_3}{2}(\Delta t_3)^2 & = & 150 \text{ m} & \textit{(moto uniformemente accelerato)} \end{array}$$

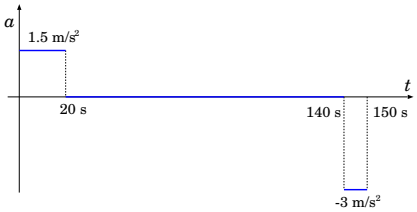
Approccio grafico

Cominciamo a disegnare quello che sappiamo dalla formulazione del problema:



la velocità cresce linearmente nel 1° tratto, è costante nel 2° tratto, e decresce linearmente fino ad annullarsi nel 3° tratto.

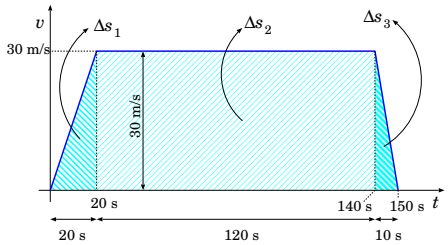
L'accelerazione è pari al coefficiente angolare della retta che rappresenta la velocità nel grafico precedente:



$$a_1 = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{30 \text{ m/s}}{20 \text{ s}} = 1.5 \text{ m/s}^2$$

$$a_3 = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2} = \frac{-30 \text{ m/s}}{10 \text{ s}} = -3 \text{ m/s}^2$$

La distanza percorsa in ciascun tratto è data dall'area sottesa dal grafico della velocità. Trattandosi di 2 triangoli e 1 rettangolo il risultato è semplice:

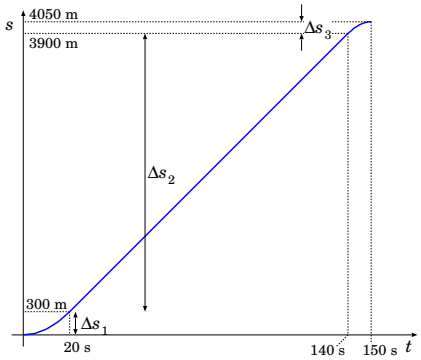


$$\Delta s_1 = \frac{v_{max}\,\Delta t_1}{2} = \frac{(30 \text{ m/s})(20 \text{ s})}{2} = 300 \text{ m}$$

$$\Delta s_2 = v_{max}\,\Delta t_2 = (30 \text{ m/s})(120 \text{ s}) = 3600 \text{ m}$$

$$\Delta s_3 = \frac{v_{max}\,\Delta t_3}{2} = \frac{(30 \text{ m/s})(10 \text{ s})}{2} = 150 \text{ m}$$

Il grafico della legge oraria si ottiene considerando che:



1° tratto: *parabola con concavità verso l'alto con tangente orizzontale in $t = 0$*

2° tratto: *retta che si raccorda con la parabola*

3° tratto: *parabola con concavità verso il basso che si raccorda con la retta e con tangente orizzontale in $t = t_3$*

Achille e la tartaruga

Achille "pié veloce" era un ottimo corridore, mentre la tartaruga è proverbiale per la sua progressione lenta e inarrestabile... Un famoso paradosso (di Zenone da Elea, V sec a.C.) sosteneva che Achille non sarebbe mai stato in grado

di raggiungere in gara una tartaruga, che partisse con un piccolo vantaggio. Ovviamente il suo ragionamento era sbagliato (Zenone, ma se eri inseguito da un leone affamato ti salvavi???), però prendiamo a pretesto questo esempio per vedere come va trattato, e poi "debunkiamo" il ragionamento di Zenone.

Impostiamo il problema in maniera quantitativa. Achille corre a una velocità $v_A = 10$ m/s, *la tartaruga cammina a velocità* $v_T = 15$ cm/s. *All'istante* $t = 0$, *Achille parte dalla linea di partenza,* $s_A(0) = 0$, *mentre la tartaruga ha un vantaggio, per esempio* $s_T(0) = 50$ m. *Vediamo (se) quando e dove Achille raggiunge la tartaruga.*

Soluzione. *Entrambi si muovono di moto uniforme, quindi le loro leggi orarie sono:*

$$s_A(t) = v_A t \qquad ; \qquad s_T(t) = s_T(0) + v_T t$$

Se esiste un istante t *in cui Achille raggiunge la tartaruga, deve essere* $s_A(t) = s_T(t)$. *Quindi deve essere* $v_A t = s_T(0) + v_T t$, *ovvero* $(v_A - v_T)t = s_T(0)$. *La cui soluzione esiste, ed è*

$$t = \frac{s_T(0)}{v_A - v_T}$$

Numericamente ($v_T = 0.15$ m/s) *si trova* $t = 5.076$ s. *In questo tempo Achille ha percorso* $s_A(t) = 50.76$ m *e la tartaruga* $s_T(t) - s_T(0) = 0.76$ m $= 76$ cm.

Ragionamento di Zenone, e critica ad esso. *Il ragionamento di Zenone — con linguaggio moderno — si formula così:*

- *Achille, appena partito, impiegherà un certo tempo* Δt_1 *a raggiungere la posizione* $s_T(0)$, *dove la tartaruga si trovava, ma in questo stesso tempo essa è avanzata in* $s_T(t_1)$, *con* $t_1 = 0 + \Delta t_1$.

- *Allora Achille deve impiegare un tempo ulteriore* Δt_2 *per percorrere l'ulteriore distanza* $s_T(t_1) - s_T(0)$ *— ma intanto la tartaruga è avanzata in* $s_T(t_2)$, *con* $t_2 = t_1 + \Delta t_2$.

- *... e così via... Quindi il tempo passa,* $t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \Delta t_4 + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} \Delta t_k$, *e Achille non raggiunge mai la tartaruga*

DOVE sbaglia Zenone? L'approccio di per sé è giusto. La conclusione quantitativa invece è sbagliata. Vediamo perché.

- *Anzitutto* $\Delta t_1 = \dfrac{s_T(0)}{v_A}$;

- *poi* $s_T(t_1) - s_T(0) = v_T \Delta t_1$ *e quindi* $\Delta t_2 = \dfrac{s_T(t_1) - s_T(0)}{v_A} = \dfrac{v_T}{v_A}\Delta t_1$;

- *poi* $s_T(t_2) - s_T(t_1) = v_T \Delta t_2$ *e quindi* $\Delta t_3 = \dfrac{s_T(t_2) - s_T(t_1)}{v_A} = \dfrac{v_T}{v_A}\Delta t_2$ ...

- *Generalizzando, se in un certo tempo* Δt_k *la tartaruga percorre una distanza* $s_T(t_k) - s_T(t_{k-1}) = v_T \Delta t_k$*, Achille dovrà recuperarla in un tempo*

$$\Delta t_{k+1} = \frac{s_T(t_k) - s_T(t_{k-1})}{v_A} = \frac{v_T}{v_A}\Delta t_k$$

- *A questo punto è facile vedere quanto vale ciascun* Δt_k*:*

$$\Delta t_k \;=\; \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^{k-1} \cdot \Delta t_1 \;=\; \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^{k-1} \cdot \frac{s_T(0)}{v_A}$$

- *Il tempo totale impiegato da Achille è quindi*

$$t \;=\; \sum_{k=1}^{+\infty} \Delta t_k \;=\; \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^{k-1}\right] \cdot \frac{s_T(0)}{v_A} \;=\; \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^{k}\right] \cdot \frac{s_T(0)}{v_A}$$

Ora, la sommatoria infinita trovata ha un risultato che NON È INFINITO (e questo Zenone non lo sapeva... come nessuno, a quell'epoca).

In dettaglio: se chiamiamo $\xi = \dfrac{v_T}{v_A}$*, ovviamente* $0 < \xi < 1$ *e risulta* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \xi^k = \frac{1}{1-\xi}$ [2]*. Quindi si trova*

$$t \;=\; \frac{1}{1 - \dfrac{v_T}{v_A}} \cdot \frac{s_T(0)}{v_A} \;=\; \frac{s_T(0)}{v_A - v_T}$$

(come trovato precedentemente).

---

[2] Dimostrazione: se $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \xi^k$, ovviamente $S_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \xi^k = \xi(\sum_{k=0}^{n-1} \xi^k) + 1 = \xi\, S_n + 1$, poi:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \xi + \xi^2 + \cdots \xi^{n-1} \\ S_{n+1} - 1 &= \quad \xi + \xi^2 + \cdots \xi^{n-1} + \xi^n \end{aligned}$$

Sottraendo, $S_n - (S_{n+1} - 1) = 1 - \xi^n$, e siccome $S_{n+1} - 1 = \xi S_n$, si ricava $S_n = \dfrac{1-\xi^n}{1-\xi}$. Se $|\xi| < 1$ esiste il limite $n \to +\infty$ e vale

$$S_\infty = \sum_{k=0}^{+\infty} \xi^k = \frac{1}{1-\xi}$$

Capitolo 3

Derivazione e integrazione

Abbiamo visto nel Capitolo 2 che in fisica le derivate e gli integrali sono strumenti matematici fondamentali. Per esempio, la velocità è la derivata della posizione rispetto al tempo, e l'accelerazione è la derivata della velocità. Viceversa, lo spostamento si può scrivere come integrale della velocità nel tempo, e la variazione di velocità come integrale dell'accelerazione.

Vedremo molti altri casi in cui derivate e integrali saranno necessari.

Pertanto, riassumiamo qui le definizioni e le regole più utili — per una trattazione più completa si rimanda ai corsi e ai testi di analisi differenziale. È importante notare anche che in Fisica si usa una notazione spesso diversa da quella introdotta in analisi, come riprenderemo in questo capitolo.

3.1 Definizione di derivata

Anzitutto ricordiamo che, data una funzione $f \equiv f(t)$, si definisce la variazione:

$$\Delta f = f(t + \Delta t) - f(t)$$

e il *rapporto incrementale*

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Si definisce la *derivata* di f nel punto t il limite del rapporto incrementale $\frac{\Delta f}{\Delta t}$ per $\Delta t \to 0$:

$$\frac{df(t)}{dt} \equiv \frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{3.1}$$

Anche $\dfrac{df(t)}{dt}$ è una funzione di t, pertanto anche per essa si può definire una derivata. La *derivata seconda* è la derivata della funzione derivata:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \equiv \frac{d^2 f}{dt^2} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\left(\dfrac{df}{dt}\right)}{\Delta t} \tag{3.2}$$

In fisica, talvolta si usa una notazione compatta, con un punto sopra la funzione da derivare, specialmente quando la variabile t indica il *tempo*:

$$\dot{f}(t) \equiv \frac{df(t)}{dt} \quad ; \quad \ddot{f}(t) \equiv \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \tag{3.3}$$

3.1.1 Nota sulla simbologia delle derivate

Nei corsi di analisi matematica si suole indicare una funzione come $f \equiv f(x)$ e le sue derivate come $f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots$ La notazione usata in Fisica è spesso differente, e non per questioni ideologiche, ma pratiche.

Anzitutto, molti problemi fisici hanno a che fare con quantità che cambiano nel tempo, quindi la variabile indipendente non è più x, ma t. Potremmo chiamare le funzioni $f(t)$ e le loro derivate $f'(t),\ f''(t),\ \ldots$ quando questo non costituisca ambiguità. Tuttavia, tenderemo a privilegiare la scrittura

$$\frac{df}{dt} \quad , \quad \frac{d^2 f}{dt^2} \quad , \quad \frac{d^3 f}{dt^3} \quad , \quad \ldots$$

con molti vantaggi.

Intanto, ci ricorda che la derivata è (il limite di) un rapporto incrementale, per cui un passaggio del tipo

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad ds = v\,dt$$

è manifesto.

Inoltre, se f è una grandezza funzione di un'altra grandezza u, e quest'ultima dipende da t:

$$f \equiv f(u) \quad ; \quad u \equiv u(t)$$

la variazione di f in funzione di t avviene a causa della variazione di u; volendo calcolarla:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dt} \tag{3.4}$$

Questa "regola della catena" è esattamente la regola della funzione composta, che in matematica si scriverebbe $[f(u)]'(t) = f'(u(t)) \cdot u'(t)$.

In Fisica si ha spesso a che fare con molte variabili concomitanti, che possono influire sulla variazione di una grandezza. Provate a pensare alla pressione atmosferica, P. È noto che essa dipende dall'altitudine (che chiamiamo z), quindi potremmo scrivere $P(z)$. D'altra parte essa dipende anche dalla posizione geografica — abbiamo regioni di bassa e alta pressione — quindi dovremmo scrivere $P(x, y, z)$, intendendo che x, y sono le coordinate geografiche (per esempio longitudine e latitudine). Infine, tutto questo cambia nel tempo, quindi la nostra funzione pressione sarà $P(x, y, z, t)$. Volendo studiare le variazioni di pressione, usiamo la sua derivata. Ma se scriviamo $P'(x, y, z, t)$, come facciamo a capire se ne stiamo studiando la variazione con il tempo in un luogo e a una quota precisi, oppure la sua variazione con la quota in un luogo preciso, oppure ancora la sua variazione da un luogo all'altro?

L'unico modo è introdurre un simbolo di derivata che espliciti la variabile rispetto a cui si deriva.

3.2 Definizione di integrale

Si definisce *integrale* fra t_1 e t_2 di una funzione $f(t)$ il seguente limite [1]:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(t^{(k)}\right) \cdot \Delta t \\ &\text{dove} \begin{cases} \Delta t \equiv \dfrac{t_2 - t_1}{N} \\ t^{(k)} \equiv t_1 + \left(k + \frac{1}{2}\right) \Delta t \end{cases} \end{aligned} \tag{3.5}$$

L'idea geometrica di integrale è illustrata in Fig. 3.1. L'intervallo $[t_1; t_2]$ è suddiviso in N intervallini contigui, ciascuno di lunghezza Δt. In ciascuno di questi si calcola f nel punto medio, ovvero in $t^{(k)}$, e si considera l'area del rettangolino $f\left(t^{(k)}\right) \cdot \Delta t$. Quindi si sommano tutte le aree. L'integrale è il risultato che si ottiene facendo tendere $N \to \infty$ — e contemporaneamente

[1] In questa definizione, per semplicità, si è scelto di dividere l'intervallo $[t_1; t_2]$ in N intervallini tutti uguali, di lunghezza Δt; si può dare anche una definizione più generale, in cui gli intervallini hanno lunghezze $\Delta t^{(i)}$ diverse fra loro, purché tutte tendano a zero nel limite $N \to \infty$.

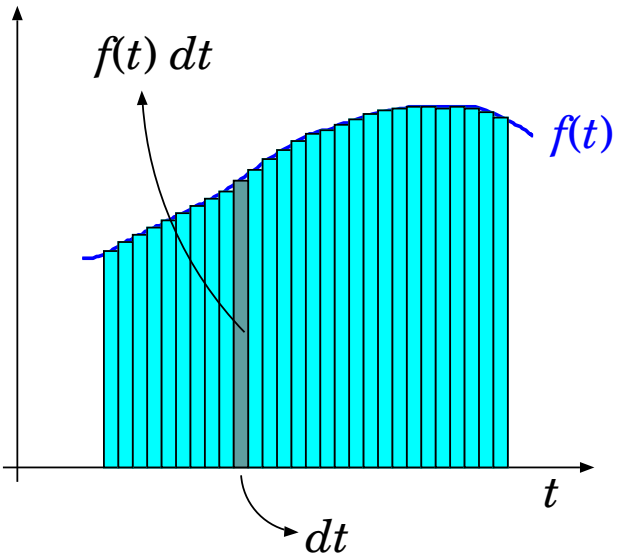


Figura 3.1: *Visualizzazione geometrica di* $\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$*: l'integrale è l'area colorata sotto il grafico di* $f(t)$*, l'elemento* $f(t)dt$ *è il rettangolino di base* dt *e altezza* $f(t)$*.*

$\Delta t \to 0$ (semplicisticamente, diremmo che l'integrale è una somma di infinite quantità infinitesime).

Assumendo $t_1 < t_2 < t_3$, è evidente che

$$\int_{t_1}^{t_3} f(t)dt \;=\; \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt + \int_{t_2}^{t_3} f(t)dt \tag{3.6}$$

Ovviamente, se $t_1 < t_2$, in Eq. (3.5) $\Delta t > 0$; viceversa se $t_1 > t_2$, $\Delta t < 0$. Pertanto, per convenzione

$$\int_{t_2}^{t_1} f(t)dt = -\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt \tag{3.7}$$

Con questa convenzione, l'Eq. (3.6) diventa valida anche nei casi in cui non è vero che $t_1 < t_2 < t_3$.

3.2.1 Nota sulla variabile di integrazione

Una scrittura del tipo $\int_{t_1}^{t_2} dt\, f(t)$ non presenta nessuna ambiguità: l'intervallo di integrazione è definito dagli estremi t_1, t_2, e la "variabile di

integrazione" t scorre su tutto l'intervallo: $t \in [t_1; t_2]$.

Spesso in Fisica l'estremo superiore di integrazione è visto come una variabile: si pensi allo spazio come integrazione della velocità, o a quest'ultima come integrazione dell'accelerazione. In tal caso, t è l'estremo superiore di integrazione, e bisogna chiamare la variabile di integrazione in modo diverso, per evitare confusioni: di solito la si indica con t' [2]:

$$s(t) \;=\; s(t_0) + \int_{t_0}^{t} dt'\, v(t') \qquad ; \qquad v(t) \;=\; v(t_0) + \int_{t_0}^{t} dt'\, a(t')$$

Scritture come

$$\begin{aligned} s(t) \;&=\; s(t_0) + \int_{t_0}^{t} dt\, v(t) \\ v(t) \;&=\; v(t_0) + \int_{t_0}^{t} dt\, a(t) \end{aligned} \qquad \text{SBAGLIATE!}$$

sarebbero fuorvianti: che cosa vorrebbe dire $t \in [t_0; t]$??? Che la variabile di integrazione t va da t_0 a t medesimo??? Ovviamente non avrebbe senso!

3.2.2 Funzione primitiva

Si chiama *funzione primitiva* di $f(t)$ una funzione $F(t)$ tale che la sua derivata sia $f(t)$, vale a dire:

$$F(t) \text{ è primitiva di } f(t) \quad \Longleftrightarrow \quad f(t) = \frac{dF(t)}{dt} \tag{3.8}$$

Se $F(t)$ è una primitiva di $f(t)$, anche qualunque funzione $F_k(t) = F(t) + k$, con k costante indipendente da t, è primitiva di $f(t)$. Per verificarlo basta applicare la definizione di derivata, Eq. (3.1): infatti nel rapporto incrementale $\Delta F_k = F_k(t+\Delta t) - F_k(t) = [F(t+\Delta t) + k] - [F(t) + k] = \Delta F$.

3.2.3 Teorema fondamentale del calcolo infinitesimale

Il *teorema fondamentale del calcolo infinitesimale* garantisce che se è nota la funzione primitiva $F(t)$ di una data funzione continua $f(t)$, allora è possibile calcolare qualunque integrale di $f(t)$ mediante la formula:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt = F(t_2) - F(t_1) \tag{3.9}$$

[2] L'apicetto ($'$) NON VUOL DIRE DERIVATA, *ça va sans dire*...

In altre parole, "l'integrale è l'operazione inversa della derivata". Questo concetto l'abbiamo già toccato quando abbiamo parlato della relazione fra spostamento e velocità: ebbene, è del tutto generale.

Per compattezza di scrittura, l'Eq. (3.9) viene spesso scritta nella forma:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \Big[\ F(t)\ \Big]_{t_1}^{t_2} \tag{3.10}$$

dove appunto si intende che $\Big[\ F(t)\ \Big]_{t_1}^{t_2} \equiv F(t_2) - F(t_1)$.

(quasi una) dimostrazione

Scegliamo t_0 arbitrariamente e *definiamo* $F(t)$ in modo che

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(t')dt'$$

Allora

$$\begin{aligned} F(t+dt) &= \int_{t_0}^{t+dt} f(t')dt' = \left(\int_{t_0}^{t} f(t')dt' \right) + f(t)dt \\ &= F(t) + f(t)dt \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{F(t+dt) - F(t)}{dt} = f(t)$$

cioè $F(t)$ è effettivamente una primitiva di $f(t)$.

Usando Eq. (3.6) e Eq. (3.7),

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} f(t')dt' &= \int_{t_1}^{t_0} f(t')dt' + \int_{t_0}^{t_2} f(t')dt' \\ &= -\int_{t_0}^{t_1} f(t')dt' + \int_{t_0}^{t_2} f(t')dt' \\ &= F(t_2) - F(t_1) \end{aligned}$$

3.3 Principali regole di derivazione e integrazione

Riassumiamo qui le principali regole di derivazione e di integrazione (qui per compattezza di scrittura, chiamiamo $\dot{f}(t)$ la derivata di $f(t)$).

funzione	derivata	primitiva
$f(t)$	$\dot{f}(t) \equiv \dfrac{df}{dt}$	$F(t)$ — talvolta indicata con $\displaystyle\int dt\, f(t)$
$f(t)+g(t)$	$\dot{f}(t)+\dot{g}(t)$	$F(t)+G(t)$
$\alpha f(t)$	$\alpha\dot{f}(t)$	$\alpha F(t)$
$f(\alpha t)$	$\alpha\dot{f}(\alpha t)$	$\dfrac{1}{\alpha}\cdot F(\alpha t)$
$f(t)g(t)$	$\dot{f}(t)g(t)+f(t)\dot{g}(t)$	$F(t)g(t)-\displaystyle\int dt\, F(t)\dot{g}(t)$
$g[f(t)]$	$\dot{g}[f(t)]\dot{f}(t)$	$\displaystyle\int du\, \frac{g(u)}{\dot{f}[f^{-1}(u)]}$ $\quad$ ($u \equiv f(t)$)

Elenchiamo anche la funzione derivata e la funzione primitiva di alcune funzioni notevoli.

funzione	derivata	primitiva
t^α	$\alpha t^{\alpha-1}$	$\dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $\quad$ (se $\alpha \neq -1$)
$\dfrac{1}{t}$	$-\dfrac{1}{t^2}$	$\ln\left(\dfrac{t}{t_0}\right)$ $\quad$ (t_0 arbitrario)
$\ln(\alpha t)$	$\dfrac{1}{t}$	$t\ln(\alpha t)-t$
$\mathrm{e}^{\alpha t}$	$\alpha\cdot\mathrm{e}^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha t}$
$\sin(\Omega t+\phi)$	$\Omega\cdot\cos(\Omega t+\phi)$	$-\dfrac{1}{\Omega}\cos(\Omega t+\phi)$
$\cos(\Omega t+\phi)$	$-\Omega\cdot\sin(\Omega t+\phi)$	$\dfrac{1}{\Omega}\sin(\Omega t+\phi)$

3.4 Variazione di una funzione di una variabile

Quanto varia una funzione $f(t)$ se la variabile t è soggetta ad una variazione Δt? In generale, per funzioni sufficientemente "regolari" (o "lisce") — e

in Fisica siamo quasi sempre in questa situazione — la risposta viene dallo *sviluppo in serie di Taylor*:

$$\begin{aligned} f(t+\Delta t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right)(\Delta t)^k \\ &= f(t) \;+\; \dot{f}(t)\cdot\Delta t \;+\; \frac{1}{2}\ddot{f}(t)\cdot(\Delta t)^2 \;+\; \frac{1}{6}\dddot{f}(t)\cdot(\Delta t)^3 \;+\; \cdots \end{aligned} \tag{3.11}$$

I termini in $(\Delta t)^k$, al crescere dell'esponente k, diventano via via più piccoli se Δt è piccolo. Inoltre, il fattoriale $k!$ al denominatore cresce rapidamente, rendendo ulteriormente più piccoli i termini al crescere di k

Nel limite $\Delta t \to 0$ si considera di solito il termine $\propto (\Delta t)$:

$$f(t+dt) \;\simeq\; f(t) \;+\; \dot{f}(t)\cdot dt \;+\; \mathcal{O}\left((dt)^2\right) \tag{3.12}$$

dove $\simeq$ ci ricorda che il risultato non è esatto, ma contiene un'approssimazione, e $\mathcal{O}\left((dt)^2\right)$ indica che l'"errore" commesso in questa approssimazione è $\propto (dt)^2$.

In alcuni casi è utile estendere lo sviluppo in serie al termine $\propto (\Delta t)^2$ — per esempio quando t è un "punto stazionario" di $f(t)$, cioè $\dot{f}(t) = 0$ — ottenendo:

$$f(t+dt) \;\simeq\; f(t) \;+\; \dot{f}(t)\cdot dt \;+\; \frac{1}{2}\ddot{f}(t)\cdot(dt)^2 \;+\; \mathcal{O}\left((dt)^3\right) \tag{3.13}$$

Le Eq. (3.12) e Eq. (3.13) si scrivono spesso esprimendo direttamente la variazione della funzione

$$df \;\equiv\; f(t+dt) - f(t) \;=\; \dot{f}(t)\cdot dt \;+\; \mathcal{O}\left((dt)^2\right) \tag{3.14}$$

oppure

$$df \;\equiv\; f(t+dt) - f(t) \;=\; \dot{f}(t)\cdot dt \;+\; \frac{1}{2}\ddot{f}(t)\cdot(dt)^2 \;+\; \mathcal{O}\left((dt)^3\right) \tag{3.15}$$

3.5 Variazione di una funzione composta

Consideriamo una "funzione composta" $f(u)$, in cui $u = u(t)$. I valori di f dipendono da t attraverso u: $f \equiv f(u(t))$. Abbiamo già visto nella Sezione 3.3 come trattare la derivata di una funzione composta:

$$\frac{df(u(t))}{dt} \;=\; \dot{f}(u(t))\cdot\dot{u}(t)$$

da cui si deduce che la variazione di f, al primo ordine dello sviluppo in serie di Taylor, è

$$\begin{aligned} df &\equiv f(u(t+dt)) - f(u(t)) = \dot{f}(u(t)) \cdot \dot{u}(t) \cdot dt \\ &= \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot dt \end{aligned} \tag{3.16}$$

L'ultima scrittura è senz'altro suggestiva e facile da ricordare, dà l'illusione che i dt e i du che compaiono ai numeratori e ai denominatori si possano cancellare a due a due, lasciando la variazione df della funzione.

3.6 L'esponenziale complesso (*)

La funzione esponenziale, $x \to \mathrm{e}^x$, definita in capo reale, può essere estesa ai numeri complessi. Dato un numero complesso $\zeta = \eta + i\phi$, si *definisce*

$$\mathrm{e}^{\zeta} \equiv \mathrm{e}^{\eta} (\cos\phi + i \sin\phi) \tag{3.17}$$

La definizione è consistente, poiché per $\phi = 0$ si riduce alla definizione in campo reale. Inoltre, la fondamentale proprietà dell'esponenziale

$$\mathrm{e}^{\zeta_1+\zeta_2} = \mathrm{e}^{\zeta_1}\mathrm{e}^{\zeta_2} \tag{3.18}$$

è mantenuta anche in campo complesso:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\zeta_1}\mathrm{e}^{\zeta_2} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{e}^{\eta_1}(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)\mathrm{e}^{\eta_2}(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) \\ &= \mathrm{e}^{\eta_1}\mathrm{e}^{\eta_2}(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) \\ &= \mathrm{e}^{\eta_1+\eta_2}\left[(\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2) + i(\cos\phi_1\sin\phi_2 + \sin\phi_1\cos\phi_2)\right] \\ &= \mathrm{e}^{\eta_1+\eta_2}\left[\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)\right] \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{e}^{(\eta_1+\eta_2)+i(\phi_1+\phi_2)} \\ &= \mathrm{e}^{(\eta_1+i\phi_1)+(\eta_2+i\phi_2)} \\ &= \mathrm{e}^{\zeta_1+\zeta_2} \end{aligned}$$

3.6.1 Alcune identità

$$\mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i \quad ; \quad \mathrm{e}^{\pm i\pi} = -1 \quad ; \quad \left|\mathrm{e}^{i\phi}\right| = 1$$

$$\begin{aligned} \cos\phi &= \mathbf{Re}\left(\mathrm{e}^{i\phi}\right) = \frac{\mathrm{e}^{i\phi} + \mathrm{e}^{-i\phi}}{2} \\ \sin\phi &= \mathbf{Im}\left(\mathrm{e}^{i\phi}\right) = \frac{\mathrm{e}^{i\phi} - \mathrm{e}^{-i\phi}}{2i} \end{aligned} \tag{3.19}$$

3.6.2 Rappresentazioni cartesiana e esponenziale

Lo stesso numero complesso z si può scrivere in forma "cartesiana" o "esponenziale":

$$z = x + iy = \rho\, \mathrm{e}^{i\phi} \qquad \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ x &= \rho\cos\phi \\ y &= \rho\sin\phi \end{aligned}$$

3.6.3 Regole di somma in trigonometria

L'esponenziale complesso consente di ricavare rapidamente le varie regole di somma citate in Sezione 4.4.2. Un esempio: proviamo a ricavare $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} \cos\alpha + \cos\beta &= \mathbf{Re}\left[\mathrm{e}^{i\alpha} + \mathrm{e}^{i\beta}\right] = \mathbf{Re}\left[\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)/2}\left(\mathrm{e}^{i(\alpha-\beta)/2} + \mathrm{e}^{i(\beta-\alpha)/2}\right)\right] \\ &= \mathbf{Re}\left[\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)/2}\cdot 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right] = \mathbf{Re}\left[\mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)/2}\right]\cdot 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

(analogamente, provate a dimostrare $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\ldots$)

3.6.4 Derivata di un esponenziale complesso

L'esponenziale complesso ha le stesse proprietà di derivazione dell'esponenziale reale, ovvero

$$\frac{d}{dz}\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^z \tag{3.20}$$

Infatti, se $h = \xi + i\eta$, nel limite $h \to 0$:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\mathrm{e}^z &= \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{z+h}-\mathrm{e}^z}{h} = \lim_{h\to 0}\mathrm{e}^z\frac{\mathrm{e}^h-1}{h} \\
&= \mathrm{e}^z \lim_{\xi\to 0;\eta\to 0}\frac{\mathrm{e}^\xi(\cos\eta + i\sin\eta)-1}{\xi+i\eta} \\
&\qquad\qquad \left(\text{approssimando}: \left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^\xi & \simeq & 1+\xi+\mathcal{O}\left(\xi^2\right) \\ \cos\eta & \simeq & 1+\mathcal{O}\left(\eta^2\right) \\ \sin\eta & \simeq & \eta+\mathcal{O}\left(\eta^3\right) \end{array}\right\}\right) \\
&\simeq \mathrm{e}^z\,\frac{(1+\xi)(1+i\eta)-1+\mathcal{O}\left(\xi^2,\eta^2\right)}{\xi+i\eta} \\
&\simeq \mathrm{e}^z\,\frac{1+\xi+i\eta-1+\mathcal{O}\left(\xi^2,\eta^2,\xi\eta\right)}{\xi+i\eta} \\
&\simeq \mathrm{e}^z\left(1+\frac{\mathcal{O}\left(h^2\right)}{h}\right) \\
&\to \mathrm{e}^z
\end{aligned}
$$

3.6.5 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Un'utilissima applicazione dell'esponenziale complesso è nella soluzione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, del tipo:

$$
\begin{aligned}
a_0x(t) + a_1\frac{dx(t)}{dt} + a_2\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \cdots + a_n\frac{d^nx(t)}{dt^n} &= 0 \\
\sum_{k=0}^{n} a_k\,\frac{d^kx(t)}{dt^k} &= 0
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

In queste equazioni, l'incognita è una funzione, $t \to x(t)$, e l'equazione descrive una relazione fra le derivate di vari ordini della funzione, cioè $\dfrac{d^kx(t)}{dt^k}$ è la derivata di ordine k della funzione $x(t)$.

In fisica classica si incontrano spesso equazioni del tipo Eq. (3.21), in cui i coefficienti $a_0, \ldots, a_n$ sono *reali*, e la funzione $x(t)$ è anch'essa a valori reali. Nondimeno, può essere utile introdurre una funzione a valori *complessi* $z(t)$, tale che

$$x(t) = \mathbf{Re}\left[z(t)\right]$$

Ora, $\dfrac{d^k}{dt^k}x(t) = \mathbf{Re}\left[\dfrac{d^k}{dt^k}z(t)\right]$, quindi l'Eq. (3.21) può essere scritta

$$\mathbf{Re}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k z(t)}{dt^k}\right] = 0$$

Se troviamo soluzioni $z(t)$ dell'equazione:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k z(t)}{dt^k} = 0 \tag{3.22}$$

sicuramente $x(t) = \mathbf{Re}\,[z(t)]$ sarà soluzione dell'Eq. (3.21).

Per risolvere l'Eq. (3.22) proviamo a porre

$$z(t) = A\,\mathrm{e}^{st} \qquad (A, s \in \mathbb{C}) \tag{3.23}$$

Allora, grazie alla proprietà Eq. (3.20),

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dt^k}\left(z(t)\right) &= A\,\frac{d^k}{dt^k}\left(\mathrm{e}^{st}\right) = A\,s^k\,\mathrm{e}^{st} \\ &= s^k\,z(t)\end{aligned}$$

e l'Eq. (3.22) diventa:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\,s^k\right) z(t) = 0$$

Per la scelta Eq. (3.23), $z(t) \neq 0$ sempre, per cui ci ritroviamo con

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\,s^k = 0$$

che è ora una equazione algebrica, di grado n, nell'incognita complessa s. Il teorema fondamentale dell'algebra dice che essa ha n soluzioni complesse $s_1, \ldots, s_n$. Quindi qualunque funzione

$$z_i(t) = c_i\,\mathrm{e}^{s_i t} \qquad (c_i \in \mathbb{C})$$

è soluzione dell'Eq. (3.22). La soluzione generale è quindi una combinazione lineare:

$$z(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\,\mathrm{e}^{s_i t} \qquad (c_i \in \mathbb{C})$$

Ora torniamo a $x(t)$: dovrà essere

$$x(t) \quad = \quad \mathbf{Re}\left[c_i\, \mathrm{e}^{s_i t}\right] \qquad\qquad (c_i \in \mathbb{C})$$

Possiamo scrivere $c_i = \rho_i \mathrm{e}^{\phi_i}$ e $s_i = \gamma_i + i\Omega_i$, cosicché

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathbf{Re}\left[\sum_{i=1}^{n} \rho_i \mathrm{e}^{\gamma_i t} \mathrm{e}^{i(\Omega_i t + \phi_i)}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \rho_i \mathrm{e}^{\gamma_i t}\, \cos(\Omega_i t + \phi_i) \end{aligned}$$

Quindi la soluzione è una combinazione lineare di funzioni esponenziali ($\mathrm{e}^{\gamma_i t}$) moltiplicate per sinusoidi ($\cos(\Omega_i t + \phi_i)$).

I valori di Ω_i, γ_i dipendono dai rispettivi s_i, che sono le soluzioni dell'equazione algebrica, quindi in ultima analisi dipendono dai coefficienti $a_0, \ldots, a_n$ del problema.

Invece le costanti ρ_i, ϕ_i dipendono dalle *condizioni iniziali*, ovvero dai valori di x e delle sue derivate $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{d^2x}{dt^2}$, $\ldots$, $\dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n_1}}$ all'istante iniziale t_0.

Capitolo 4

Posizioni nello spazio

Lo spazio fisico è tridimensionale. Per descrivere il moto nello spazio occorre anzitutto definire la *posizione*.

Dalla geometria analitica sappiamo che è utile introdurre un *sistema di coordinate cartesiane*, caratterizzato da un'origine O e tre assi ortogonali x, y, z, rispetto al quale definire qualunque posizione. In alcuni casi il moto avviene su un piano, pertanto il problema si riduce a bidimensionale e si può fare uso di un sistema di coordinate cartesiane con un'origine O e due soli assi x, y.

Sia nel caso tridimensionale che in quello bidimensionale, può presentarsi utile l'uso di sistemi di coordinate alternative — non cartesiane, ma altrettanto valide nel definire in modo univoco la posizione di un punto. Esempi notevoli sono dati dalle *coordinate polari*, in cui la posizione di un punto viene definita dalla *distanza dall'origine* e da una *direzione*, specificata mediante angoli rispetto ad assi di riferimento.

In questo capitolo introdurremo le coordinate cartesiane in 3 dimensioni, i concetti di vettore-posizione, vettore-spostamento, e loro composizioni. Quindi riassumeremo le proprietà delle misure angolari e delle funzioni trigonometriche, e mostreremo l'uso delle coordinate polari.

4.1 Posizione nello spazio

La posizione nello spazio tridimensionale si descrive introducendo un *sistema di riferimento cartesiano* dotato di un'origine O e tre assi ortogonali x, y, z: indicheremo tale riferimento con $(O; x, y, z)$. Gli orientamenti dei tre assi possono essere rappresentati da tre segmenti orientati di lunghezza unitaria, ortogonali fra loro, detti *versori*: $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$ — vd Fig. 4.1. Una volta scelti

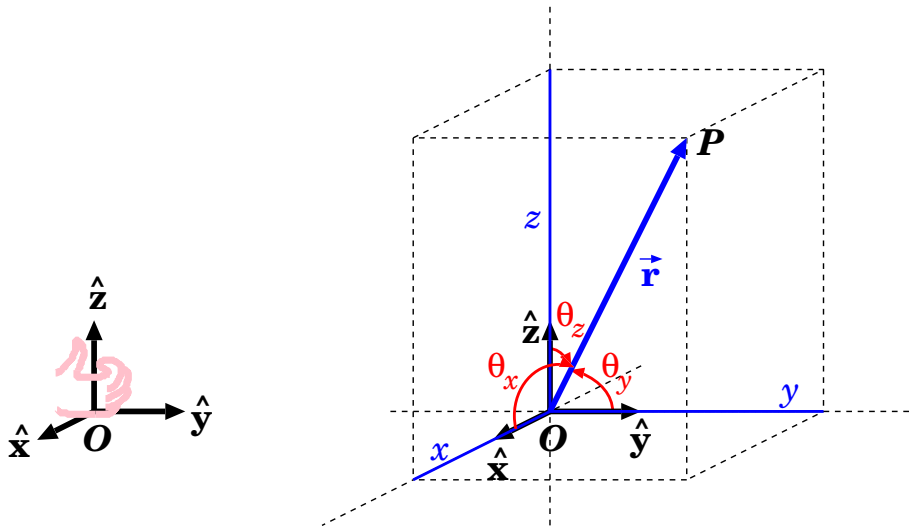


Figura 4.1: *Figura a sinistra: la "regola della mano destra" per definire l'orientamento di $\hat{\boldsymbol{z}}$ una volta definiti quelli di $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}$. Figura a destra: rappresentazione grafica del raggio vettore, che individua la posizione P rispetto ad un'origine O e ad una terna di direzioni $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$.*

gli orientamenti dei versori $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$, l'orientamento del versore $\hat{\boldsymbol{z}}$ si sceglie convenzionalmente con la "regola della mano destra": disponendo la mano destra come in Fig. 4.1, con le dita ricurve che vanno da $\hat{\boldsymbol{x}}$ a $\hat{\boldsymbol{y}}$, il pollice definisce l'orientamento di $\hat{\boldsymbol{z}}$.

Un qualunque punto P può essere individuato dalle 3 coordinate cartesiane (x, y, z) rispetto al sistema di riferimento — vd Fig. 4.1. In particolare:

- la coordinata x è la distanza del punto P dal piano yz; il segno di x è definito positivo se P sta dalla parte del piano yz indicata dal versore $\hat{\boldsymbol{x}}$, negativo altrimenti;
- la coordinata y è la distanza del punto P dal piano zx; il segno di y è definito positivo se P sta dalla parte del piano zx indicata dal versore $\hat{\boldsymbol{y}}$, negativo altrimenti;
- la coordinata z è la distanza del punto P dal piano xy; il segno di z è definito positivo se P sta dalla parte del piano xy indicata dal versore $\hat{\boldsymbol{z}}$, negativo altrimenti;

La *distanza* di P dall'origine O è data dal teorema di Pitagora:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{4.1}$$

4.2 Raggio vettore (o vettore-posizione)

La posizione del punto P rispetto all'origine O è indicata da un *raggio vettore* $\vec{\boldsymbol{r}}$, o *vettore-posizione*. Una volta fissato il riferimento cartesiano, il raggio vettore è univocamente identificato dalla terna cartesiana (x, y, z), quindi possiamo scrivere:

$$\vec{\boldsymbol{r}} \equiv (x, y, z) \tag{4.2}$$

Il raggio vettore deve descrivere sia la *distanza* di P da O, sia la *direzione* lungo la quale P viene visto da O. Si definisce *modulo* del raggio vettore la distanza di P da O:

$$|\vec{\boldsymbol{r}}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{4.3}$$

La direzione può essere individuata dagli angoli θ_x, θ_y, θ_z che $\vec{\boldsymbol{r}}$ forma con i tre versori $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$. Tali angoli vengono espressi attraverso i loro coseni, detti *coseni direttori*,

$$\cos\theta_x = \frac{x}{r} \quad ; \quad \cos\theta_y = \frac{y}{r} \quad ; \quad \cos\theta_z = \frac{z}{r} \tag{4.4}$$

Da notare che queste quantità non sono tutte indipendenti, poiché soddisfano l'identità:

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1 \tag{4.5}$$

4.3 Vettore spostamento

Il vettore $\vec{\boldsymbol{r}}$ in Fig. 4.1 può essere inteso sia come posizione di P rispetto a O, sia come *spostamento* che è necessario compiere per muoversi da O a P.

Uno spostamento può sempre essere pensato come composizione di altri spostamenti: questo ci consente di definire alcune operazioni elementari con i vettori-spostamento.

4.3.1 Prodotto di un vettore-spostamento per un numero

Dato un vettore-spostamento $\vec{\boldsymbol{r}} \equiv (x, y, z)$, si definisce la moltiplicazione per una quantità numerica α la seguente:

$$\alpha\,\vec{\boldsymbol{r}} \equiv (\ \alpha x\ ;\ \alpha y\ ;\ \alpha z\ ) \tag{4.6}$$

L'operazione è raffigurata in Fig. 4.2, per varie situazioni ($\alpha > 1$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha < 0$). I vettori-spostamento $\vec{\boldsymbol{r}}$ e $\alpha\,\vec{\boldsymbol{r}}$ hanno lo stesso orientamento se $\alpha > 0$,

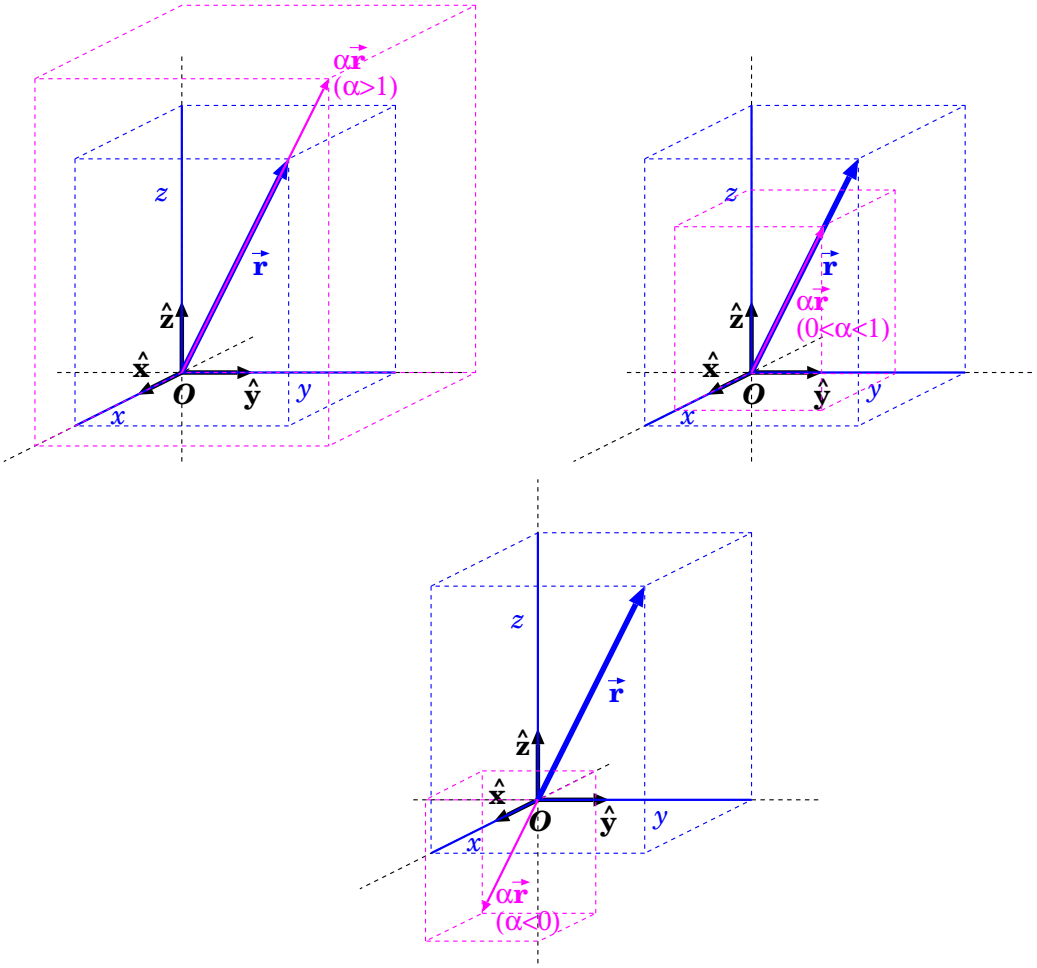


Figura 4.2: *Moltiplicazione di un vettore-spostamento $\vec{r}$ per un numero α.*

o orientamenti opposti se $\alpha < 0$ — come si può vedere calcolandone i coseni direttori. Inoltre i loro moduli sono tali che

$$|\alpha\vec{r}| \;=\; |\alpha| \cdot |\vec{r}| \tag{4.7}$$

4.3.2 Somma di vettori-spostamento

Con riferimento alla Fig. 4.3 (a), $\vec{r}_1$ è lo spostamento da O a P_1, mentre $\vec{r}_2$ è lo spostamento da P_1 a P_2. È quindi naturale definire come *somma* di due vettori spostamento il vettore spostamento che produce l'effetto finale: nella fattispecie lo spostamento da O a P_2 (ovvero la posizione di P_2) è definita da

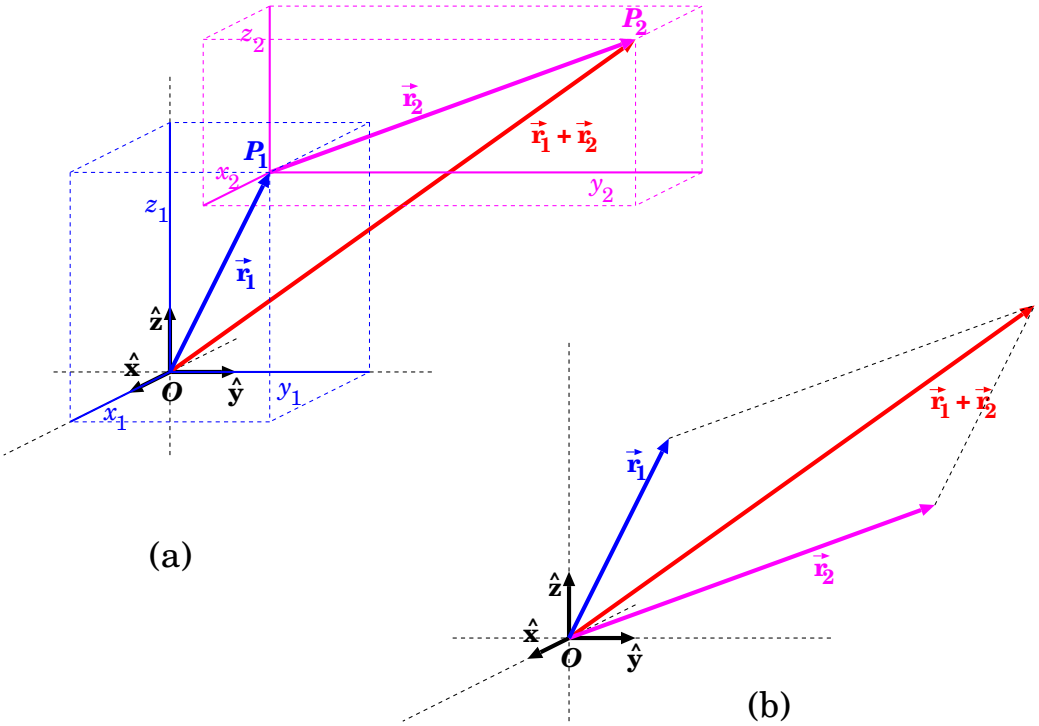


Figura 4.3: *Rappresentazione grafica della somma di due vettori-spostamento, $\vec{r}_1 + \vec{r}_2$: (a) la "coda" del secondo vettore viene posta dove si trova la "freccia" del primo vettore (o viceversa); (b) le due "code" vengono unite, si costruisce un parallelogramma la cui diagonale uscente dalle code dà il vettore-somma.*

$\vec{r}_1 + \vec{r}_2$:

$$\left.\begin{array}{lcl} \vec{r}_1 & \equiv & \text{spostamento da } O \text{ a } P_1 \\ \vec{r}_2 & \equiv & \text{spostamento da } P_1 \text{ a } P_2 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \equiv \text{spostamento da } O \text{ a } P_2$$

La somma di due vettori spostamento, in coordinate cartesiane, appare particolarmente semplice: sempre guardando la Fig. 4.3 (a), per spostarsi da O a P_2 occorre spostarsi prima da O a P_1 seguendo il vettore $\vec{r}_1$, poi da P_1 a P_2 seguendo il vettore $\vec{r}_2$. Pertanto le coordinate cartesiane di P_2 sono

$$(\; x_1 + x_2 \; , \; y_1 + y_2 \; , \; z_1 + z_2 \;)$$

Queste sono precisamente le componenti cartesiane del vettore $\vec{r}_1 + \vec{r}_2$.

Quindi, *i vettori si sommano per componenti cartesiane*:

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 \equiv (\; x_1 + x_2 \; , \; y_1 + y_2 \; , \; z_1 + z_2 \;) \tag{4.8}$$

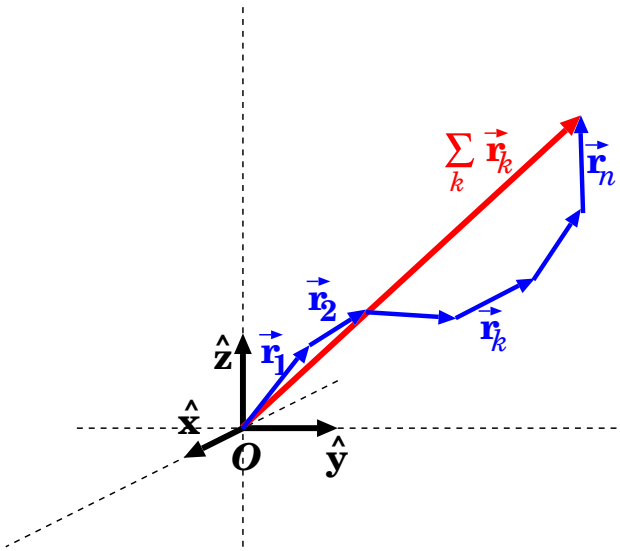


Figura 4.4: *Rappresentazione grafica della sommatoria di n vettori-spostamento:* $\sum_k \vec{r}_k$.

La somma di due vettori può essere rappresentata graficamente in due modi:

- Fig. 4.3 (a): la "coda" del secondo vettore viene unita alla "freccia" del primo vettore: in questo modo il vettore-somma va dalla "coda" del primo vettore alla "freccia" del secondo;
- Fig. 4.3 (b): le "code" dei due vettori vengono unite e si traccia un parallelogramma: la diagonale del parallelogramma che esce dalle "code" definisce il vettore-somma.

Le due rappresentazioni sono ovviamente equivalenti: si sceglie quella più conveniente caso per caso — ricordandosi in ogni caso che, per fare i calcoli, si lavora sempre con le coordinate cartesiane!

La prima rappresentazione grafica può facilmente essere generalizzata alla somma di n vettori-spostamento:

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \cdots + \vec{r}_n \;=\; \sum_k \vec{r}_k$$

come illustrato in Fig. 4.4: il vettore-somma va dalla "coda" del primo vettore alla "freccia" dell'n-esimo. Ricordiamo che il *calcolo* si effettua comunque per

coordinate cartesiane:

$$\sum_k \vec{\boldsymbol{r}}_k \equiv \left(\sum_k x_k \; ; \; \sum_k y_k \; ; \; \sum_k z_k \right)$$

Un esempio

Un esploratore, nella foresta equatoriale, si sta muovendo a piedi su un terreno molto accidentato, che non gli permette di spostarsi in linea retta. Per tenere traccia della propria posizione, suddivide il proprio percorso in tratti, tali che ciascuno di essi abbia agli estremi punti di riferimento ben identificabili (per esempio, un grosso albero, o una roccia, o una cascatella, ...). Prima di intraprendere un nuovo tratto, l'escursionista individua un punto di arrivo, con la bussola misura la direzione in linea d'aria dalla sua posizione al punto di arrivo, e con un radar direzionale la distanza in linea d'aria. Fatte le misure, si mette in cammino, e in un modo o nell'altro raggiunge il punto di arrivo prefissato. Quindi ripete l'operazione per ogni tappa successiva. Quando è arrivato alla destinazione finale, comunica via radio le sue coordinate a un elicottero di appoggio che viene a prelevarlo. Come deve fare i calcoli?

Risposta. *Chiamiamo* (x_0, y_0) *le coordinate (longitudine e latitudine) iniziali. Nel primo tratto, l'esploratore va da* (x_0, y_0) *a* (x_1, y_1)*, percorrendo quindi uno spostamento* $\Delta\vec{\boldsymbol{r}}_1 \equiv (\Delta x_1, \Delta y_1) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$*. Analogamente, nell'i-esimo tratto, il vettore-spostamento sarà* $\Delta\vec{\boldsymbol{r}}_i \equiv (\Delta x_i, \Delta y_i) = (x_i - x_{i-1}, y_i - y_{i-1})$*. L'angolo* θ *della bussola è misurato rispetto al Nord e in senso orario, pertanto, detta* $\Delta\ell_i$ *la lunghezza dell'i-esimo tratto, deve essere:*

$$\Delta x_i = \Delta\ell_i \sin\theta_i \quad ; \quad \Delta y_i = \Delta\ell_i \cos\theta_i$$

Lo spostamento totale dell'esploratore è pari alla somma vettoriale degli spostamenti: $\Delta\vec{\boldsymbol{r}}^{tot} = \sum_{i=1}^{N} \Delta\vec{\boldsymbol{r}}_i$*, pertanto le coordinate finali saranno:*

$$x^{fin} = x_0 + \sum_{i=1}^{N} \Delta\ell_i \sin\theta_i$$
$$y^{fin} = y_0 + \sum_{i=1}^{N} \Delta\ell_i \cos\theta_i$$

Un'osservazione: *abbiamo trattato longitudine e latitudine come coordinate cartesiane: questo va bene solo se la zona esplorata non è troppo vasta, e se l'esploratore è lontano dai poli, in modo da assumere che i meridiani siano ... paralleli — la superficie terrestre non è un piano!*

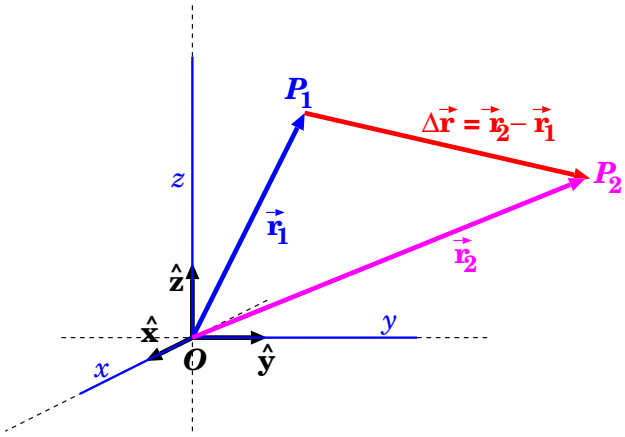


Figura 4.5: *Rappresentazione grafica della differenza di due vettori-spostamento, $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$: unendo le "code" dei vettori $\vec{r}_2$, $\vec{r}_1$, il vettore-differenza $\Delta\vec{r}$ va dalla "freccia" di $\vec{r}_1$ alla "freccia" di $\vec{r}_2$.*

4.3.3 Differenza di vettori-spostamento

Se le due posizioni P_1 e P_2 sono definite dai raggi vettori $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, come in Fig. 4.5, per spostarsi da O a P_2 possiamo prima seguire il vettore $\vec{r}_1$ per arrivare a P_1, quindi seguire il vettore spostamento $\Delta\vec{r}$ per arrivare a P_2. Pertanto

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}$$

e questo ci consente di definire la *differenza di due vettori spostamento*:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

che per componenti cartesiane diventa:

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 \;\equiv\; (\; x_2 - x_1 \;,\; y_2 - y_1 \;,\; z_2 - z_1 \;) \tag{4.9}$$

4.3.4 Vettore-spostamento e versori

Per quanto detto sinora, i 3 versori $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ possono essere scritti per componenti cartesiane:

$$\begin{aligned} \hat{x} &\equiv (\; 1 \;,\; 0 \;,\; 0 \;) \\ \hat{y} &\equiv (\; 0 \;,\; 1 \;,\; 0 \;) \\ \hat{z} &\equiv (\; 0 \;,\; 0 \;,\; 1 \;) \end{aligned}$$

I versori $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$ sono in effetti *vettori di modulo unitario* [1]:

$$|\hat{\boldsymbol{x}}| \;=\; |\hat{\boldsymbol{y}}| \;=\; |\hat{\boldsymbol{z}}| \;=\; 1$$

Ora consideriamo un vettore-posizione $\vec{\boldsymbol{r}} \equiv (x, y, z)$. Ovviamente,

$$\begin{aligned} x\,\hat{\boldsymbol{x}} &\equiv (\ x\ ,\ 0\ ,\ 0\ ) \\ y\,\hat{\boldsymbol{y}} &\equiv (\ 0\ ,\ y\ ,\ 0\ ) \\ z\,\hat{\boldsymbol{z}} &\equiv (\ 0\ ,\ 0\ ,\ z\ ) \end{aligned}$$

da cui si ricava immediatamente

$$\vec{\boldsymbol{r}} = x\,\hat{\boldsymbol{x}} + y\,\hat{\boldsymbol{y}} + z\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{4.10}$$

Tutto questo discorso a prima vista può apparire superfluo. Vedremo invece che l'Eq. (4.10) è molto utile quando si debbano considerare diversi sistemi di riferimento cartesiani, $(O; x, y, z)$ e $(O; x', y', z')$, in cui gli assi del secondo sono ruotati rispetto a quelli del primo. In tal caso, lo stesso vettore $\vec{\boldsymbol{r}}$ potrà essere scomposto rispetto a una nuova terna di versori: $\vec{\boldsymbol{r}} = x'\,\hat{\boldsymbol{x}}' + y'\,\hat{\boldsymbol{y}}' + z'\,\hat{\boldsymbol{z}}'$.

4.4 Misure angolari

È consuetudine misurare gli angoli in *gradi sessagesimali* (o semplicemente *gradi*), che si indicano con "°". Con questa convenzione, un grado è $\dfrac{1}{360}$ di angolo-giro, ovvero

$$\text{angolo giro} \;=\; 360^\circ \tag{4.11}$$

Inoltre, per il grado si definiscono i sottomultipli *primo d'arco* e *secondo d'arco*:

$$\begin{aligned} 1' &= \left(\frac{1}{60}\right)^\circ \quad \text{(primo d'arco)} \\ 1'' &= \left(\frac{1}{60}\right)' \quad \text{(secondo d'arco)} \end{aligned} \tag{4.12}$$

[1] In inglese, il "versore" si chiama "unit vector".

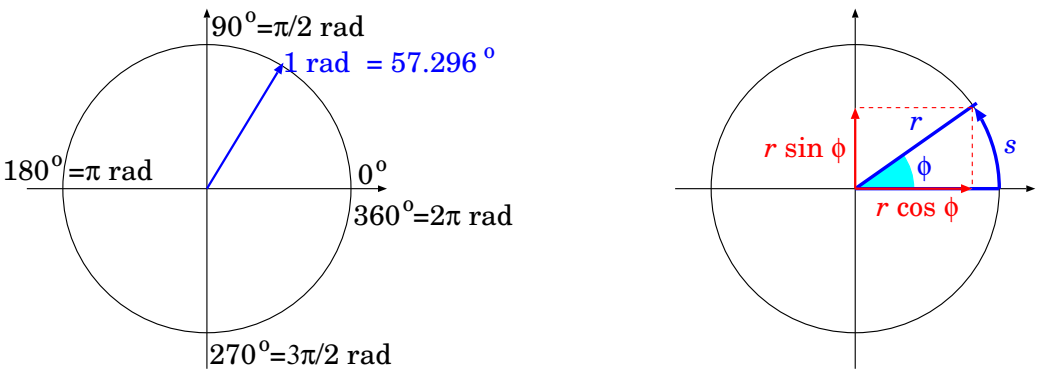


Figura 4.6: *Misure angolari e funzioni trigonometriche.*

4.4.1 Definizione di radianti

Misurando gli angoli in gradi, la lunghezza s di un arco di cerchio di raggio r, sotteso da un angolo ϕ, si scrive:

$$s = \frac{2\pi}{360} \cdot r \cdot \phi^\circ$$

(verifica: per $\phi = 360°$ l'arco diventa l'intera circonferenza, la cui lunghezza è $2\pi r$). Il fattore $\frac{2\pi}{360} \simeq 0.008727$ rende questa scelta di misura angolare poco pratica, in geometria e quindi anche in Fisica.

Si adotta quindi una unità di misura, il *radiante*, indicato con "rad", definito in modo che

$$\text{angolo giro} \;=\; 2\pi \text{ rad} \tag{4.13}$$

In tal caso, la lunghezza s di un arco di cerchio di raggio r, sotteso da un angolo ϕ, si scrive:

$$s = r \cdot \phi \text{ rad} \tag{4.14}$$

molto più maneggevole!

La conversione da gradi, primi, secondi a radianti si ricava confrontando le definizioni Eq. (4.11), Eq. (4.12) con la definizione Eq. (4.13):

$$
\begin{aligned}
1^\circ &= \frac{2\pi}{360}\ \text{rad} &&= 1.745\cdot 10^{-2}\ \text{rad}\\
1' &= \left(\frac{1}{60}\right)^\circ = \frac{2\pi}{21\,600}\ \text{rad} &&= 2.909\cdot 10^{-4}\ \text{rad}\\
1'' &= \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ = \frac{2\pi}{1\,296\,000}\ \text{rad} &&= 4.848\cdot 10^{-6}\ \text{rad}\\
1\ \text{rad} &= \left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ &&= 57.296^\circ
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Esercizio 4.1. *La Luna dista dalla Terra* $R = 384\,400$ km *e ha un diametro* $D = 3\,474$ km. *Calcolare la dimensione angolare apparente della Luna vista dalla Terra, esprimendo il risultato in gradi, primi, e radianti.*

Risposta *Cominciamo con il calcolo in radianti. La dimensione della Luna è molto minore della sua distanza dalla Terra:* $D \ll R$. *Quindi con ottima approssimazione possiamo trattare* D *come se fosse un archetto di cerchio, anziché un segmento. Pertanto, la dimensione angolare* α *si ricava come* $\alpha = \dfrac{D}{R} = 9.037\cdot 10^{-3}$ rad. *La misura in gradi di ottiene sostituendo* $1\ \text{rad} = \left(\dfrac{360}{2\pi}\right)^\circ$, *quindi* $\alpha = 0.5178^\circ$; *per ottenere la misura in primi d'arco si moltiplica per 60:* $\alpha = 31.07'$. *La parte non intera (0.07) si può a sua volta esprimere in secondi d'arco, moltiplicando ancora per 60:* $0.07' \cdot 60 \simeq 4''$.

In conclusione, la dimensione angolare della Luna vista dalla Terra è

$$\alpha = 9.037\cdot 10^{-3}\ \text{rad} = 0.5178^\circ = 31'04''$$

Esercizio 4.2. *Ripetere l'esercizio precedente, con Giove, il pianeta più luminoso che vediamo. Il suo diametro è* $D = 140\,000$ km; *come distanze dalla Terra consideriamo quella di massimo avvicinamento,* $R_{min} = 628\cdot 10^6$ km, *e di massimo allontanamento,* $R_{max} = 928\cdot 10^6$ km.

Risposta. *Il calcolo è identico:* $\alpha = \dfrac{D}{R}$. *Quando la distanza è minima la dimensione angolare* α *è massima, e viceversa. Quantitativamente,* $\alpha_{max} = \dfrac{D}{R_{min}} = 2.229\cdot 10^{-4}$ rad $\simeq 46''$ *e* $\alpha_{min} = \dfrac{D}{R_{max}} = 1.509\cdot 10^{-4}$ rad $\simeq 31''$.

In effetti, Giove appare puntiforme ad occhio nudo, ma già con un buon binocolo si vede che è un dischetto. Con un telescopio da astronomo dilettante se ne possono distinguere i principali dettagli della superficie.

Esercizio 4.3. *Ripetere l'esercizio per la stella Alpha Centauri, diametro* $D = 1.7\cdot 10^6$ km *e distanza* $R = 4.09\cdot 10^{13}$ km.

Risposta. $\alpha = \dfrac{D}{R} \simeq 4.2 \cdot 10^{-8}$ rad $\simeq 0.009''$. *Meno di un centesimo di secondo d'arco. Nemmeno un ottimo telescopio a terra potrebbe vedere il disco stellare, senza distorsioni.*

4.4.2 Ripasso delle funzioni trigonometriche

Le funzioni trigonometriche sin e cos sono definite nella Fig. 4.6 (destra). Ricordiamo rapidamente che, data una circonferenza di raggio r centrata nell'origine di un piano cartesiano, un angolo ϕ misurato dall'asse x individua su di essa un punto di coordinate (x, y); si definiscono quindi:

$$\cos\phi = \frac{x}{r} \quad ; \quad \sin\phi = \frac{y}{r}$$

Ricordiamo la *fondamentale* identità trigonometrica

$$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$$

Ricordiamo anche che:

$$\tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{y}{x} \quad ; \quad \cot\phi = \frac{\cos\phi}{\sin\phi} = \frac{x}{y}$$

Infine elenchiamo una serie di utili identità:

$$\begin{aligned}
\cos(\phi + \pi/2) &= -\sin\phi \\
\cos(\phi - \pi/2) &= +\sin\phi \\
\cos(\phi \pm \pi) &= -\cos\phi \\
\cos(\phi + 2n\pi) &= \cos\phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(\phi + \pi/2) &= +\cos\phi \\
\sin(\phi + \pi/2) &= -\cos\phi \\
\sin(\phi \pm \pi) &= -\sin\phi \\
\sin(\phi + 2n\pi) &= \sin\phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

4.5 Coordinate polari

In molti problemi può essere utile definire il raggio vettore attraverso *coordinate polari* facendo uso di *coordinate angolari*.

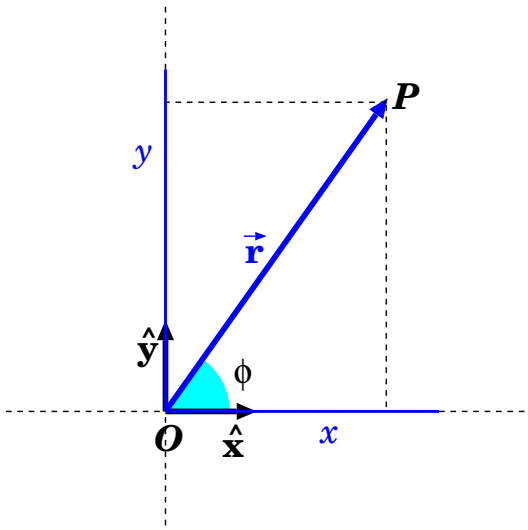


Figura 4.7: *Posizione in un sistema di riferimento cartesiano Oxy in due dimensioni: (x, y) sono le coordinate cartesiane, $(r; \phi)$ sono le coordinate polari.*

4.5.1 Coordinate polari in 2 dimensioni

Su un piano, il raggio vettore $\vec{r}$ può essere specificato mediante la distanza $r = |\vec{r}|$ dall'origine O e la sua direzione: quest'ultima è definita dall'angolo ϕ che esso forma con l'asse x — vd Fig. 4.7. In tal caso, valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \end{aligned} \tag{4.16}$$

La coppia di valori $(r; \phi)$ costituisce le *coordinate polari piane* del punto P.

4.5.2 Coordinate cilindriche e sferiche in 3D

Quando un problema è caratterizzato da un asse di simmetria, si sceglie l'asse z del sistema cartesiano lungo l'asse di simmetria e gli assi x, y su un piano ortogonale. In tal caso, le coordinate x, y possono essere rimpiazzate da una distanza ρ dall'asse z e da un angolo ϕ, come nel caso bidimensionale: la situazione è indicata in Fig. 4.8 a sinistra. La conversione da (x, y) a $(r; \phi)$ è sempre:

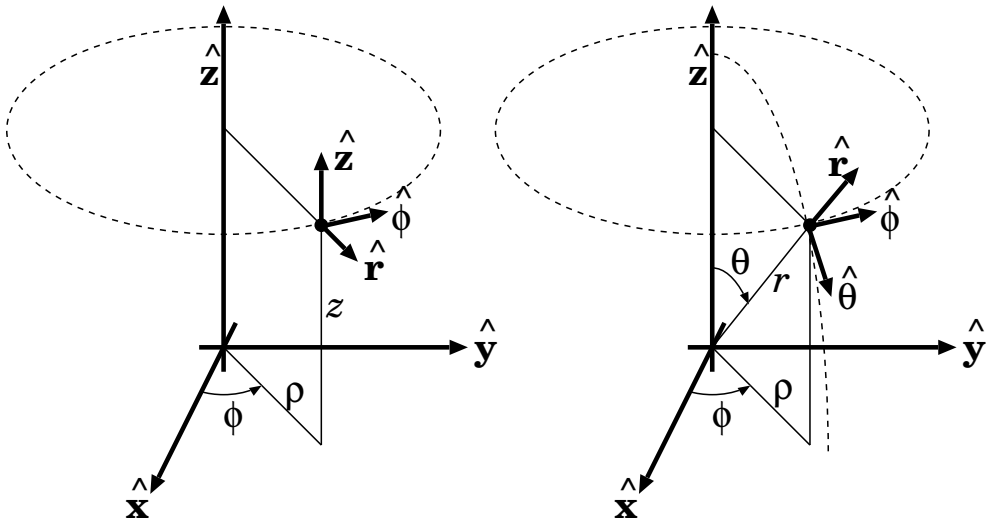


Figura 4.8: *Coordinate polari cilindriche (a sinistra) e sferiche (a destra).*

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\phi \\ y &= \rho \sin\phi \\ z &= z \end{aligned} \tag{4.17}$$

(la terza equazione è lì giusto per ricordare che ci troviamo in 3 dimensioni). La terna $(\rho; \phi; z)$ costituisce le *coordinate cilindriche.*

Viceversa, quando il problema è a simmetria sferica, la scelta degli assi cartesiani è del tutto arbitraria. In tal caso r indica la distanza dall'origine O e si usano due angoli per definire la direzione, come in Fig. 4.8 a destra. Si chiama θ l'*angolo polare*, formato dal raggio vettore $\vec{\boldsymbol{r}}$ con il versore $\hat{\boldsymbol{z}}$: pertanto la coordinata cartesiana z deve essere data da $z = r\cos\theta$. Viceversa, la proiezione $\vec{\boldsymbol{r}}_\perp$ di $\vec{\boldsymbol{r}}$ sul piano (x, y) ha modulo $\rho = |\vec{\boldsymbol{r}}_\perp| = r\sin\theta$. Inoltre si definisce ϕ come l'*angolo azimuthale*, formato da $\vec{\boldsymbol{r}}_\perp$ e il versore $\hat{\boldsymbol{x}}$. Pertanto le coordinate x, y sono esprimibili come $x = \rho\cos\phi$ e $y = \rho\sin\phi$.

La terna $(r; \theta, \phi)$ costituisce le *coordinate sferiche.* La conversione da coordinate cartesiane a coordinate sferiche è data dalle seguenti formule:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{4.18}$$

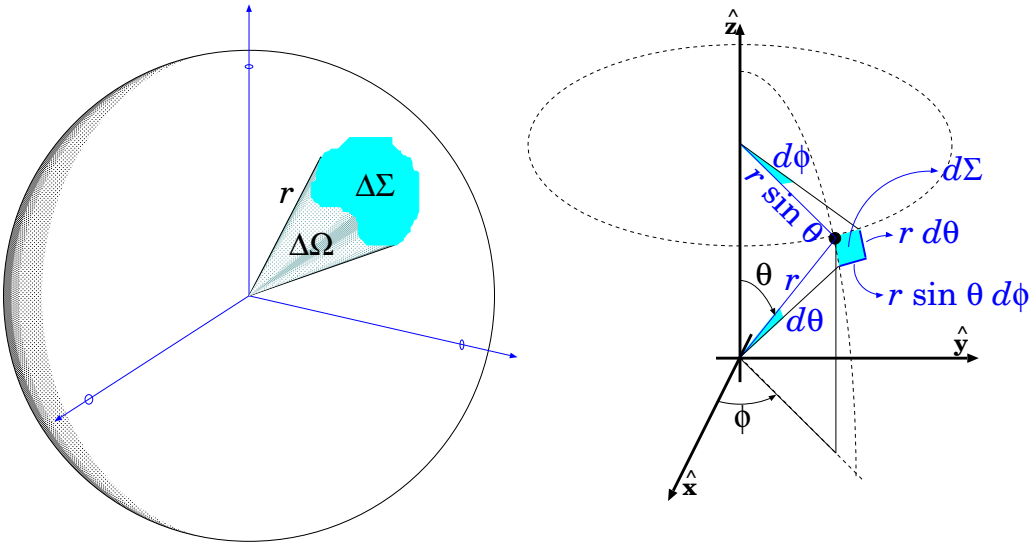


Figura 4.9: *Sinistra: definizione di angolo solido. Destra: calcolo di un angolo solido infinitesimo.*

Nelle coordinate sferiche, l'asse z si chiama *asse polare*, θ si chiama *angolo polare* e ϕ *angolo azimuthale*.

4.6 Angoli solidi

Gli angoli solidi sono misure di apertura di coni o conoidi. Un conoide come quello raffigurato in Fig. 4.9(sinistra) intercetta su una sfera di raggio r una superficie $\Delta\Sigma$ che è proporzionale a r^2, e all'apertura del conoide. Pertanto, l'apertura del conoide viene *definita* come:

$$\Delta\Omega \;=\; \frac{\Delta\Sigma}{r^2} \tag{4.19}$$

Gli angoli solidi si misurano in "stereo-radianti" (sterad). Poiché la superficie totale di una sfera è $\Sigma_{sfera} = 4\pi r^2$, l'angolo solido totale è:

$$\text{angolo solido totale} \;=\; 4\pi \text{ sterad} \tag{4.20}$$

Un angolo solido infinitesimo $d\Omega$ può essere espresso in coordinate angolari sferiche. Guardando la Fig. 4.9(destra), la piccola area $d\Sigma$ definita dagli angoli $d\theta, d\phi$ è rettangolare nel limite $d\theta \to 0$, $d\phi \to 0$, pertanto può essere calcolata come prodotto dei suoi lati. Il lato sotteso da $d\theta$ è un

archetto di cerchio di raggio r, quindi vale $r\,d\theta$; il lato sotteso da $d\phi$ è invece un archetto di cerchio di raggio $r\,\sin\theta$, pertanto vale $r\,\sin\theta\,d\phi$. L'area $d\Sigma$ quindi vale:

$$d\Sigma \;=\; (r\,d\theta)\cdot(r\,\sin\theta\,d\phi) \;=\; r^2\,\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

e quindi l'angolo solido $d\Omega$ che sottende $d\Sigma$ vale

$$d\Omega = \frac{d\Sigma}{r^2} \tag{4.21}$$

ovvero:

$$d\Omega \;=\; \sin\theta\,d\theta\,d\phi \tag{4.22}$$

Esercizio 4.4. *Una nave nell'oceano si trova alla latitudine $\lambda = 40°$ Nord e alla longitudine $\phi = 30°$ Ovest, e conosce la propria posizione con un'incertezza di $1°$ sia in latitudine che in longitudine. Pertanto è localizzata in un'area che dipende dalla precisione di tali misure. Quanto è vasta tale area?*

Risposta. *Anzitutto osserviamo che la latitudine è collegata all'angolo polare dalla relazione $\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda$. Quindi l'angolo solido in cui la nave è localizzata è*

$$\Delta\Omega \;=\; \cos\lambda\,\Delta\lambda\,\Delta\phi$$

con $\cos\lambda = 0.766$ *e* $\Delta\lambda = \Delta\phi = 1° = 1.745\cdot 10^{-2}$ rad, *quindi* $\Delta\Omega = 2.33\cdot 10^{-4}$ sterad. *Assumendo il raggio della Terra* $R_\oplus = 6371$ km *troviamo*

$$\Delta\Sigma \;=\; R_\oplus^2\,\Delta\Omega \;=\; 9468\ \mathrm{km}^2$$

Osservazione. *Che forma ha tale area? Con la formula usata, si assume che sia rettangolare, di lati* $(R_\oplus\,\cos\lambda\,\Delta\phi)\ \times\ (R_\oplus\,\Delta\lambda)$. *A rigore, sarebbe più simile a un trapezio, con le basi lungo i paralleli che misurano rispettivamente* $b_{max} = R_\oplus\,\cos\left(\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}\right)\Delta\Phi = 85.8$ km *e* $b_{min} = R_\oplus\,\cos\left(\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}\right)\Delta\Phi = 84.5$ km, *e altezza* $h = R_\oplus\,\Delta\lambda = 11.2$ km. *Il calcolo dell'area viene però uguale.*

4.7 Digressione: misure di distanze astronomiche (*)

La meccanica newtoniana ha uno dei suoi più grandi successi nella descrizione dei moti di oggetti celesti (lune, pianeti, stelle, ...). Per ottenere la formulazione della legge di gravitazione universale (vedi Capitolo 19), e poi per verificare le sue predizioni, è necessario saper misurare le distanze fra gli oggetti celesti: per esempio dalla Terra alla Luna, o dal Sole alla Terra e ai pianeti, o ancora le distanze di altre stelle dal Sistema Solare.

Occorre procedere per passi successivi.

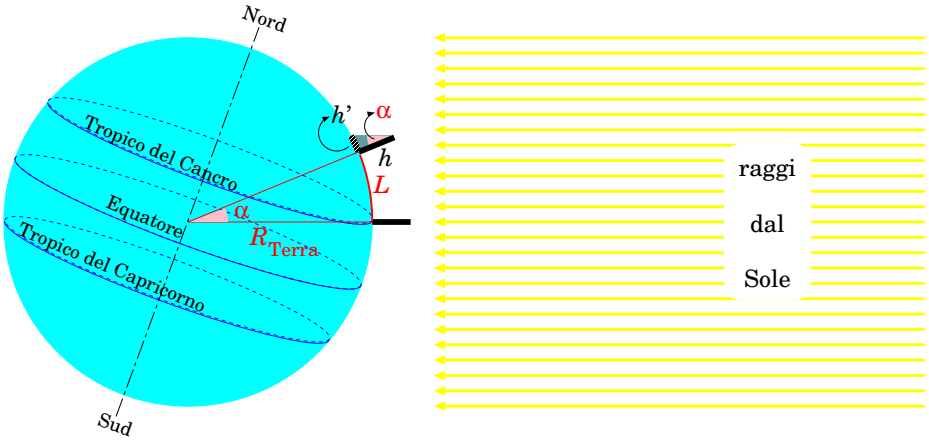


Figura 4.10: *Misura del raggio della Terra.*

4.7.1 Misura del raggio della Terra

Il raggio della Terra, R_T, era noto con buona precisione dai tempi di Eratostene di Cirene (276-194 a.C.). Il metodo è illustrato in Fig. 4.10. Era già accettato che la Terra fosse sferica, e che il Sole fosse sufficientemente lontano da considerare i suoi raggi paralleli. Occorreva scegliere due località sullo stesso meridiano, una delle quali fosse sul tropico, in modo tale che il giorno del solstizio d'estate il Sole si trovasse esattamente allo zenith (cioè a perpendicolo). Le due località erano Alessandria e Syene (odierna Assuan). Conoscendo la distanza lineare L fra le due località e la loro separazione angolare α, si poteva ricavare il raggio della Terra:

$$R_T = \frac{L}{\alpha} \qquad (\alpha \text{ in radianti})$$

La misura di α era effettuata con uno *gnomone*, ovvero un bastone verticale. Confrontando la sua altezza h con la lunghezza h' dell'ombra che esso proiettava a terra si poteva ricavare

$$\tan\alpha = \frac{h'}{h}$$

ottenendo $\alpha = 7°12' = 0.126$ rad. La misura di L era la parte difficile del lavoro: misurare una distanza così lunga (circa 800 km) su terreno vario e su percorsi non precisamente rettilinei.

Oggi sappiamo che il raggio equatoriale della Terra è $R_\oplus = 6371$ km.

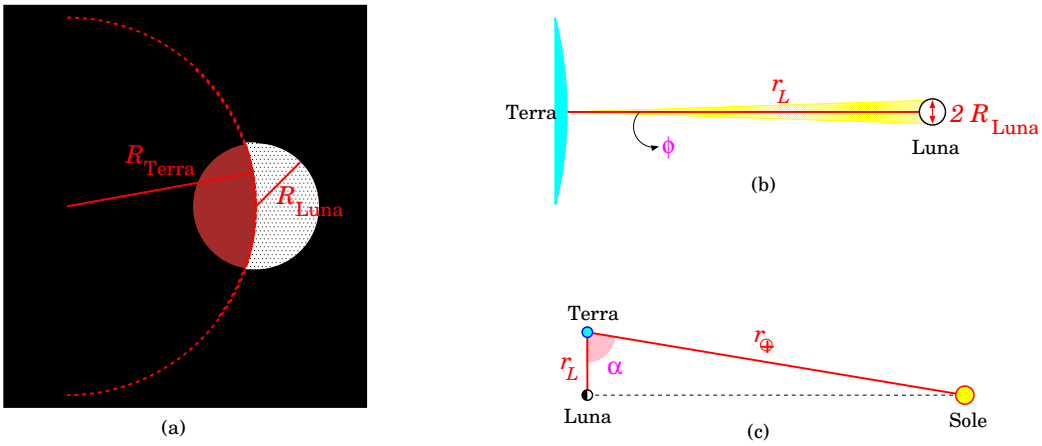


Figura 4.11: *(a): rapporto fra i raggi della Terra e della Luna (R_T, R_L) durante un'eclissi parziale di Luna. (b): schema per calcolare la distanza Terra-Luna (r_L). (c): schema per calcolare la distanza Terra-Sole ($r_\oplus$).*

4.7.2 Distanze fra Terra, Luna e Sole

Durante le eclissi parziali di Luna, il confronto fra la forma della Luna e quella dell'ombra prodotta dalla Terra (Fig. 4.11 (a)) consente di determinare il rapporto $\dfrac{R_L}{R_T}$ fra i raggi della Luna e della Terra. Se ne ricava che il raggio della Luna è $R_L = 1737$ km.

La Luna, osservata dalla Terra, ha un diametro angolare $\phi = 31'$, ovvero $\phi = 0.52° = 0.009$ rad (Fig. 4.11 (b)). Questo angolo sottende il diametro della Luna, $2R_L$, da una distanza r_L, che vogliamo determinare. Essendo ϕ molto piccolo, possiamo confondere il diametro della Luna (una corda) con un archetto, ottenendo così $2R_L = r_L \cdot \phi$, cioè:

$$r_L \;=\; \frac{2\,R_L}{\phi} \;\simeq\; 384\,000 \text{ km}$$

Ora supponiamo che la Luna sia illuminata esattamente a metà dal Sole ("mezza luna", oppure "primo quarto" o "terzo quarto" ...). In questo caso le congiungenti Terra-Luna e Luna-Sole formano un angolo retto (Fig. 4.11 (c)). Chiamando α l'angolo fra le rette Terra-Luna e Terra-Sole, si ricava che $r_L = r_\oplus \cos\alpha$, ovvero:

$$r_\oplus \;=\; \frac{r_L}{\cos\alpha}$$

In linea di principio, misurando α si potrebbe ricavare $r_\oplus$. Occorre notare che questa misura è *difficilissima*! Infatti α è quasi un angolo retto: usando le

distanze corrette, $r_\oplus = 150 \cdot 10^6$ km e $r_L = 384\,000$ km, si trova $\alpha = 89.85°$ [2]. Piccole variazioni $\Delta\alpha$ producono enormi variazioni di $\frac{1}{\cos\alpha}$:

α (°)	$\frac{1}{\cos\alpha}$
89.80	286.4
89.83	336.9
89.84	357.9
89.85 (*)	381.8 (*)
89.86	409.0
89.87	440.5
89.90	572.5

Un errore di 0.01° (un centesimo di grado! precisione di 0.01%) produce un'incertezza relativa su $\frac{1}{\cos\alpha}$ — e quindi su $r_\oplus$ — del 6% o 7% (a seconda che α sia misurato in difetto o in eccesso). A causa della distorsione dei raggi di luce causati dall'atmosfera terrestre, è difficile misurare α con buona precisione [3].

Il diametro angolare del Sole, visto dalla Terra, appare praticamente identico a quello della Luna (ϕ nella Fig. 4.11 (b)), ma il Sole è molto più lontano, quindi anche molto più grande. Il suo raggio è calcolabile come: $R_{Sole} = r_\oplus \frac{\phi}{2} = r_\oplus \cdot \frac{R_L}{r_L}$. Il valore preciso è $R_{Sole} = 695\,000$ km, ovvero 109 volte quello della Terra!

4.7.3 Distanze planetarie

Al giorno d'oggi, le distanze interplanetarie possono essere misurate con buona precisione usando dei radar. Però qui riportiamo le tecniche di misura storiche, perché hanno il pregio di essere didatticamente molto utili, come applicazioni della trigonometria.

[2] Aristarco di Samo, astronomo greco vissuto circa fra il 300 e il 230 a.C., fu il primo a stimare distanze e dimensioni della Luna e del Sole, con i metodi qui descritti. Mentre per la Luna i suoi valori erano abbastanza accurati, per il Sole erano clamorosamente sbagliati: egli infatti misurò alla quadratura un angolo $\alpha = 87°$, e questo lo portò a dedurre una distanza Terra-Sole di $\sim 7 \cdot 10^6$ km: 20 volte più piccola di quella reale. Era comunque un risultato notevole: sia per il metodo, che per il risultato, che rivelava una distanza enorme per la concezione dell'epoca!

[3] Nella Sezione 4.7.3 verrà spiegato come ricavare distanze Sole-pianeta (r_P) conoscendo

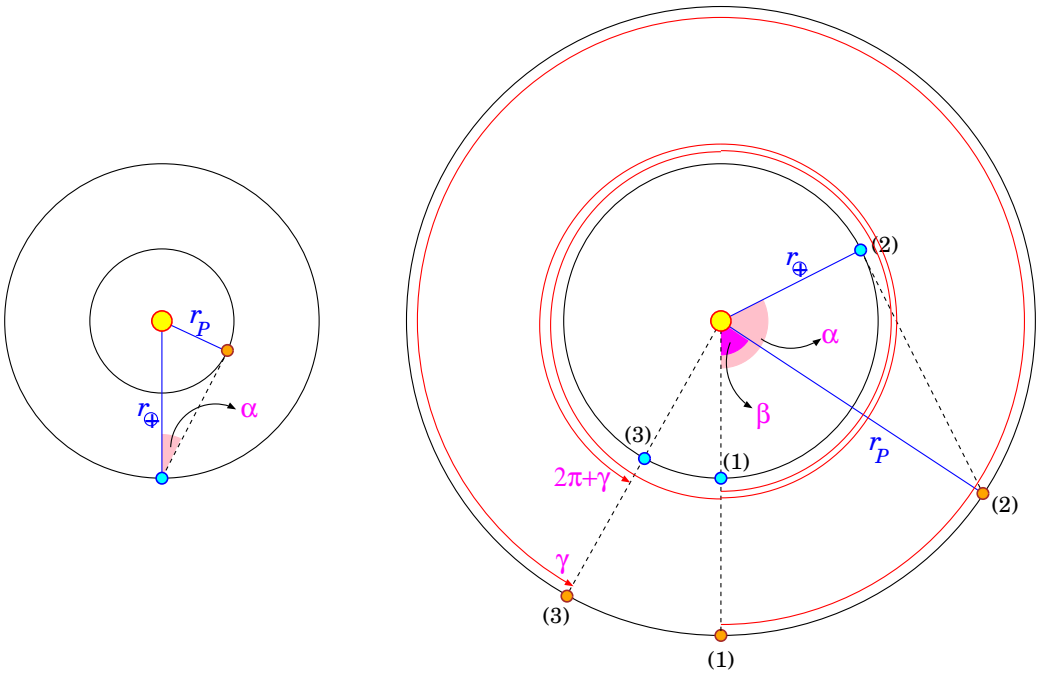


Figura 4.12: *Misura della distanza R_P di un pianeta dal Sole: a sinistra, per un pianeta interno; a destra per un pianeta esterno. Nella figura a destra si devono considerare 3 momenti: (1) prima opposizione, (2) quadratura, (3) seconda opposizione.*

Le orbite dei pianeti intorno al Sole sono approssimativamente circolari. Con misure angolari, si può calcolare il rapporto $\frac{r_P}{r_\oplus}$, tra la distanza r_P di un pianeta dal Sole, e la distanza $r_\oplus$ della Terra dal Sole. Occorre distinguere due casi:

- pianeta "interno", ovvero con $r_P < r_\oplus$ (Mercurio e Venere);
- pianeta "esterno", ovvero con $r_P > r_\oplus$ (Marte, Giove, Saturno, Urano, Nettuno).

Pianeta interno

Per un pianeta interno, occorre attendere il momento in cui si trova "in quadratura" con la Terra, ovvero quando le congiungenti Terra-pianeta e Sole-pianeta formano un angolo retto — vedi Fig. 4.12 (sinistra). A questo

$r_\oplus$: misurando la distanza Terra-pianeta con il radar si può invertire l'argomento e calcolare $r_\oplus$ con una migliore accuratezza.

punto si misura la distanza angolare α fra il pianeta e il Sole, e si ricava:

$$\frac{r_P}{r_\oplus} = \sin\alpha$$

La quadratura si verifica quando α è massimo; oppure, se si riescono ad osservare le fasi del pianeta, quando esso è esattamente illuminato a metà.

Pianeta esterno

Per un pianeta esterno, il discorso si complica. Si guardi la Fig. 4.12 (destra). In quanto segue si parlerà di angoli percorsi dalla Terra lungo la sua orbita intorno al Sole: facciamo notare che tali angoli sono desumibili dalla posizione apparente del Sole sullo sfondo delle "stelle fisse".

(1) Si parte quando il pianeta e la Terra si trovano "in opposizione", ovvero quando sono allineati dalla stessa parte del Sole.

(2) Quando il pianeta si trova in quadratura con la Terra (verificabile perché le congiungenti Terra-Sole e Terra-pianeta formano un angolo retto), si misura l'angolo α percorso dalla Terra fra opposizione e quadratura. Nel frattempo il pianeta ha percorso un angolo β (che valuteremo fra breve): la distanza del pianeta dal Sole è tale che

$$r_P = \frac{r_\oplus}{\cos(\alpha-\beta)}$$

Resta da determinare il rapporto fra gli angoli descritti da pianeta e Terra nello stesso tempo:

$$\xi = \frac{\beta}{\alpha}$$

(3) Si attende una nuova opposizione: fra la prima e la seconda opposizione, il pianeta esterno ha compiuto un angolo γ intorno al Sole, mentre la Terra, che orbita più velocemente, ha compiuto un giro in più, quindi un angolo $(2\pi+\gamma)$. Quindi il rapporto fra gli angoli compiuti da Terra e pianeta è

$$\xi = \frac{\gamma}{2\pi+\gamma}$$

Mettendo insieme tutto,

$$\frac{r_P}{r_\oplus} = \frac{1}{\cos\left[\alpha(1-\xi)\right]} = \frac{1}{\cos\left[\alpha\,\dfrac{2\pi}{2\pi+\gamma}\right]}$$

dove, ricordiamo, α e γ sono quantità misurabili.

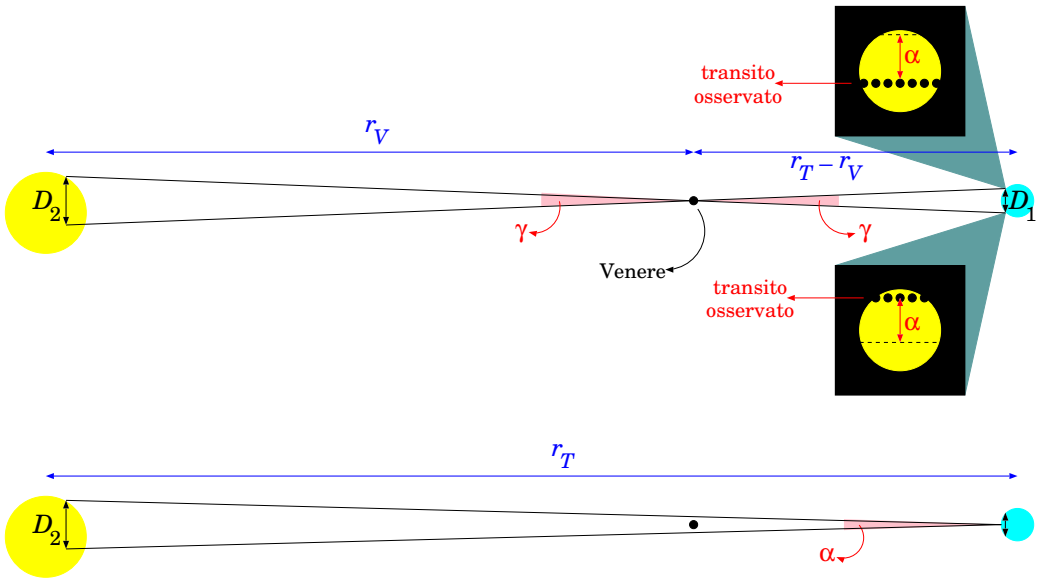


Figura 4.13: *Metodo del transito di Venere.*

Transito di Venere

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto come determinare $\frac{r_P}{r_\oplus}$. Se solo si conoscesse $r_\oplus$... In Sezione 4.7.2 abbiamo notato come sia estremamente difficile misurare con accuratezza $r_\oplus$. L'uso moderno del radar consente però di misurare la distanza $r_{\oplus P}$ fra Terra e pianeta. In condizioni di quadratura, misurando $r_{\oplus P}$ e α si possono ricavare sia $r_\oplus$ che r_P:

$$r_\oplus = \frac{r_{\oplus P}}{\cos\alpha} \quad ; \quad r_P = r_{\oplus P} \tan\alpha$$

Un metodo geometrico interessante, proposto da Halley nel 1691, è basato sull'osservazione del transito di Venere davanti al disco solare, da due diversi punti di vista. Come mostrato in Fig. 4.13 (in alto), se le due osservazioni vengono fatte da due punti a distanza D_1 sulla Terra, esse appariranno spostate di una distanza D_2 sul disco solare: chiamando $r_♀$ e $r_\oplus$ rispettivamente le distanze di Venere e della Terra dal Sole, la relazione fra D_1 e D_2 è data da:

$$\frac{D_2}{r_♀} = \gamma = \frac{D_1}{r_\oplus - r_♀}$$

Inoltre D_2 può essere stimato dalla separazione angolare α fra le due osservazioni del transito, come mostrato in Fig. 4.13 (in basso):

$$\alpha = \frac{D_2}{r_\oplus}$$

Mettendo tutto insieme:

$$\alpha \frac{r_\oplus}{r_♀} = \frac{D_1}{r_\oplus - r_♀}$$

Ora ricordiamo che $f \equiv \frac{r_♀}{r_\oplus}$ può essere calcolato quando Venere è in quadratura, dunque è noto. Esprimendo $r_♀ = f\, r_\oplus$ si ottiene

$$r_\oplus = \frac{f}{1-f} \frac{D_1}{\alpha}$$

In questa formula, tutte le quantità sono note — anche D_1, che è la distanza fra i due luoghi di osservazione — pertanto la distanza Terra-Sole è calcolabile.

Dopo la proposta di Halley, il primo transito di Venere avvenne nel 1761 (Halley era morto nel 1742), e fu osservato da diverse spedizioni di astronomi: le varie estrazioni della distanza Terra-Sole oscillavano fra $123 \cdot 10^6$ km e $157 \cdot 10^6$ km.

4.7.4 Distanze stellari

Una tecnica per misurare la distanza di stelle "vicine" è il "metodo della parallasse", schematizzato in Fig. 4.14. A causa dello spostamento della Terra intorno al Sole, una stella più vicina sembra spostarsi rispetto allo sfondo delle stelle più lontane. Lo spostamento angolare massimo (rilevato in 6 mesi) è 2α, dove α viene chiamato "angolo di parallasse".

Il massimo spostamento della Terra è pari al diametro dell'orbita, $2r_\oplus = 300 \cdot 10^6$ km. Misurando l'angolo di parallasse α, dello spostamento apparente della stella vicina sullo sfondo delle stelle più lontane, si può determinare la sua distanza D. Basta infatti trattare la distanza $2r_\oplus$ come un archetto di circonferenza di raggio D sotteso dall'angolo 2α — la qual cosa è sempre possibile, trattandosi di angoli molto piccoli, cosicché $2r_\oplus = 2\alpha D$ e quindi:

$$D = \frac{r_\oplus}{\alpha} \tag{4.23}$$

La tecnica funziona bene finché l'angolo α di parallasse non diventa troppo piccolo.

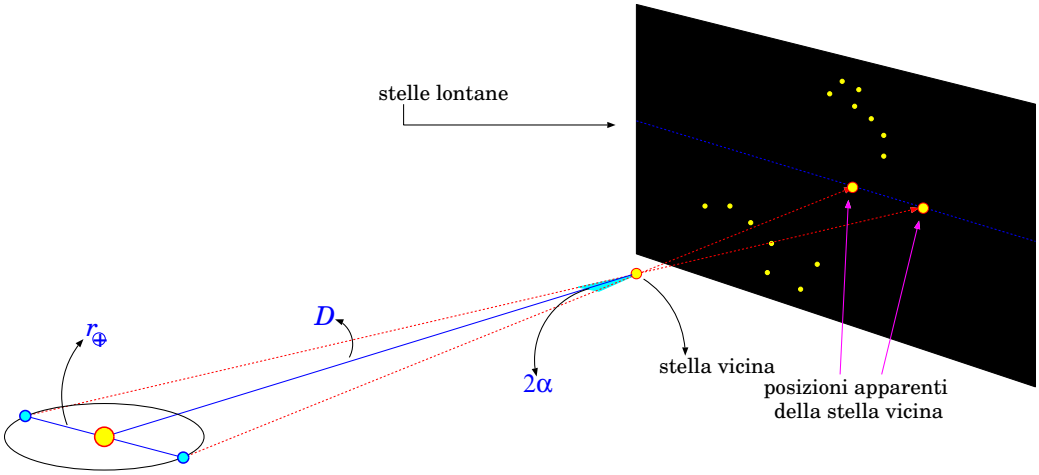


Figura 4.14: *Spostamento apparente di una stella "vicina" rispetto alle stelle "più lontane" che appaiono fisse sullo sfondo.*

Le distanze astronomiche vengono spesso espresse in *parsec*: un oggetto celeste si trova a distanza di 1 pc se il suo angolo di parallasse è pari a 1 secondo di arco ($1''$). Essendo $r_\oplus = 149.6 \cdot 10^6$ km, e $1'' = 4.848 \cdot 10^{-6}$ rad, si trova 1 pc $= \dfrac{r_\oplus}{1''} = 3.086 \cdot 10^{16}$ m $= 3.086 \cdot 10^{13}$ km.

Un'altra unità di misura frequente in astronomia è l'anno-luce, ovvero la distanza percorsa dalla luce in un anno. La luce percorre 299 800 km in un secondo. In un giorno ci sono 24 h $= 24 \cdot 3600$ s $= 86\,400$ s; in un anno ci sono 365.25 giorni $= 31\,557\,600$ s. Quindi un anno-luce vale 1 ly $= (299\,800$ km/s$) \times (31\,557\,600$ s$) = 9.461 \cdot 10^{12}$ km $= 9.461 \cdot 10^{15}$ m — quasi 9 500 miliardi di km.

Osserviamo che 1 pc $\simeq 3.26$ ly.

Esercizio 4.5. *Il sistema stellare più vicino al Sistema Solare è quello di Alpha Centauri, che dista 4.3 anni-luce. Qual è l'angolo di parallasse di Alpha Centauri?*

Se il più piccolo angolo di parallasse che si riesce a misurare da Terra con precisione accettabile è di 1/100 *di secondo d'arco, qual è la massima distanza che si può misurare con il metodo della parallasse?*

Il satellite Hipparcos (1989-93) riusciva a misurare angoli di parallasse con la precisione del millesimo di secondo d'arco: con quale precisione misura una distanza di 500 pc*?*

Risposte. *La distanza di Alpha Centauri in km è* $D \simeq 4.3 \times 9.5 \cdot 10^{12}$ km $= 4.09 \cdot 10^{13}$ km. *L'angolo di parallasse vale* $\alpha = \dfrac{r_\oplus}{D} \simeq 3.7 \cdot 10^{-6}$ rad $\simeq 0.7''$. *È un angolo molto piccolo, la qual cosa ci consente l'approssimazione del diametro dell'orbita con un archetto.*

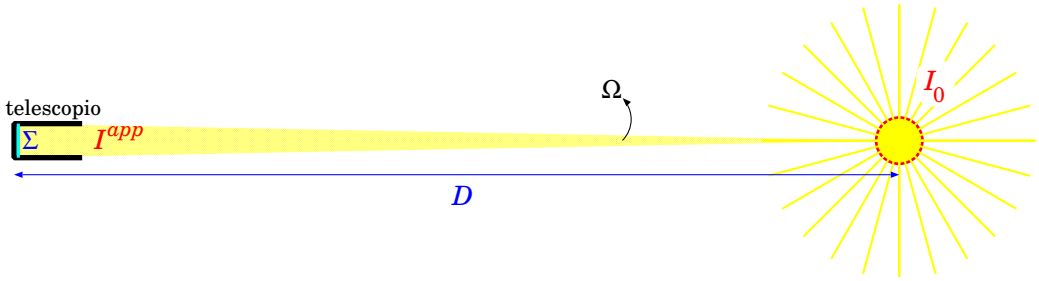


Figura 4.15: *Legge della "distanza quadratica inversa" per la luminosità apparente di una stella.*

L'angolo minimo di parallasse misurabile da Terra è $\alpha_{min} = (10^{-2})'' \simeq 5 \cdot 10^{-8}$ rad. *Quindi la distanza massima misurabile con la parallasse è* $D_{max}^{parallasse} = 100$ pc $\simeq 3 \cdot 10^{15}$ km $\simeq 330$ ly.

Infine, indichiamo con $\sigma = 0.001''$ *la precisione con cui Hipparcos misura* α*; quindi la misura angolare è* $\alpha \pm \sigma$. *Avremo dunque un valore stimato* $D = \frac{r_\oplus}{\alpha}$ *che giace in un intervallo di incertezza* $\left[\frac{r_\oplus}{\alpha+\sigma} \; ; \; \frac{r_\oplus}{\alpha-\sigma} \right]$. *Possiamo stimare l'incertezza su* D *come*

$$\sigma_D = \frac{1}{2}\left(\frac{r_\oplus}{\alpha-\sigma} - \frac{r_\oplus}{\alpha+\sigma}\right) = \frac{r_\oplus\,\sigma}{\alpha^2-\sigma^2} = D\,\frac{\sigma}{\alpha}\,\frac{1}{1-\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^2}$$

Ora, $D = 500$ pc *implica* $\alpha = 0.002''$, *quindi* $\frac{\sigma}{\alpha} = 0.5$. *Si ricava che*

$$\frac{\sigma_D}{D} = \frac{\sigma}{\alpha}\,\frac{1}{1-\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^2} \simeq 0.7$$

Come si vede, per distanze così grandi (e angoli così piccoli) le incertezze diventano importanti.

Un'altra tecnica per misurare le distanze stellari è basata sulla *luminosità apparente* delle stelle. Ogni stella ha una sua luminosità assoluta I_0 — in generale ignota. In maniera un po' imprecisa, ma sufficiente al nostro scopo, diciamo che I_0 è la "quantità di luce" emessa (oppure la quantità di energia irradiata in onde elettromagnetiche) dalla stella in una certa unità di tempo. La stella emette uniformemente in tutte le direzioni, dunque sull'angolo solido totale di 4π sterad. Un osservatore lontano vede solo una piccola frazione della luminosità: quella che viene raccolta dalla superficie sensibile Σ del suo strumento di osservazione (per esempio lo specchio di un telescopio). Se

D è la distanza della stella, l'angolo solido di luce che viene raccolta dallo strumento è $\Omega = \dfrac{\Sigma}{D^2}$, pertanto la luminosità "apparente" della stella è

$$I^{app} = I_0 \frac{\Omega}{4\pi} = I_0 \frac{\Sigma}{4\pi} \frac{1}{D^2} \tag{4.24}$$

Cioè la luminosità apparente decresce come l'inverso della distanza al quadrato (legge della "distanza quadratica inversa", Fig. 4.15). Se conoscessimo la luminosità assoluta I_0, misurando la luminosità apparente I^{app} potremmo calcolare la distanza D della stella.

Esistono stelle particolari, le Cefeidi, che sono riconoscibili perché sono dotate di una pulsazione: con periodi che possono andare dai giorni ai mesi, il loro diametro e la loro luminosità aumentano e poi diminuiscono, ciclicamente. Per le Cefeidi più vicine, si può misurare la loro distanza D con la parallasse (Eq. (4.23)), quindi risalire alla loro luminosità assoluta I_0 mediante l'Eq. (4.24): si è osservato che la luminosità assoluta è una funzione del periodo della pulsazione. Questa relazione può essere usata per dedurre la luminosità assoluta di Cefeidi più lontane (non misurabili con la parallasse), osservandone il periodo. Quindi si può usare direttamente l'Eq. (4.24) per determinarne la distanza.

Esercizio 4.6. *Una delle stelle Cefeidi più vicine a noi è la Stella Polare. Con la parallasse, si determina la sua distanza $D_1 \simeq 300$ anni-luce. Nella galassia di Andromeda sono state osservate stelle Cefeidi con pulsazioni simili alla Stella Polare, quindi presumibilmente con luminosità assolute simili. La luminosità apparente di tali stelle è circa 70 milioni di volte inferiore a quella della Stella Polare. Quanto dista la galassia di Andromeda?*

Risposta. *Indicando con gli indici 1 e 2 rispettivamente la Stella Polare e una delle Cefeidi di Andromeda, abbiamo $\dfrac{I_1^{app}}{I_2^{app}} \simeq 4 \cdot 10^7$. Assumendo che I_0 sia uguale, deve essere $\dfrac{I_1^{app}}{I_2^{app}} = \left(\dfrac{D_2}{D_1}\right)^2$, ovvero $D_2 = D_1 \sqrt{\dfrac{I_1^{app}}{I_2^{app}}} \simeq D_1 \cdot 8400$. La galassia di Andromeda dista circa 2.5 milioni di anni-luce.*

Nota storica. *La Via Lattea ha la forma di un disco con bracci a spirale; il suo diametro è $\approx 100\,000$ ly. L'osservazione di stelle Cefeidi lontane è stata storicamente importantissima, perché ha permesso di capire che esistono strutture stellari esterne alla Via Lattea.*

Con la luminosità apparente delle stelle Cefeidi si riescono a misurare distanze fino a $\approx 10^7$ ly. Per distanze maggiori, si usa un altro tipo di "candela", ovvero le *supernovae I-a*. Una supernova è il processo finale di una stella molto massiva che, terminato il suo ciclo di reazioni di fusione nucleare,

subisce un collasso gravitazionale del nucleo, che libera energia causando un'espansione molto rapida degli strati esterni. Il risultato è il rilascio di una enorme quantità di energia in tempi rapidi: le supernovae sono gli oggetti astrofisici più luminosi dell'Universo. In particolare, le *supernovae I-a* si formano in sistemi binari, in cui una stella è molto massiva e compatta (per esempio una nana bianca) e l'altra è molto estesa (per esempio una gigante). La nana bianca "succhia" materia dalla gigante, accrescendosi, fino a diventare sufficientemente massiva da subire un collasso gravitazionale, che innesca la supernova. Il collasso avviene quando la nana bianca raggiunge una massa ben precisa: 1.4 masse solari (limite di Chandrasekhar); questo fissa anche un valore preciso della luminosità della supernova I-a.

I 3 metodi illustrati finora (parallasse, Cefeidi, supernovae I-a) si applicano a intervalli di distanze diversi. L'unico che fornisce una misura assoluta è quello della parallasse: pertanto viene usato per calibrare il metodo delle Cefeidi. Questo a sua volta è usato per calibrare il metodo delle supernovae.

Capitolo 5

Derivazione e integrazione in più dimensioni (*)

Gli argomenti di questo capitolo sono di utilità generale. Le derivate parziali vengono utili quando si debba mettere in relazione forze conservative con le rispettive energie potenziali (Sezione 13.9), o quando si debbano calcolar forze di pressione, in fluidodinamica (Sezione 18.2.1). Gli integrali in 3 dimensioni sono invece necessari, per esempio, negli studi sui corpi rigidi, per calcolare centro di massa e momenti di inerzia (Sezione **??**). Man mano che questi concetti verranno necessari, saranno reintrodotti nei rispettivi capitoli; qui ne diamo una trattazione generale.

5.1 Derivate parziali

Una funzione f può dipendere da diverse variabili. In tal caso, dovendo fare una derivata, occorre specificare rispetto a quale variabile.

Per fissare le idee, consideriamo una funzione $f \equiv f(x, y, z, t, \dots)$. Per ciascuna delle variabili $x, y, z, t, \dots$ si può definire il limite del rapporto incrementale, similmente a quanto fatto nell'Eq. (3.1):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial x} &\equiv \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z, t) - f(x,y,z,t)}{\Delta x} \\
\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial y} &\equiv \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z, t) - f(x,y,z,t)}{\Delta y} \\
\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial z} &\equiv \frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z+\Delta z, t) - f(x,y,z,t)}{\Delta z} \\
\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial t} &\equiv \frac{\partial f}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x, y, z, t+\Delta t) - f(x,y,z,t)}{\Delta t}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

I simboli $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, ... si leggono "*derivata parziale* di f rispetto a x, rispetto a y, etc..." Come si vede, nulla di concettualmente diverso dalla derivata "ordinaria" definita in Eq. (3.1). Semplicemente, una particolare variabile di cui f è funzione viene variata, mentre le altre sono mantenute fisse.

5.2 Variazione di una funzione di più variabili

Per una funzione di più variabili, $f \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, vale uno sviluppo in serie di Taylor simile a quello dato nell'Eq. (3.11) per una sola variabile. La forma generale è complicata da tutte le possibili combinazioni di variabili. Qui ricordiamo solo l'espansione fino al primo ordine:

$$\begin{aligned} f(x_1 + dx_1, \ldots, x_n + dx_n) \simeq\ & f(x_1, \ldots, x_n) \\ & + \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_p} \cdot dx_p \\ & + \mathcal{O}(2) \end{aligned} \tag{5.2}$$

e al secondo ordine:

$$\begin{aligned} f(x_1 + dx_1, \ldots, x_n + dx_n) \simeq\ & f(x_1, \ldots, x_n) \\ & + \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_p} \cdot dx_p \\ & + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_p \partial x_q} \cdot dx_p dx_q \\ & + \mathcal{O}(3) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Anche qui $\simeq$ ci ricorda che le espressioni contengono delle approssimazioni, e $\mathcal{O}(2), \mathcal{O}(3)$ indicano che l'"errore" commesso in queste approssimazioni sono proporzionali a prodotti di $dx_1, \ldots, dx_n$ in cui la somma di tutti gli esponenti è rispettivamente 2 e 3.

Le Eq. (5.2) e Eq. (5.3) si scrivono spesso esprimendo direttamente la

variazione della funzione:

$$df \;=\; \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_p} \cdot dx_p \;+\; \mathcal{O}\,(2) \tag{5.4}$$

oppure

$$df \;=\; \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_p} \cdot dx_p \;+\; \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_q} \cdot dx_p dx_q \;+\; \mathcal{O}\,(3) \tag{5.5}$$

5.2.1 Gradiente e matrice Hessiana

La totalità delle derivate prime parziali, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ costituisce un oggetto matematico a n componenti che si chiama *gradiente* di f e si indica con $\vec{\boldsymbol{\nabla}}$:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} f \;\equiv\; \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \,,\; \frac{\partial f}{\partial x_2} \,,\; \ldots \,,\; \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \tag{5.6}$$

Analogamente, la totalità delle derivate seconde parziali, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_q}$, con $p, q = 1, \ldots, n$, costituisce un altro oggetto matematico a $n \times n$ componenti, che si chiama *matrice Hessiana* di f e si indica spesso con $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}[f] \;\equiv\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

5.3 Variazione di una funzione composta

Supponiamo di avere una funzione di più variabili, $f \equiv f(x_1, \ldots, x_n)$, in cui tutte le variabili dipendono a loro volta da una sola variabile t. È un caso che in Fisica si incontra spesso [1]. Quindi, il valore di f dipende indirettamente da t, attraverso le variabili $x_1, \ldots, x_n$. La variazione di f, al primo ordine

[1] Per esempio il valore della pressione P in un fluido potrebbe dipendere dalle coordinate x, y, z in cui la vado a misurare con il manometro, quindi $P \equiv P(x, y, z)$. Se al passare del tempo t sposto il manometro, allora $x \equiv x(t),\; y \equiv y(t),\; z \equiv z(t)$. Il manometro "sente" una variazione di pressione nel tempo, cioè P dipende da t indirettamente, attraverso x, y, z.

dello sviluppo in serie di Taylor, è data dall'Eq. (5.4), dove riscriveremo dx_p facendo uso dell'Eq. (3.14): $dx_p = \dfrac{dx_p}{dt}dt$. Si ottiene dunque:

$$\begin{aligned} df &\equiv f(x_1(t+dt),\ldots,x_n(t+dt)) - f(x_1(t),\ldots,x_n(t)) \\ &= \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_p} \cdot \frac{dx_p}{dt} \cdot dt \end{aligned} \tag{5.8}$$

Concludiamo con il caso più generale, in cui $f \equiv f(x_1,\ldots,x_n)$, e tutte le variabili dipendono a loro volta da m altre variabili $\xi_1,\ldots,\xi_m$, cioè $x_p \equiv x_p(\xi_1,\ldots,\xi_m)$. La variazione di f, al primo ordine, è sempre data dall'Eq. (5.4), ma ora riscriveremo le variazioni dx_p facendo uso ancora dell'Eq. (5.4): $dx_p = \displaystyle\sum_{r=1}^{m} \frac{\partial x_p}{\partial \xi_r} d\xi_r$. Mettendo insieme tutto si ottiene:

$$\begin{aligned} df &\equiv f(x_1(\xi_1+d\xi_1,\ldots,\xi_m+d\xi_m),\ldots,x_n(\xi_1+d\xi_1,\ldots,\xi_m+d\xi_m)) \\ &\quad -f(x_1(\xi_1,\ldots,\xi_m),\ldots,x_n(\xi_1,\ldots,\xi_m)) \\ &= \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_p} \cdot \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial x_p}{\partial \xi_r} \cdot d\xi_r \end{aligned} \tag{5.9}$$

5.4 Integrali in 2 o 3 dimensioni

Molto spesso in Fisica si devono affrontare integrali in più dimensioni — per esempio integrando una funzione $f(x,y)$ in un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, oppure $f(x,y,z)$ in un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Si scrivono dunque espressioni del tipo

$$\begin{aligned} &\int_\Omega f(x,y)\, d\Sigma && \text{(in 2 dimensioni)} \\ &\int_\Omega f(x,y,z)\, dV && \text{(in 3 dimensioni)} \end{aligned} \tag{5.10}$$

Si tratta di generalizzazioni di quanto introdotto in una dimensione, Eq. (3.5): anche in questi casi l'integrale è calcolato come una somma di infiniti termini

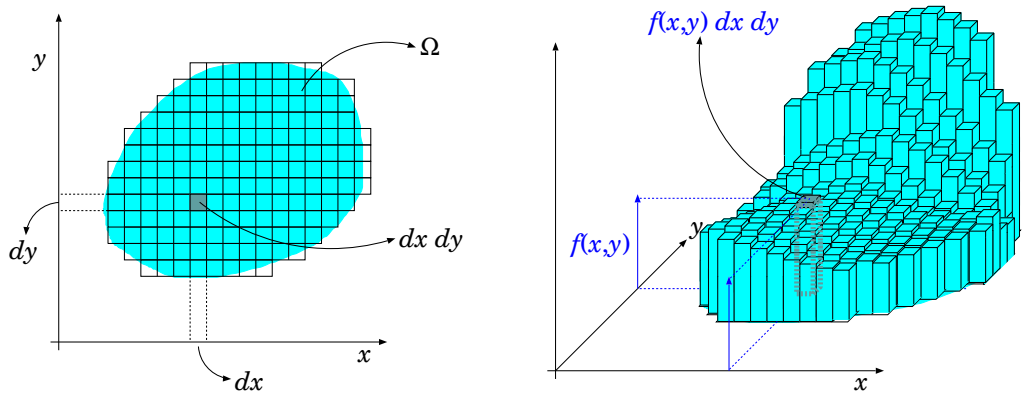


Figura 5.1: *Visualizzazione geometrica dell'integrale 2-dimensionale* $\int_\Omega f(x,y)dxdy$. *A sinistra: il dominio di integrazione* Ω, *suddiviso in tante piccole aree* $d\Sigma = dx \cdot dy$. *A destra: l'integrale come somma di tanti elementini* $f(x,y)dxdy$, *ciascuno pari al volumetto di un parallelepipedo di base* $dx \times dy$ *e altezza* $f(x,y)$.

infinitesimi, ciascuno pari al valore della funzione f calcolata in un dato punto, moltiplicata per la misura di un piccolo intorno di tale punto. In 2-D la misura è una piccola area $d\Sigma$, mentre in 3-D la misura è un volumetto dV.

Lavorando in coordinate cartesiane, esse possono essere scritte come:

$$\begin{array}{lcll} d\Sigma & \equiv & dx\,dy & \text{(coordinate cartesiane, 2 dimensioni)} \\ dV & \equiv & dx\,dy\,dz & \text{(coordinate cartesiane, 3 dimensioni)} \end{array} \tag{5.11}$$

La visualizzazione grafica di un integrale in 2-D è illustrata in Fig. 5.1.

Rispetto al caso 1-D, si ha subito una complicazione: in generale, il dominio Ω non è esprimibile come un semplice prodotto cartesiano $[x_1; x_2] \times [y_1; y_2]$, il che significa che l'intervallo su cui scorre y dipende dal valore di x — e viceversa — anche in maniera complicata — vedi Fig. 5.2.

In generale, questi integrali si risolvono in maniera "numerica", al computer. L'idea per procedere è la seguente. Anzitutto, si definisce una "funzione caratteristica":

$$\chi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x, y \in \Omega \\ 0 & \text{se } x, y \notin \Omega \end{cases}$$

Poi, se possibile, si individua un rettangolo $[x_1; x_2] \times [y_1; y_2]$ che contiene Ω:

$$\Omega \subset [x_1; x_2] \times [y_1; y_2]$$

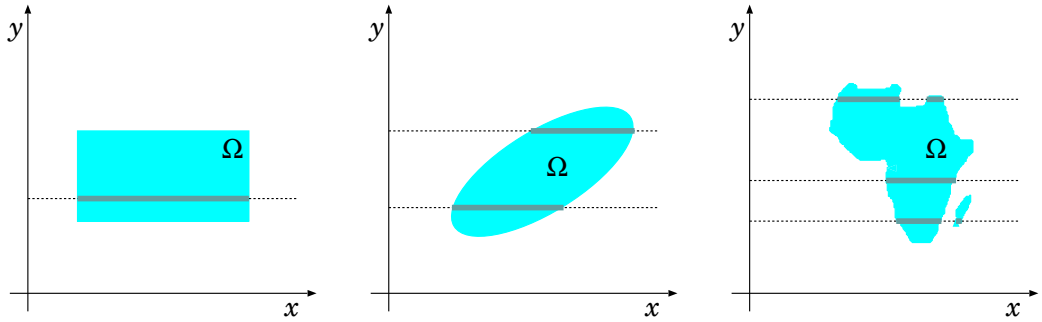


Figura 5.2: *Esempi di domini di integrazione Ω: a parte il caso semplice di un dominio rettangolare, i possibili valori di x dipendono da y, anche in maniera piuttosto complicata!*

(al limite gli estremi del rettangolo possono essere all'infinito...) A questo punto

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x,y)d\Sigma &= \int_{\mathbb{R}^2} d\Sigma\, \chi(x,y)f(x,y) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\int_{y_1}^{y_2} dy\, \chi(x,y)f(x,y)\right] \\ &= \int_{y_1}^{y_2} dy \left[\int_{x_1}^{x_2} dx\, \chi(x,y)f(x,y)\right]\end{aligned}$$

Quindi l'integrale 2-D viene ridotto al calcolo di due integrali 1-D — si può integrare prima su y e poi su x, o viceversa [2].

Al computer, l'integrale viene calcolato come somma di tutti i contributi $\chi(x,y)f(x,y)\cdot dx\cdot dy$: questi vengono scelti "piccoli" ma ovviamente non possono essere infinitesimi, pertanto il risultato sarà approssimato. Si può valutare l'effetto dell'approssimazione, per esempio ripetendo il calcolo sfasando la "griglia" in (x,y) di $\pm dx/2$ lungo x, oppure di $\pm dy/2$ lungo y, oppure adottando un passo dx, dy più fine.

Tutto quanto detto si può ripetere anche per gli integrali in 3-D.

5.4.1 Coordinate cartesiane e angolari

Se il problema è particolarmente simmetrico, nella forma della funzione f e/o del dominio Ω, l'integrazione si semplifica adottando il sistema di coordinate opportuno. In alcuni casi l'integrazione può essere fatta in maniera analitica.

[2] L'ordine di integrazione, per funzioni $f(x,y)$ non troppo "patologiche" è ininfluente.

Coordinate cartesiane, 2-D e 3-D

Supponiamo che in 2-D il dominio Ω sia facilmente individuabile, per esempio per ogni x sono noti $y_1(x),\ y_2(x)$ tali che

$$\Omega \ \equiv \ \{ \ (x,y) \ ; \ y_1(x) < y < y_2(x) \ \}$$

Allora

$$\int_\Omega f(x,y)dxdy \ = \ \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \ f(x,y) \right]$$

Analogamente si può procedere in 3-D.

Coordinate polari, 2-D

In alcuni casi, la funzione $f(x,y)$ è meglio esprimibile in coordinate polari: $f(\rho,\phi)$. In tal caso è utile esprimere anche la areola $d\Sigma$ in tali coordinate. Essa è assimilabile a un rettangolino di lati $d\rho$ e $\rho\, d\phi$, pertanto

$$d\Sigma = d\rho \cdot \rho\, d\phi$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \int_\Omega f\, d\Sigma \ &= \ \int \rho\, d\rho \ \left[\int d\phi\, f(\rho,\phi) \right] \\ &= \ \int d\phi \ \left[\int \rho\, d\rho\, f(\rho,\phi) \right] \end{aligned} \tag{5.12}$$

L'ordine dei due integrali è ininfluente, pertanto si sceglie quello più comodo.

Coordinate cilindriche, 3-D

Un caso simile al precedente, ma in 3-D, si ha quando la funzione $f(x,y,z)$ è più facilmente esprimibile in coordinate cilindriche: $f(\rho,\phi,z)$. In tal caso di deve esprimere anche il volumetto dV con le stesse coordinate. Con ragionamenti analoghi ai precedenti, si ottiene

$$dV = d\rho \cdot \rho\, d\phi\, dz$$

e quindi:

$$\int_\Omega f\, dV \ = \ \int \rho\, d\rho \ \left[\int d\phi \ \left(\int dz\, f(\rho,\phi,z) \right) \right] \tag{5.13}$$

Anche qui l'ordine dei 3 integrali è ininfluente.

Coordinate sferiche, 3-D

Se la funzione $f(x, y, z)$ è più facilmente esprimibile in coordinate sferiche, $f(r, \theta, \phi)$, anche il volumetto dV va espresso in tali coordinate. Possiamo pensarlo come un piccolo parallelepipedo di spigoli dr, $r\,d\theta$, $r\,\sin\theta\,d\phi$, pertanto

$$dV = r^2\,dr\,\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

Ne segue che:

$$\int_\Omega f\,dV \;=\; \int r^2\,dr\,\left[\int \sin\theta\,d\theta\,\left(\int d\phi\,f(r,\theta,\phi)\right)\right] \tag{5.14}$$

L'ordine dei 3 integrali è sempre ininfluente.

5.5 Esempi di calcoli di integrali

Questa sezione serve per fare alcuni esempi pratici...

5.5.1 Integrale della Gaussiana

La funzione Gaussiana unitaria è definita come:

$$\mathcal{G}(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

Il fattore $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ è introdotto per avere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(x)dx = 1$$

(come si conviene a una densità di probabilità).

La funzione $\mathrm{e}^{-x^2/2}$ non ha una funzione primitiva calcolabile analiticamente, ovvero non è esprimibile attraverso altre funzioni note (esponenziali, logaritmi, etc). In generale si definisce

$$\mathrm{Erf}(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} dx'\,\mathcal{G}(x')$$

e i suoi valori vanno calcolati con metodi numerici. Però $\mathrm{Erf}(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(x)dx$ è calcolabile analiticamente. Vediamo come fare.

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(x)dx\right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(x)dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(y)dy\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-x^2/2} \mathrm{e}^{-y^2/2} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} dx\, dy\, \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}
\end{aligned}$$

L'integrale è su tutto il piano (x, y). Passiamo alle coordinate polari (ρ, ϕ), cosicché l'elemento di superficie diventa $d\Sigma = \rho\, d\rho\, d\phi$, e $x^2 + y^2 = \rho^2$:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(x)dx\right)^2 &= \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\phi}_{\to\ 2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=+\infty} \rho\, d\rho \mathrm{e}^{-\rho^2/2} \\
&= \int_{\rho=0}^{\rho=+\infty} \rho\, d\rho \mathrm{e}^{-\rho^2} 2
\end{aligned}$$

(la funzione integranda, $\rho\, \mathrm{e}^{-\rho^2/2}$, non dipendeva da ϕ, quindi $\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\phi$ ha dato il fattore 2π). Ora facciamo un cambiamento di variabile: $u = \dfrac{\rho^2}{2}$, cosicché $du = \dfrac{du}{d\rho}\, d\rho \;=\; \rho\, d\rho$. In questo modo:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(x)dx\right)^2 \;=\; \int_{u=0}^{u=+\infty} du\, \mathrm{e}^{-u} \;=\; \left[-\mathrm{e}^{-u}\right]_{u=0}^{u=+\infty} \;=\; 1$$

... e il calcolo è completo.

5.5.2 Volume e superficie di una sfera

Vogliamo trovare il volume $V(R)$ e la superficie $\Sigma(R)$ di una sfera di raggio R (risultati che dovrebbero già essere arcinoti...)

Cominciamo con il volume: mettiamo la sfera nell'origine e usiamo coordinate cilindriche (ρ, ϕ, z). La sfera può essere "affettata" con tanti piani $\perp$ z: ogni "fetta" è un dischetto a quota z, di spessore dz e di raggio $\rho(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$. Il volume del dischetto è quindi:

$$dV(z) \;=\; \pi\, \rho^2\, dz \;=\; \pi\, (R^2 - z^2)\, dz$$

Quindi il volume della sfera è:

$$\begin{aligned} V(R) &= \int_{z=-R}^{z=+R} dV(z) = \pi \int_{z=-R}^{z=+R} dz\,(R^2 - z^2) \\ &= \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=-R}^{z=+R} = \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

Lo stesso volume può essere calcolato suddividendo la sfera in tante "bucce" concentriche, ciascuna di raggio r e spessore dr. Qui usiamo coordinate sferiche. Il volume della "buccia" è $dV(r) = \Sigma(r)\,dr$ — essendo $\Sigma(r)$ da determinare — e quindi

$$V(R) = \int_{r=0}^{r=R} dV(r) = \int_{r=0}^{r=R} \Sigma(r)\,dr$$

Derivando l'equazione rispetto a R si trova

$$\frac{dV(R)}{dR} = \Sigma(R)$$

e utilizzando $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$ si trova:

$$\Sigma(R) = \frac{d}{dR}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = 4\pi R^2$$

5.5.3 Superficie e volume del segmento sferico

Il segmento sferico è lo spazio racchiuso da una calotta che parte dal "polo Nord" e scende per un'altezza h — ovviamente se $h = 2R$ si ottiene la sfera completa.

Per il volume, lavoriamo in coordinate cilindriche, come fatto per la sfera. L'unica differenza è l'intervallo di integrazione in dz è $[R - h; R]$, quindi:

$$V(R,h) = \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=R-h}^{z=R} = \frac{\pi}{3}\,h^2(3R - h)$$

Per la superficie: dividiamo la calotta sferica in tanti "anelli", ciascuno localizzato da un angolo polare θ e sotteso da $d\theta$. Il raggio dell'anello è $\rho = R\sin\theta$ e la sua larghezza $ds = R\,d\theta$, pertanto la sua area è

$$d\Sigma = 2\pi\,\rho\,ds = 2\pi\,R^2\,\sin\theta\,d\theta$$

L'integrale in $d\theta$ va fatto da $\theta = 0$ (polo Nord), fino a un θ_{max} tale che $h = R - R\cos\theta_{max} = R\,(1 - \cos\theta_{max})$:

$$\begin{aligned}
\Sigma(R,h) &= \int_{\theta=0} \theta = \theta_{max} d\Sigma \;=\; 2\pi\, R^2 \int_{\theta=0} \theta = \theta_{max} \sin\theta\, d\theta \\
&= 2\pi\, R^2 \left[-\cos\theta\right]_{\theta=0} \theta = \theta_{max} \;=\; 2\pi\, R^2\, (1 - \cos\theta_{max}) \\
&= 2\pi\, Rh
\end{aligned}$$

Nota: nel limite $h \to 2R$ i risultati per $V(R,h)$ e $\Sigma(R,h)$ tendono a quelli trovati per la sfera (così, per *cross-check*...)

5.5.4 Funzione Γ (*)

La funzione-Γ è così definita:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} du\, u^{(x-1)} \mathrm{e}^{-u} \qquad\qquad (x > 0)$$

La sua proprietà notevole è che

$$\Gamma(x+1) \;=\; x\,\Gamma(x)$$

che si può verificare integrando per parti:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} du\, u^x \mathrm{e}^{-u} \;=\; \left[-\mathrm{e}^{-u} u^x\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} du\, \left(-\mathrm{e}^{-u}\, x\, u^{(x-1)}\right) \\
&= 0 + x\,\Gamma(x)
\end{aligned}$$

(ricorda che $u^x \mathrm{e}^{-u} \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0 \;\; \forall x > 0$).

È facile verificare che $\Gamma(1) = 1$. In generale quindi

$$\Gamma(n) \;=\; (n-1)! \qquad\qquad (n \text{ numero naturale})$$

Calcoliamo $\Gamma(1/2)$: useremo il cambiamento di coordinate $u = r^2/2$, con $du = r\,dr$:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} du\, u^{-1/2} \mathrm{e}^{-u} \;=\; \int_0^{+\infty} dr\, \sqrt{2} \mathrm{e}^{-r^2} 2 \\
&= \sqrt{2}\, \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dr\, \sqrt{2} \mathrm{e}^{-r^2} 2 \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\pi} \;=\; \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Possiamo compilare una tabellina per la funzione Γ calcolata per argomenti interi e semi-interi:

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
		$-\frac{1}{2}$	$-2\sqrt{\pi}$
1	1	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\pi}$
2	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
3	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$
4	6	$\frac{7}{2}$	$\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$
5	24		

5.5.5 Volumi e superfici di ipersfere in N dimensioni (*)

Una ipersfera di raggio r nello spazio N-dimensionale $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ è definita come l'insieme dei punti tali che $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2} \leq r$.

Chiamando $V_N(r)$ il suo volume e $\Sigma_N(r)$ la sua superficie, ci aspettiamo che $V_N(r) \propto r^N$ e $\Sigma_N(r) \propto r^{N-1}$ — ora vogliamo però determinare i coefficienti.

Consideriamo una Gaussiana unitaria in N dimensioni:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_N(x_1, \ldots, x_N) &= \mathcal{G}(x_1)\mathcal{G}(x_2)\cdots\mathcal{G}(x_N) = \prod_{i=1}^{N} \mathcal{G}(x_i) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N \prod_i \mathrm{e}^{-x_i^2/2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N \mathrm{e}^{-(\sum_i x_i^2)/2}
\end{aligned}$$

Ricordando che $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(x)dx = 1$ abbiamo ovviamente che

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{G}_N(x_1, \ldots, x_N)\, dx_1 \cdots dx_N = \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(x)dx\right)^N = 1$$

D'altra parte, possiamo dividere $\mathbb{R}^N$ in gusci sferici concentrici, ciascuno di raggio r e spessore dr. Ciascun guscio ha volume $dV = \Sigma_N(r)dr =$

$A_N r^{N-1} dr$, con A_N da determinare. L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{G}_N(x_1, \ldots, x_N)\, dx_1 \cdots dx_N \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} dx_1 \cdots dx_N \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N \mathrm{e}^{-(\sum_i x_i^2)/2} \\ &= \int_{r=0}^{r=+\infty} \frac{1}{(2\pi)^{(N/2)}} \underbrace{A_N r^{N-1} dr}_{dV} \mathrm{e}^{-r^2/2} \end{aligned}$$

Ora facciamo la sostituzione $u = r^2/2$ e $du = r\, dr$, quindi $r^{N-1} dr = du\, (2u)^{(N/2-1)}$:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{A_N}{(2\pi)^{(N/2)}} \int_{u=0}^{u=+\infty} du\, (2u)^{(N/2-1)} \mathrm{e}^{-u} = \frac{A_N}{(2\pi)^{N/2}} \int_0^{+\infty} u^{N/2-1} \mathrm{e}^{-u} \\ &= \frac{A_N}{2\,\pi^{N/2}} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \end{aligned}$$

Quindi $A_N = \dfrac{2\,\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$, ovvero:

$$\Sigma_N(r) = \frac{2\,\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}\, r^{(N-1)}$$

È facile verificare che per $N = 2$ (circonferenza) e $N = 3$ (sfera) si ottengono i risultati familiari: $\Sigma_2(r) = 2\pi r$ e $\Sigma_3(r) = 4\pi r^2$. Il volume si ottiene integrando la superficie lungo r:

$$V_N(r) = \int_0^r dr'\, \Sigma_N(r') = \frac{2\,\pi^{N/2}}{N\,\Gamma(N/2)}\, r^N$$

Capitolo 6

Vettori

Abbiamo introdotto il concetto di vettore parlando di posizioni e spostamenti nello spazio 3-dimensionale.

In effetti, molte quantità fisiche sono descritte tramite vettori: in generale chiamiamo *vettori* tutte le quantità per cui è necessario definire, oltre alla grandezza, anche l'orientamento [1]. Per contrasto, quelle per cui è sufficiente definire la grandezza, si chiamano *scalari*.

Vediamo alcuni esempi intuitivi, da approfondire in seguito. Se io dicessi: "parto da casa, cammino per mezz'ora alla velocità di 6 km/h, dove arrivo?", uno che mi ascolta, anche se non ha mai studiato la Fisica, obietterebbe: "come faccio a saperlo se non mi dici da che parte ti sei diretto?" Evidentemente, la velocità deve essere definita con un *modulo* (o intensità) e un *orientamento*. Nello studio della cinematica tridimensionale (Capitolo 7) avremo abbondantemente a che fare con la natura vettoriale di velocità e accelerazioni. Anche le forze, che introdurremo con lo studio della dinamica (Capitolo 8), sono grandezze vettoriali. Anche in questo caso, chiunque capisce che spingere una carriola di pietre in orizzontale non è proprio la stessa cosa che cercare di sollevarla in verticale...

Alcuni esempi di quantità scalari con cui abbiamo familiarità sono la massa, la pressione, la temperatura, ...

[1] Nei testi *italiani*, si suole definire una grandezza vettoriale come dotata di *intensità, direzione, e verso* — supponendo che la direzione indichi solo lungo che retta ci stiamo muovendo, mentre il verso dica se andiamo avanti o indietro. Ho preferito evitare questo livello di dettaglio, perché nella letteratura *inglese* "direction" ingloba anche il verso — e prima o poi nello studio della fisica passerete a leggere libri in inglese. D'altronde, anche in italiano, se io dico che sono "diretto a Nord", nessuno si pone il dubbio se io stia andando "verso" Sud. Qui, per "orientamento", si intende dunque l'informazione completa di direzione e verso.

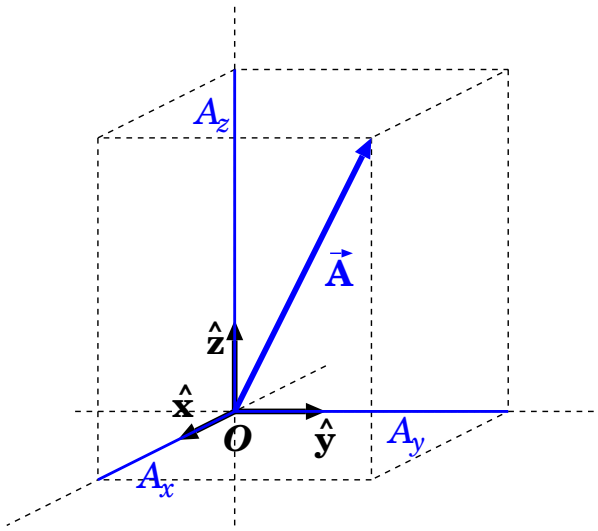


Figura 6.1: *Scomposizione di un vettore nelle sue componenti cartesiane*

In questo capitolo esploreremo le proprietà delle grandezze vettoriali e delle operazioni che possiamo fare con esse.

6.1 Vettori in fisica

In uno spazio 3-dimensionale si definisce un'origine O e un sistema di assi cartesiani orientati lungo segmenti $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$, che costituiscono una *base ortonormale* dello spazio vettoriale: hanno lunghezza unitaria e sono tutti perpendicolari l'un l'altro. Una qualunque quantità $\vec{\boldsymbol{A}}$, dotata di orientamento e lunghezza in questo spazio, può essere identificata attraverso le sue tre componenti A_x, A_y, A_z lungo le tre direzioni cartesiane, come illustrato in Fig. 6.1.

La scomposizione lungo i versori di base si scrive in una delle due forme:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{A}} &= A_x\hat{\boldsymbol{x}} + A_y\hat{\boldsymbol{y}} + A_z\hat{\boldsymbol{z}} \\ \vec{\boldsymbol{A}} &\equiv (\ A_x\ ,\ A_y\ ,\ A_z\ ) \end{aligned} \tag{6.1}$$

a seconda se si vogliano esplicitare o meno gli assi cartesiani.

Poiché le componenti (A_x, A_y, A_z) sono tutte lungo direzioni perpendicolari, il modulo, o intensità, del vettore si ricava

dal teorema di Pitagora, e vale:

$$A \equiv |\vec{\boldsymbol{A}}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{6.2}$$

Per indicare solo l'orientamento del vettore $\vec{\boldsymbol{A}}$, si fa uso del *versore* $\hat{\boldsymbol{A}}$, così definito:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{A}} &= \frac{\vec{\boldsymbol{A}}}{|\vec{\boldsymbol{A}}|} = \frac{\vec{\boldsymbol{A}}}{A} \\ \text{(oppure)} \quad \hat{\boldsymbol{A}} &\equiv \left(\frac{A_x}{A} \, , \, \frac{A_x}{A} \, , \, \frac{A_x}{A} \right) \end{aligned} \tag{6.3}$$

6.2 Operazioni elementari con vettori

Dati due vettori $\vec{\boldsymbol{A}}$ e $\vec{\boldsymbol{B}}$, di componenti (A_x, A_y, A_z) e (B_x, B_y, B_z), si definiscono la somma, la differenza e il prodotto per una quantità scalare α come:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{B}} &= (A_x + B_x)\hat{\boldsymbol{x}} + (A_y + B_y)\hat{\boldsymbol{y}} + (A_z + B_z)\hat{\boldsymbol{z}} \\ &\equiv (\ A_x + B_x \ , \ A_y + B_y \ , \ A_z + B_z \ ) \\ \\ \vec{\boldsymbol{B}} - \vec{\boldsymbol{A}} &= (B_x - A_x)\hat{\boldsymbol{x}} + (B_y - A_y)\hat{\boldsymbol{y}} + (B_z - A_z)\hat{\boldsymbol{z}} \\ &\equiv (\ B_x - A_x \ , \ B_y - A_y \ , \ B_z - A_z \ ) \\ \\ \alpha\vec{\boldsymbol{A}} &= (\alpha A_x)\hat{\boldsymbol{x}} + (\alpha A_y)\hat{\boldsymbol{y}} + (\alpha A_z)\hat{\boldsymbol{z}} \\ &\equiv (\ \alpha A_x \ , \ \alpha A_y \ , \ \alpha A_z \ ) \end{aligned} \tag{6.4}$$

Si può vedere che la somma e la differenza hanno una rappresentazione grafica come in Fig. 6.2. Si tratta della cosiddetta "*regola del parallelogramma*" [2]: i vettori $\vec{\boldsymbol{A}}, \vec{\boldsymbol{B}}$ identificano un parallelogramma; la diagonale che parte dall'origine dà la somma $\vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{B}}$, l'altra diagonale dà la differenza $\vec{\boldsymbol{B}} - \vec{\boldsymbol{A}}$.

[2] In generale, per effettuare calcoli conviene lavorare per coordinate cartesiane, con le Eq. (6.4). Le rappresentazioni grafiche sono utili per descrivere e capire problemi specifici.

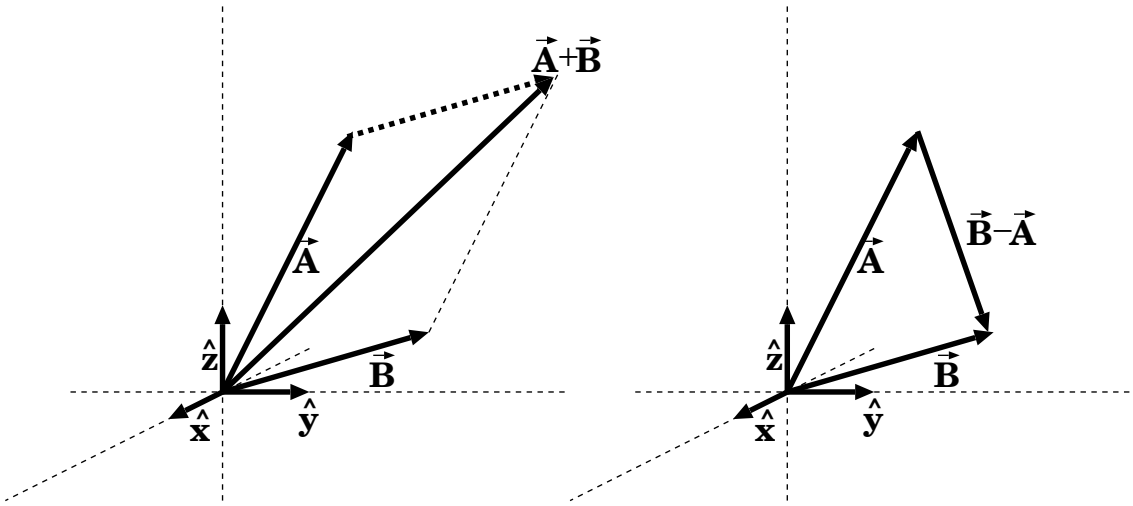


Figura 6.2: *Somma e differenza di vettori*

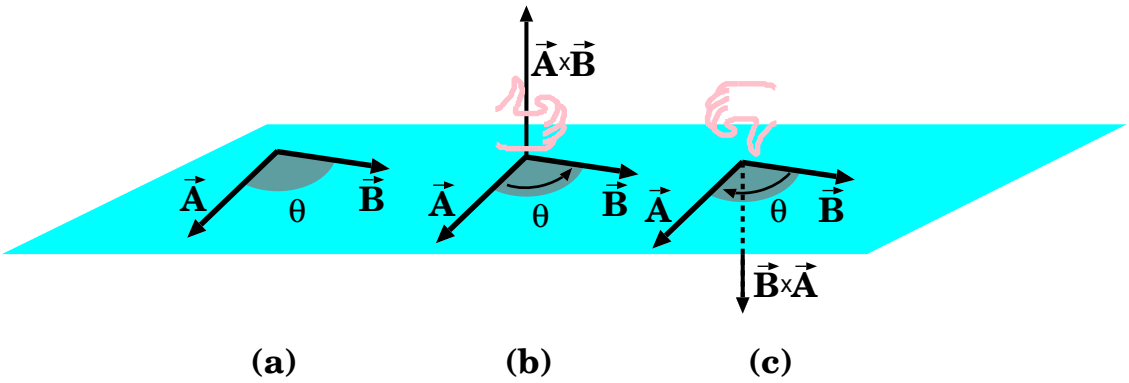


Figura 6.3: *Spiegazione geometrica del prodotto scalare (a) e vettoriale (b,c)*

6.3 Prodotto scalare di due vettori

Definiamo il *prodotto scalare* di due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ come:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{6.5}$$

ovvero la somma dei prodotti componente per componente. È subito evidente che *il prodotto scalare è commutativo*:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

Se i due vettori formano un angolo θ (vedi Fig. 6.3(a)), si può mostrare

che

$$\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = |\vec{\boldsymbol{A}}||\vec{\boldsymbol{B}}| \cos\theta \tag{6.6}$$

Per dimostrare questa proprietà, scegliamo gli assi cartesiani in modo che l'asse x giaccia lungo il vettore $\vec{\boldsymbol{A}}$ e che il piano Oxy contenga il vettore $\vec{\boldsymbol{B}}$. Allora le componenti cartesiane dei due vettori sono

$$\begin{array}{lll} A_x & ; \quad A_y = 0 & ; \quad A_z = 0 \\ B_x & ; \quad B_y & ; \quad B_z = 0 \end{array}$$

e il prodotto scalare diventa semplicemente $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = A_x B_x$. Ora, per la scelta degli assi, $|\vec{\boldsymbol{A}}| = A_x$; inoltre l'angolo θ fra $\vec{\boldsymbol{B}}$ e $\vec{\boldsymbol{A}}$ può essere visto come angolo fra $\vec{\boldsymbol{B}}$ e l'asse x, quindi $B_x = |\vec{\boldsymbol{B}}| \cos\theta$. Da questo si deduce la proprietà dell'Eq. (6.6).

Vale la pena notare che si può scrivere

$$|\vec{\boldsymbol{A}}| = \sqrt{\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}} \tag{6.7}$$

Il prodotto scalare di due vettori perpendicolari è sempre nullo, essendo in questo caso $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ e quindi $\cos\theta = 0$. In generale:

$$\begin{aligned} \theta < \frac{\pi}{2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} > 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0 \\ \theta > \frac{\pi}{2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} < 0 \end{aligned}$$

Le condizioni di ortonormalità per $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$ possono ora essere riscritte:

$$\begin{array}{lll} |\hat{\boldsymbol{x}}| = 1 & ; \quad |\hat{\boldsymbol{y}}| = 1 & ; \quad |\hat{\boldsymbol{z}}| = 1 \\ \hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{y}} = 0 & ; \quad \hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = 0 & ; \quad \hat{\boldsymbol{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = 0 \end{array} \tag{6.8}$$

6.3.1 Proiezione di un vettore lungo una direzione

In particolare, il prodotto scalare di un vettore $\vec{\boldsymbol{A}}$ con un vettore unitario $\hat{\boldsymbol{u}}$, $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{u}}$, dà la proiezione di A sulla direzione indicata da $\hat{\boldsymbol{u}}$:

$$A_u = \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} \tag{6.9}$$

Come importante conseguenza:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} &= A_x \\ \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{y}} &= A_y \\ \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} &= A_z \end{aligned} \tag{6.10}$$

6.4 Prodotto vettoriale di due vettori

Il *prodotto vettoriale* $\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$ è un vettore che ha per componenti:

$$\begin{aligned} \left[\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\right]_x &= (A_y B_z - A_z B_y) \\ \left[\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\right]_y &= (A_z B_x - A_x B_z) \\ \left[\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\right]_z &= (A_x B_y - A_y B_x) \end{aligned} \tag{6.11}$$

Questa scrittura è apparentemente complicata, ma può essere facilmente ricordata pensando alle coordinate x, y, z in modo ciclico: $\overset{\curvearrowleft}{xyz}$.

Si nota subito che *il prodotto vettoriale è anti-commutativo*, ovvero cambia segno se si invertono i due vettori:

$$\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = -\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{A}}$$

Se i due vettori formano un angolo θ (vedi Fig. 6.3(b,c)), si può dimostrare che $\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$ è perpendicolare al piano individuato da $\vec{\boldsymbol{A}}$ e $\vec{\boldsymbol{B}}$, ha modulo:

$$|\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}| = |\vec{\boldsymbol{A}}||\vec{\boldsymbol{B}}| \sin\theta \tag{6.12}$$

ed è orientato secondo la "regola della mano destra", cioè se le dita della mano destra puntano da $\vec{\boldsymbol{A}}$ a $\vec{\boldsymbol{B}}$ — in questo ordine! — il pollice è diretto come $\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$.

Per dimostrare queste proprietà, scegliamo gli assi cartesiani in modo che l'asse x giaccia lungo il vettore $\vec{\boldsymbol{A}}$ e che il piano Oxy contenga il vettore $\vec{\boldsymbol{B}}$. Allora le componenti cartesiane dei due vettori sono

$$\begin{array}{lll} A_x & ; \quad A_y = 0 & ; \quad A_z = 0 \\ B_x & ; \quad B_y & ; \quad B_z = 0 \end{array}$$

Le componenti del prodotto vettoriale diventano:

$$\begin{aligned}
\left[\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\right]_x &= (A_y B_z - A_z B_y) = 0 \\
\left[\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\right]_y &= (A_z B_x - A_x B_z) = 0 \\
\left[\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\right]_z &= (A_x B_y - A_y B_x) = A_x B_y
\end{aligned}$$

Anzitutto, $\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$ ha solo componente lungo z, quindi è perpendicolare al piano Oxy che contiene $\vec{\boldsymbol{A}}$ e $\vec{\boldsymbol{B}}$. Inoltre, per la scelta degli assi, $|\vec{\boldsymbol{A}}| = A_x$; l'angolo θ fra $\vec{\boldsymbol{B}}$ e $\vec{\boldsymbol{A}}$ può essere visto come angolo fra $\vec{\boldsymbol{B}}$ e l'asse x, quindi $B_y = |\vec{\boldsymbol{B}}| \sin\theta$. Da questo si deduce la proprietà dell'Eq. (6.12).

Il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo: infatti, se i vettori hanno orientamenti concordi $\theta = 0$, se hanno orientamenti opposti $\theta = \pi$; in ogni caso $\sin\theta = 0$.

Una proprietà interessante del prodotto vettoriale è che il suo modulo è uguale all'area del parallelogramma individuato dai due vettori $\vec{\boldsymbol{A}}$ e $\vec{\boldsymbol{B}}$ — infatti $|\vec{\boldsymbol{B}}| \sin\theta$ è la proiezione di $\vec{\boldsymbol{B}}$ lungo la direzione perpendicolare a $\vec{\boldsymbol{A}}$, quindi $|\vec{\boldsymbol{A}}|$ può essere pensata come la base del parallelogramma, e $|\vec{\boldsymbol{B}}| \sin\theta$ come l'altezza.

Concludiamo con le seguenti relazioni fra i versori cartesiani:

$$\hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{z}} \quad ; \quad \hat{\boldsymbol{y}} \times \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{x}} \quad ; \quad \hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{y}} \tag{6.13}$$

(facilmente verificabili con la "regola della mano destra").

6.5 Identità vettoriali

Il prodotto scalare e il prodotto vettoriale sono operazioni *bilineari*, vale a dire:

$$\begin{aligned}
(\alpha\vec{\boldsymbol{A}} + \beta\vec{\boldsymbol{B}}) \cdot \vec{\boldsymbol{C}} &= \alpha(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{C}}) + \beta(\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{C}}) \\
\vec{\boldsymbol{A}} \cdot (\beta\vec{\boldsymbol{B}} + \gamma\vec{\boldsymbol{C}}) &= \beta(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}) + \gamma(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{C}}) \\
(\alpha\vec{\boldsymbol{A}} + \beta\vec{\boldsymbol{B}}) \times \vec{\boldsymbol{C}} &= \alpha(\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{C}}) + \beta(\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{C}}) \\
\vec{\boldsymbol{A}} \times (\beta\vec{\boldsymbol{B}} + \gamma\vec{\boldsymbol{C}}) &= \beta(\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}) + \gamma(\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{C}})
\end{aligned} \tag{6.14}$$

La dimostrazione, un semplice esercizio di algebra, è diretta conseguenza delle definizioni, Eq. (6.5) e Eq. (6.11).

Elenchiamo di seguito altre identità vettoriali, *molto utili*:

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{A}} \cdot (\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}) &= 0 && \text{(a)} \\
\vec{\boldsymbol{A}} \cdot (\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{C}}) &= \vec{\boldsymbol{B}} \cdot (\vec{\boldsymbol{C}} \times \vec{\boldsymbol{A}}) = \vec{\boldsymbol{C}} \cdot (\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}) && \text{(b)} \\
\vec{\boldsymbol{A}} \times (\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{C}}) &= \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{C}}) - \vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}) && \text{(c)} \\
\vec{\boldsymbol{A}} \times (\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{C}}) + \vec{\boldsymbol{B}} \times (\vec{\boldsymbol{C}} \times \vec{\boldsymbol{A}}) + \vec{\boldsymbol{C}} \times (\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}) &= 0 && \text{(d)}
\end{aligned} \tag{6.15}$$

La (a) è ovvia: $\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} \perp \vec{\boldsymbol{A}}$. Per (b) e (c) la dimostrazione è più complicata: si vedano i suggerimenti nella Sezione 6.9. La (d) è diretta conseguenza della (c).

6.6 Trasformazioni di vettori

Un vettore in fisica non è solo una quantità $\vec{\boldsymbol{A}}$ che può essere parametrizzata da una tripletta di variabili reali (A_x, A_y, A_z). Occorre anche che gli elementi di tale tripletta soddisfino precise proprietà di trasformazione quando si effettui un cambiamento di coordinate. Vediamone i dettagli.

Quando si lavora sulle componenti, è utile introdurre una nomenclatura numerica $1, 2, 3$ al posto di x, y, z. Le regole di corrispondenza sono le seguenti:

$$\begin{array}{lll}
\hat{\boldsymbol{e}}_1 \equiv \hat{\boldsymbol{x}} & A_1 \equiv A_x & x_1 \equiv x \\
\hat{\boldsymbol{e}}_2 \equiv \hat{\boldsymbol{y}} & A_2 \equiv A_y & x_2 \equiv y \\
\hat{\boldsymbol{e}}_3 \equiv \hat{\boldsymbol{z}} & A_3 \equiv A_z & x_3 \equiv z
\end{array}$$

Nello spazio 3-dimensionale, una posizione rispetto all'origine O è descritta da un *vettore posizione*, o *raggio vettore*, $\vec{\boldsymbol{r}}$. In un dato sistema di coordinate, con assi lungo i versori ortonormali (vedi Eq. (6.8)) $\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3$ possiamo scomporre $\vec{\boldsymbol{r}}$ nelle sue componenti:

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \sum_{k=1}^{3} x_k \hat{\boldsymbol{e}}_k$$

dove

$$x_k = \vec{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k$$

Con una diversa scelta di coordinate, avremmo versori $\hat{\boldsymbol{e}}'_1, \hat{\boldsymbol{e}}'_2, \hat{\boldsymbol{e}}'_3$ e quindi una scomposizione

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \sum_{m=1}^{3} x'_m \hat{\boldsymbol{e}}'_m$$

Che relazione c'è fra le componenti (x_1, x_2, x_3) e (x'_1, x'_2, x'_3)? Poiché:

$$\begin{aligned} x'_i &= \hat{\boldsymbol{e}}'_i \cdot \vec{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{e}}'_i \cdot \left(\sum_{k=1}^{3} x_k \hat{\boldsymbol{e}}_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{3} \left(\hat{\boldsymbol{e}}'_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k \right) x_k \end{aligned}$$

otteniamo:

$$x'_i = \sum_{k=1}^{3} \left(\hat{\boldsymbol{e}}'_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k \right) x_k \tag{6.16}$$

Analogamente si ottengono le trasformazioni inverse:

$$x_k = \sum_{i=1}^{3} \left(\hat{\boldsymbol{e}}_k \cdot \hat{\boldsymbol{e}}'_i \right) x'_i \tag{6.17}$$

In fisica, chiamiamo *vettore* una quantità $\vec{\boldsymbol{A}}$ che può essere scomposta come $\sum_{k=1}^{3} A_k \hat{\boldsymbol{e}}_k$, tale che le sue componenti (A_1, A_2, A_3) si trasformino come quelle di un raggio vettore quando si effettui un cambiamento di coordinate, cioè:

$$A'_i = \sum_{k=1}^{3} \left(\hat{\boldsymbol{e}}'_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k \right) A_k \tag{6.18}$$

Questo significa che $\vec{\boldsymbol{A}}$ può essere scritto come:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{A}} &= \sum_k A_k \hat{\boldsymbol{e}}_k \\ &= \sum_i A'_i \hat{\boldsymbol{e}}'_i \end{aligned}$$

Le componenti cartesiane, in ciascuno dei due sistemi di assi, sono raffigurate in Fig. 6.4.

Si può provare che, se $\vec{\boldsymbol{A}}$, $\vec{\boldsymbol{B}}$ sono vettori, allora $|\vec{\boldsymbol{A}}|$, $|\vec{\boldsymbol{B}}|$, $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}$ sono scalari (ovvero restano invariati se cambiamo le coordinate), mentre $\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$ è un vettore, ovvero le sue coordinate si trasformano secondo l'Eq. (6.18). Inoltre, se $\psi(x, y, z)$ è una funzione scalare delle coordinate (x, y, z), allora il *gradiente*, $\vec{\boldsymbol{\nabla}}\psi \equiv \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)$, si trasforma come un vettore.

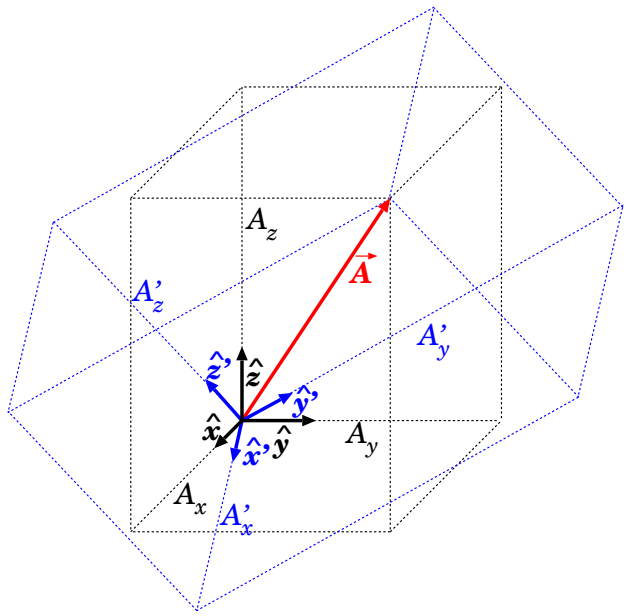


Figura 6.4: *Scomposizione del vettore* $\vec{\boldsymbol{A}}$ *secondo gli assi* $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$ *e secondo gli assi* $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$.

6.6.1 Invarianza del prodotto scalare (*)

Il prodotto scalare, definito come nell'Eq. (6.5), si può scrivere come:

$$\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i$$

Vogliamo mostrare che esso è *invariante per un cambiamento di coordinate*, ovvero che:

$$\sum_{i=1}^{3} A_i B_i = \sum_{i=1}^{3} A'_i B'_i$$

dove le componenti A'_i, B'_i sono date dall'Eq. (6.18). Vediamo:

$$\begin{aligned}
\sum_i A'_i B'_i &= \sum_i \left[\sum_k (\hat{\boldsymbol{e}}'_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k) A_k \right] \left[\sum_h (\hat{\boldsymbol{e}}'_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_h) B_h \right] \\
&= \sum_{k,h} A_k B_h \left[\sum_i (\hat{\boldsymbol{e}}'_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k)(\hat{\boldsymbol{e}}'_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_h) \right]
\end{aligned}$$

Ora concentriamoci sul termine fra [ ]:

$$\begin{aligned}\sum_i (\hat{\boldsymbol{e}}'_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k)(\hat{\boldsymbol{e}}'_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_h) &= \left[\sum_i (\hat{\boldsymbol{e}}'_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k)\hat{\boldsymbol{e}}'_i\right] \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_h \\ &= \hat{\boldsymbol{e}}_k \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_h \\ &= \left\{\begin{array}{ll} 1 & (\text{se } k = h) \\ 0 & (\text{se } k \neq h)\end{array}\right\} \equiv \delta_{kh}\end{aligned}$$

Abbiamo qui introdotto la "*delta di Kronecker*", δ_{kh} (molto utile!) Quindi:

$$\sum_i A'_i B'_i = \sum_{k,h} A_k B_h \delta_{kh}$$

Nella doppia sommatoria, solo i termini in cui $k = h$ sopravvivono, gli altri si annullano, quindi

$$\sum_i A'_i B'_i = \sum_k A_k B_k$$

che è ciò che volevamo dimostrare.

Come conseguenza, $|\vec{\boldsymbol{A}}|$ è invariante: basti pensare che $|\vec{\boldsymbol{A}}| = \sqrt{\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}}$...

6.6.2 Trasformazione vettoriale del gradiente (*)

Il *gradiente* di un campo scalare $\psi(x, y, z)$ è definito da:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{y}} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{z}} \tag{6.19}$$

Vogliamo mostrare che questo oggetto si trasforma come un vettore. Per fare questo, utilizziamo la notazione numerica $1, 2, 3$ per le tre direzioni cartesiane, come spiegato in Sezione 6.6: le tre coordinate sono chiamate x_1, x_2, x_3 e i tre versori $\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3$, cosicché l'Eq. (6.19) diventa

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\psi = \sum_{k=1}^{3} \hat{\boldsymbol{e}}_k \frac{\partial\psi}{\partial x_k}$$

Se scegliessimo un diverso sistema di coordinate con assi $\hat{\boldsymbol{e}}'_1, \ldots \hat{\boldsymbol{e}}'_3$, applicando la definizione Eq. (6.19) scriveremmo:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}'\psi = \sum_{m=1}^{3} \hat{\boldsymbol{e}}'_m \frac{\partial\psi}{\partial x'_m}$$

Le vecchie coordinate $(x_1, \ldots, x_3)$ sono collegate alle nuove $(x'_1, \ldots, x'_3)$ dall'Eq. (6.17), quindi:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x'_m} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial x'_m} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}$$

Abbiamo usato la "regola di Leibnits", o "regola della catena" [3]. Ma le Eq. (6.17) sono lineari, quindi

$$\frac{\partial x_k}{\partial x'_m} = (\hat{\boldsymbol{e}}_k \cdot \hat{\boldsymbol{e}}'_m)$$

e

$$\frac{\partial \psi}{\partial x'_m} = \sum_{k=1}^{3} (\hat{\boldsymbol{e}}'_m \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k) \frac{\partial \psi}{\partial x_k}$$

Abbiamo trovato che le componenti di $\vec{\boldsymbol{\nabla}}\psi$ si trasformano secondo le Eq. (6.18), il che significa che il gradiente di un campo scalare è un campo vettoriale.

6.7 Rotazioni e inversioni spaziali (*)

Le quantità:

$$R_{ik} = (\hat{\boldsymbol{e}}'_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k)$$

formano gli elementi di una matrice (3×3) $\mathbf{R}$. Le Eq. (6.16) e Eq. (6.17) possono essere scritte come:

$$x'_i = \sum_k R_{ik} x_k \qquad ; \qquad x_k = \sum_k R_{ik} x'_i$$

da cui vediamo che la trasformazione inversa si ottiene scambiando i due indici:

$$(\mathbf{R}^{-1})_{ki} = (\mathbf{R})_{ik} \qquad \text{oppure} \qquad \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$$

ovvero la matrice $\mathbf{R}$ è *ortogonale*.

Si dimostra che le matrici ortogonali hanno tutte determinante ± 1. Tutte le rotazioni nello spazio hanno determinante $+1$: infatti, qualunque rotazione

[3] Ve la ricordate? Se modifichiamo la coordinata x'_m di una quantità dx'_m, lasciando le altre coordinate x'_s $(s \neq m)$ invariate, induciamo variazioni su tutti le coordinate x_k date da $dx_k = \dfrac{\partial x_k}{\partial x'_m} dx'_m$, che a loro volta producono una variazione di $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ pari a $d\psi = \displaystyle\sum_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} dx_k = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial x'_m} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} dx'_m$

di un angolo α attorno ad un qualunque asse può essere ridotta con continuità alla trasformazione identica ($\alpha \to 0$), che ha determinante $+1$; essendo il determinante una funzione continua dei coefficienti della matrice, che a loro volta sono funzioni continue dell'angolo α, esso non può mai passare da $+1$ a -1.

6.7.1 Combinazioni di rotazioni

Una combinazione di due rotazioni è una rotazione: con il formalismo matriciale, una rotazione $\mathbf{R}_1$ seguita da una rotazione $\mathbf{R}_2$ è descritta da una matrice

$$\mathbf{R}_{tot} = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1$$

(a sinistra la matrice che agisce "dopo"). Ora

$$\begin{aligned}(\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1)^{-1} &= \mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_2^{-1} = \mathbf{R}_1^T\mathbf{R}_2^T \\ &= (\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1)^T\end{aligned}$$

quindi $\mathbf{R}_{tot}$ è una matrice ortogonale; inoltre

$$\det(\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1) = \det(\mathbf{R}_2)\cdot\det(\mathbf{R}_1) = 1$$

quindi effettivamente $\mathbf{R}_{tot}$ è una rotazione.

In generale le rotazioni *non commutano*:

$$\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1 \neq \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2$$

Ciò è dovuto al fatto che il prodotto di matrici non è commutativo — ma basta guardare l'esempio in Fig. 6.5 per rendersene conto. Solo quando 2 rotazioni sono eseguite attorno allo stesso asse, allora sono commutative.

6.7.2 Rotazioni infinitesime

Un caso particolare è costituito dalle rotazioni infinitesime — ovvero di un angolo infinitesimo rispetto a un dato asse. Una rotazione infinitesima è descritta da una matrice che differisce di una quantità infinitesima dalla matrice identità $\mathbf{1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}$$

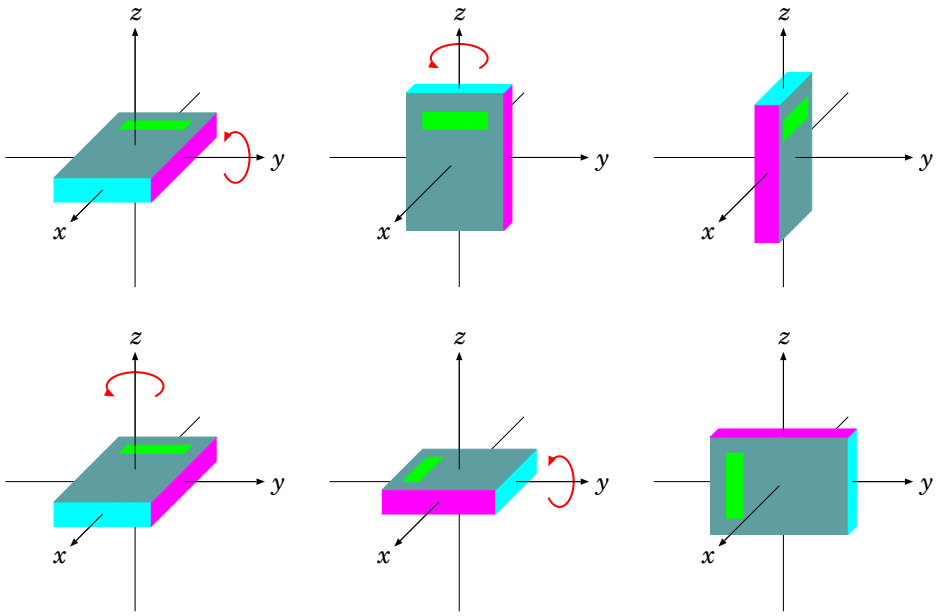


Figura 6.5: *Le rotazioni non commutano. In figura, sullo stesso parallelepipedo vengono eseguite 2 rotazioni di* $90°$ *attorno agli assi* y *e* z*, oppure* z *e* y*: i risultati sono evidentemente diversi.*

La condizione di ortogonalità, $\mathbf{1} = \mathbf{r}^T\mathbf{r}$, si traduce in:

$$\mathbf{1} \;=\; \left(\mathbf{1}+\boldsymbol{\epsilon}^T\right)\left(\mathbf{1}+\boldsymbol{\epsilon}\right) \;\simeq\; \mathbf{1}+\boldsymbol{\epsilon}^T+\boldsymbol{\epsilon}$$

(dove si è trascurato il termine $\mathcal{O}\left(\boldsymbol{\epsilon}^2\right)$), quindi

$$\boldsymbol{\epsilon}^T \;=\; -\boldsymbol{\epsilon}$$

(la matrice $\boldsymbol{\epsilon}$ è antisimmetrica).

La composizione di due rotazioni infinitesime è commutativa: sempre trascurando i termini $\mathcal{O}\left(\boldsymbol{\epsilon}^2\right)$:

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{1}+\boldsymbol{\epsilon}_2\right)\left(\mathbf{1}+\boldsymbol{\epsilon}_1\right) &\simeq \mathbf{1}+\boldsymbol{\epsilon}_2+\boldsymbol{\epsilon}_1\\ \left(\mathbf{1}+\boldsymbol{\epsilon}_1\right)\left(\mathbf{1}+\boldsymbol{\epsilon}_2\right) &\simeq \mathbf{1}+\boldsymbol{\epsilon}_1+\boldsymbol{\epsilon}_2\end{aligned}$$

(e la somma di matrici è commutativa).

6.7.3 Inversioni spaziali

Una trasformazione con $\det(\mathbf{R}) = -1$ non può essere una rotazione, o una composizione di rotazioni. D'altronde queste trasformazioni esistono:

si pensi a una che inverte solo l'asse $\hat{\boldsymbol{e}}_p$, lasciando gli altri invariati. La corrispondente matrice sarebbe diagonale, con $R_{pp} = -1$ e $R_{kk} = +1\ \forall k \neq p$. Il suo determinante sarebbe -1. Inoltre, una trasformazione di questo tipo composta con una o più rotazioni avrebbe sempre determinante -1.

Nello spazio 3-dimensionale, una peculiare trasformazione che inverte i tre assi ha matrice:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{array}{l} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = -z \end{array} \tag{6.20}$$

quindi $\det(\mathbf{P}) = -1$. Questa trasformazione è chiamata *inversione spaziale* (o *trasformazione di parità* in fisica delle particelle e teoria dei campi).

6.8 Vettori e pseudo-vettori (*)

Non tutte le quantità che si trasformano come vettori sotto rotazioni fanno lo stesso sotto inversioni spaziali. Vediamo un esempio semplice: il vettore posizione $\vec{\boldsymbol{r}}$ è un vettore per definizione: è in effetti il nostro prototipo di vettore. Quindi anche una sua variazione $d\vec{\boldsymbol{r}}$ è un vettore. Poiché le trasformazioni spaziali non alterano il flusso del tempo, dt è invariato, e la velocità $\vec{\boldsymbol{v}} = \dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}$ è anch'essa un vettore. Ora consideriamo la velocità angolare $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ e la relazione $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$ tipica di un moto circolare (vd Sezione 7.6.4). Essendo essa una relazione geometrica, non c'è ragione per cui essa cambi per trasformazioni spaziali. Eppure, eseguendo una inversione spaziale, le componenti di $\vec{\boldsymbol{r}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}$ cambiano segno (perché sono entrambi vettori), quindi le componenti di $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ devono conservare il loro segno, cioè $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ deve rimanere invariato.

Una quantità che si trasforma come vettore per rotazioni, ma rimane invariata per inversione spaziale, si chiama *pseudo-vettore*, o *vettore assiale*. In fisica ci sono diverse quantità di questo tipo. Nella tabella seguente elenchiamo quantità fisiche, distinguendo se sono vettori o pseudo-vettori (V o P rispettivamente) e motivando con un'equazione fisica il loro comportamento sotto inversione spaziale.

$\vec{\boldsymbol{r}}$	vettore posizione	V	(per definizione)
$\vec{\boldsymbol{v}}$	velocità	V	$\vec{\boldsymbol{v}} = \dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}$
$\vec{\boldsymbol{a}}$	accelerazione	V	$\vec{\boldsymbol{a}} = \dfrac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt}$
$\vec{\boldsymbol{\omega}}$	velocità angolare	P	$\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$
$\vec{\boldsymbol{F}}$	forza	V	$\vec{\boldsymbol{F}} = m\vec{\boldsymbol{a}}$
$\vec{\boldsymbol{p}}$	quantità di moto	V	$\vec{\boldsymbol{p}} = m\vec{\boldsymbol{v}}$
$\vec{\boldsymbol{L}}$	momento angolare	P	$\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{p}}$
$\vec{\boldsymbol{M}}$	momento torcente	P	$\vec{\boldsymbol{M}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}}$
$\vec{\boldsymbol{E}}$	campo elettrico	V	$\vec{\boldsymbol{F}} = q\vec{\boldsymbol{E}}$
$\vec{\boldsymbol{B}}$	campo magnetico	P	$\vec{\boldsymbol{F}} = q\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$
$\vec{\boldsymbol{J}}$	densità di corrente	V	$\vec{\boldsymbol{J}} = nq\vec{\boldsymbol{v}}_D$

6.9 Calcolo tensoriale (*)

In uno spazio 3-dimensionale, usiamo la convenzione di somma implicita sugli indici ripetuti, cioè

$$a_k b_k \equiv \sum_k a_k b_k$$

e introduciamo il *tensore δ di Kronecker* δ_{ij}, definito da:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Identità ovvie sono:

$$\delta_{ij} A_i = A_j \qquad ; \qquad \delta_{ij} A_i B_j = A_i B_i$$

Così come un vettore $\vec{\boldsymbol{A}}$ è un oggetto scomponibile in una tripletta (A_1, A_2, A_3) che si trasforma secondo le leggi:

$$A'_i = R_{ir} A_r$$

possiamo definire un tensore di rango P come un oggetto scomponibile in componenti a P indici: $T_{i_1,\ldots,i_P}$ che si trasforma secondo:

$$T'_{i_1,\ldots,i_P} = R_{i_1 r_1} \cdots R_{i_P r_P} T_{r_1,\ldots,r_P}$$

È immediato dimostrare che applicando una trasformazione ortogonale $\mathbf{R}$ a due vettori $\vec{\boldsymbol{A}}$ e $\vec{\boldsymbol{B}}$ il loro prodotto scalare $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}$ è invariante.

6.9.1 Il tensore di Levi-Civita (*)

In uno spazio 3-dimensionale, introduciamo anche il *tensore totalmente antisimmetrico di Levi-Civita* di rango 3 ϵ_{ijk}, definito in modo che $\epsilon_{123} = 1$ e che esso cambi segno per qualunque scambio di due dei suoi indici:

$$\epsilon_{klm} = -\epsilon_{kml} = -\epsilon_{lkm} = -\epsilon_{mlk}$$

Per questa proprietà, tale tensore è nullo se due qualunque degli indici sono uguali, ed è invariante per una permutazione ciclica dei tre indici:

$$\epsilon_{klm} = \epsilon_{lmk} = \epsilon_{mkl}$$

Le componenti cartesiane di un prodotto vettoriale possono essere scritte come:

$$(\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}})_k = \epsilon_{klm} A_l B_m$$

Se $\vec{\boldsymbol{A}}$ e $\vec{\boldsymbol{B}}$ sono due vettori, allora possiamo mostrare che $\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$ è uno pseudo-vettore. Infatti, con un cambiamento di coordinate, $A'_j = R_{jr} A_r$ e $B'_k = R_{ks} B_s$. La trasformazione è ortogonale, quindi $R_{ip} R_{lp} = \delta_{il}$. Allora $\epsilon_{ijk} A'_j B'_k = \epsilon_{ijk} R_{jr} R_{ks} A_r B_s = (R_{ip} R_{lp}) \epsilon_{ljk} R_{jr} R_{ks} A_r B_s = R_{ip} \epsilon_{ljk} R_{lp} R_{jr} R_{ks} A_r B_s$. Mostriamo che $\epsilon_{ljk} R_{lp} R_{jr} R_{ks} = \det(\mathbf{R}) \epsilon_{prs}$: entrambe le espressioni sono totalmente antisimmetriche nei tre indici p, r, s, e per $(p, r, s) = (1, 2, 3)$ la prima è proprio $\det(\mathbf{R})$. Quindi abbiamo trovato che

$$(\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}})'_i = \epsilon_{ijk} A'_j B'_k = \det(\mathbf{R}) R_{ip} \epsilon_{prs} A_r B_s = \det(\mathbf{R}) R_{ip} (\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}})_p$$

Per rotazioni, $\det(\mathbf{R}) = +1$ e abbiamo ottenuto che la quantità $\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$ si trasforma come un vettore.

Per inversioni spaziali, il termine $\det(\mathbf{R}) = -1$ produce un cambiamento di segno di tutte le 3 componenti.

Un'identità molto utile è [4]:

$$\epsilon_{klm} \epsilon_{krs} = \delta_{lr} \delta_{ms} - \delta_{ls} \delta_{mr}$$

Esercizio 6.1. *Come esercizio, si provi ad usare questi strumenti di calcolo per mostrare le identità (b) e (c) delle Eq. (6.15).*

Dimostrazione di $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot (\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{C}}) = \vec{\boldsymbol{B}} \cdot (\vec{\boldsymbol{C}} \times \vec{\boldsymbol{A}}) = \vec{\boldsymbol{C}} \cdot (\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}})$.

[4] Dimostrazione. Per avere valori non nulli nel membro sinistro, k, l, m devono essere tutti diversi; stessa cosa per k, r, s. Siccome i valori possibili sono in $\{1, 2, 3\}$, fissare l, m e r, s automaticamente fissa il valore di k. Gli unici casi non nulli sono $(l, m) = (r, s)$ e $(l, m) = (s, r)$. Nel primo caso $\epsilon_{klm} = \epsilon_{krs}$, quindi $\epsilon_{klm} \epsilon_{krs} = 1$; d'altra parte $\delta_{lr} \delta_{ms} = 1$ e $\delta_{ls} \delta_{mr} = 0$. Nel secondo caso invece $\epsilon_{klm} = \epsilon_{ksr} = -\epsilon_{krs}$, quindi $\epsilon_{klm} \epsilon_{krs} = -1$; ma $\delta_{lr} \delta_{ms} = 0$ e $\delta_{ls} \delta_{mr} = 1$.

Si sfrutta la ciclicità $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}$:

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{A}} \cdot (\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{C}}) &= A_i(\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{C}})_i = A_i(\epsilon_{ijk} B_j C_k) = \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k \\ &= \epsilon_{jki} A_i B_j C_k = B_j(\epsilon_{jki} C_k A_i) = \vec{\boldsymbol{B}} \cdot (\vec{\boldsymbol{C}} \times \vec{\boldsymbol{A}})\end{aligned}$$

Dimostrazione di $\vec{\boldsymbol{A}} \times (\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{C}}) = \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{C}}) - \vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}})$.
Si sfrutta l'identità $\epsilon_{klm}\epsilon_{krs} = \delta_{lr}\delta_{ms} - \delta_{ls}\delta_{mr}$:

$$\begin{aligned}\Big(\vec{\boldsymbol{A}} \times (\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{C}})\Big)_l &= \epsilon_{lmk} A_m (\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{C}})_k = \epsilon_{lmk} A_l \, \epsilon_{krs} B_r C_s \\ &= \epsilon_{lmk}\epsilon_{krs} A_m B_r C_s \\ &= (\delta_{lr}\delta_{ms} - \delta_{ls}\delta_{mr}) A_m B_r C_s \\ &= \delta_{lr}\delta_{ms} A_m B_r C_s - \delta_{ls}\delta_{mr} A_m B_r C_s \\ &= B_l(A_m C_m) - C_s(A_m B_m) \\ &= \Big(\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{C}}) - \vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}})\Big)_l\end{aligned}$$

6.10 Digressione: a che ora sorge e tramonta il Sole? (*)

(Esercizio educativo di matematica vettoriale)

La Terra ha un asse di rotazione inclinato: precisamente, esso forma un angolo $\theta = 23.5°$ rispetto alla perpendicolare al piano orbitale (vd Fig. 6.6). Questo causa l'alternarsi della stagioni, e in particolare il fatto che gli orari dell'alba e del tramonto del Sole cambiano durante l'anno, e in generale dipendono dalla latitudine λ. In estate, il giorno dura di più della notte, quindi c'è una maggiore esposizione alla radiazione solare, ... e fa più caldo. La posizione della Terra in cui il periodo di luce (giorno) è massimo si chiama *solstizio di estate*, quando invece il periodo di buio (notte) è massimo siamo nel *solstizio di inverno* — ovviamente se nell'emisfero Nord è estate, nell'emisfero Sud è inverno, e viceversa. Le posizioni in cui giorno e notte hanno la stessa durata si chiamano *equinozi*.

Per impostare il problema, adottiamo un sistema di riferimento con assi (x, y, z) in cui (x, y) giacciono sul piano orbitale, e parametrizziamo la posizione della Terra con un angolo ϕ rispetto alla posizione del solstizio di estate per l'emisfero Nord — vd Fig. 6.6 (a). Il versore che, dalla Terra, punta verso il Sole, è:

$$\hat{\boldsymbol{u}} \equiv \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

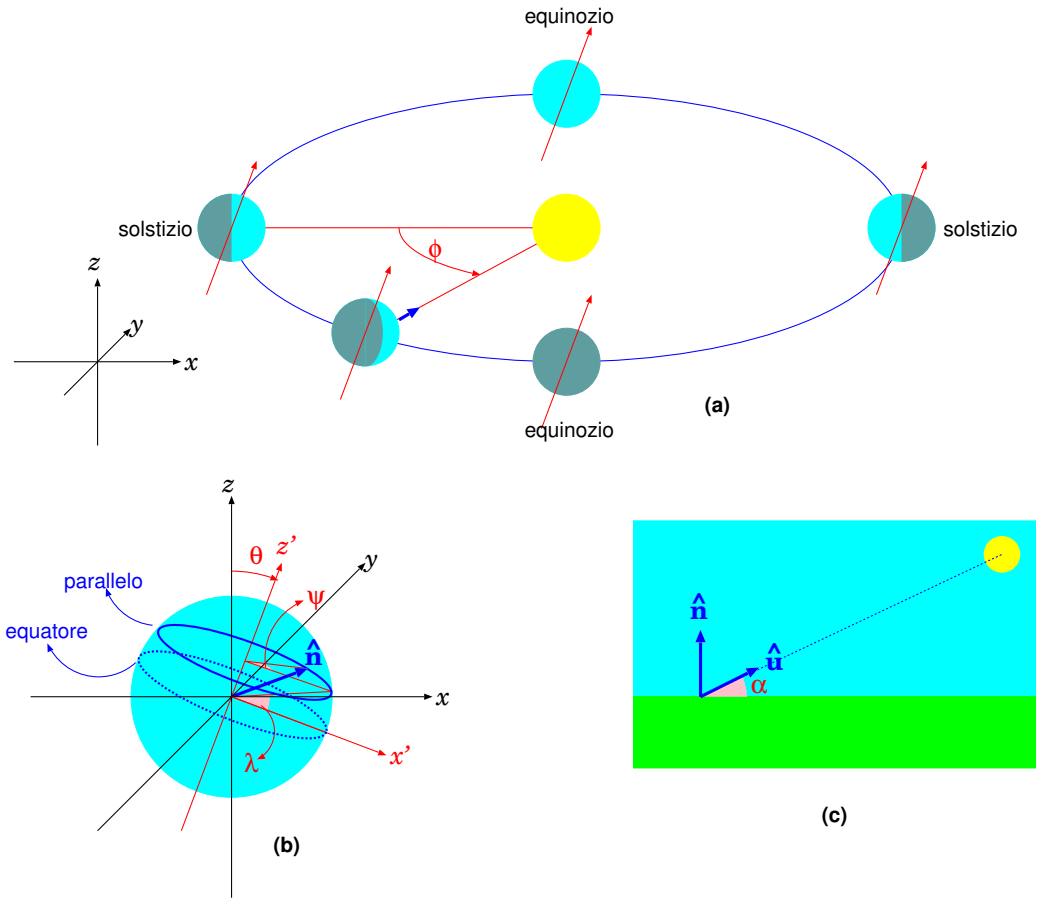


Figura 6.6: ...

Ora parametrizziamo un generico parallelo, a latitudine λ. Qui conviene adottare un altro sistema di riferimento con assi (x', y, z') — l'asse y è comune, mentre gli assi (x', z') sono ruotati di un angolo θ rispetto agli assi (x, z), come in Fig. 6.6 (b). Un generico parallelo a latitudine λ è parametrizzato così:

$$\left.\begin{array}{rcl} x' & = & R\cos\lambda\cos\psi \\ y & = & R\cos\lambda\sin\psi \\ z' & = & R\sin\lambda \end{array}\right\} \qquad \text{(parallelo a latitudine } \lambda\text{)}$$

essendo R il raggio della Terra. Per portarci alle coordinate (x, y, z) occorre eseguire una rotazione di un angolo θ. Per semplicità poniamo:

$$C = \cos\theta \quad ; \quad S = \sin\theta$$

quindi [5]:

$$\begin{aligned} x &= C\,x' + S\,z' \\ z &= -S\,x' + C\,z' \end{aligned}$$

e il parallelo a latitudine λ si parametrizza con

$$\left.\begin{aligned} x &= R\,(C\,\cos\lambda\cos\psi + S\,\sin\lambda) \\ y &= R\,\cos\lambda\sin\psi \\ z &= R\,(C\,\sin\lambda - S\,\cos\lambda\cos\psi) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(parallelo a latitudine } \lambda\text{)}$$

Il versore $\hat{\boldsymbol{n}}$ che punta allo zenith (verticale, in alto) si ottiene semplicemente dividendo per R:

$$\hat{\boldsymbol{n}} \equiv \begin{pmatrix} C\,\cos\lambda\cos\psi + S\,\sin\lambda \\ \cos\lambda\sin\psi \\ C\,\sin\lambda - S\,\cos\lambda\cos\psi \end{pmatrix}$$

Per sapere se è giorno o notte, basta calcolare $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{u}}$:

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} \quad \begin{cases} > 0 & \text{Sole sopra l'orizzonte} \implies \text{giorno} \\ = 0 & \text{Sole all'orizzonte} \implies \text{alba/tramonto} \\ < 0 & \text{Sole sotto l'orizzonte} \implies \text{notte} \end{cases}$$

Bene, da quanto detto, e facendo il prodotto scalare per componenti cartesiane:

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = \cos\phi\,(C\,\cos\lambda\cos\psi + S\,\sin\lambda) + \sin\phi\,\cos\lambda\sin\psi$$

Si chiama *elevazione* del Sole, α, l'angolo formato dal Sole con l'orizzonte. Dalla Fig. 6.6 (c) vediamo che $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, ovvero

$$\sin\alpha = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{u}}$$

In generale, α dipende dalla latitudine λ, dal momento dell'anno (che abbiamo parametrizzato con ϕ) e dalla posizione sul parallelo, indicata da ψ.

La posizione $\psi_{1/2}$ tale che α è massimo si chiama *mezzogiorno locale*: se in quel punto $\alpha > 0$ vuol dire che esiste un giorno. Analogamente, la posizione ψ_0 tale che α è minimo si chiama *mezzanotte locale*: se in quel punto $\alpha < 0$ vuol dire che esiste una notte. Abbiamo 3 possibilità:

[5] per non sbagliare sul segno di S si suggerisce di considerare due punti, $(x', 0)$ e $(0, z')$ e immaginarsi le loro coordinare negli assi (x, z)

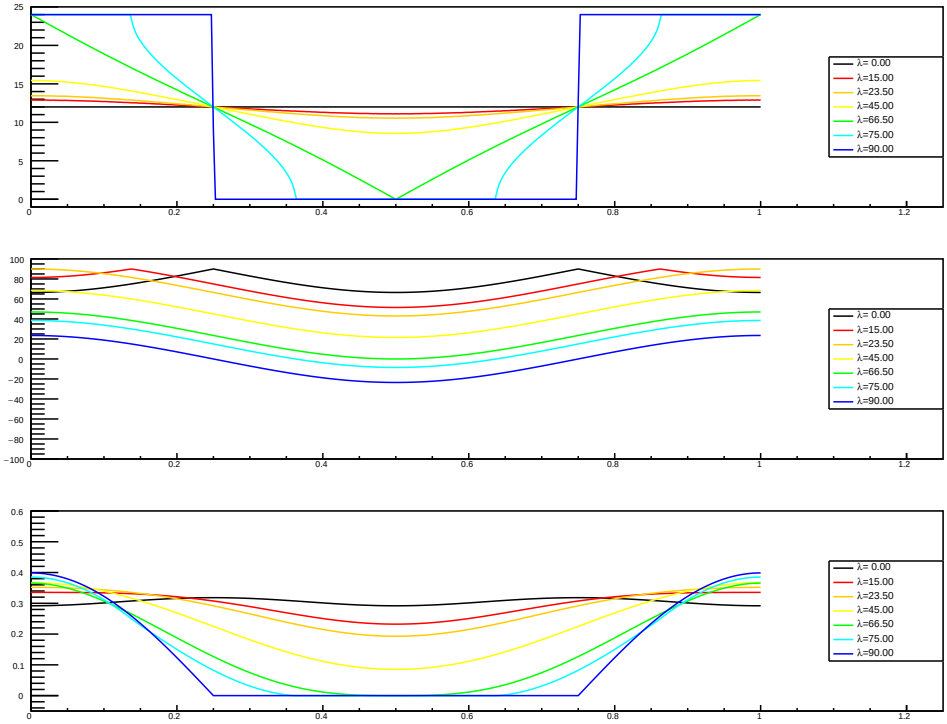


Figura 6.7: *In alto: durata del giorno (in ore). Al centro: elevazione massima del Sole a mezzogiorno (in gradi). In basso: insolazione giornaliera (frazione dell'insolazione massima). In tutte le figure l'asse orizzontale esprime il giorno come frazione di anno:* $0 =$ *solstizio di estate,* $0.25 =$ *equinozio di autunno,* $0.5 =$ *solstizio di inverno,* $0.75 =$ *equinozio di primavera. I diversi colori rappresentano diverse latitudini.*

- $\alpha(\psi_0) < 0 < \alpha(\psi_{1/2})$: esiste l'alternanza giorno-notte. Ha quindi senso cercare due posizioni ψ_+, ψ_- corrispondenti all'alba e al tramonto. Queste possono essere tradotte anche in orari: definendo le ore 12 corrispondenti al mezzogiorno,

$$\begin{aligned} t_{alba} &= 12\ \mathrm{h} - \frac{24\ \mathrm{h}}{2\pi\ \mathrm{rad}} \cdot \left(\psi_{1/2} - \psi_+\right) \\ t_{tramonto} &= 12\ \mathrm{h} + \frac{24\ \mathrm{h}}{2\pi\ \mathrm{rad}} \cdot \left(\psi_- - \psi_{1/2}\right) \end{aligned}$$

- $0 < \alpha(\psi_0) < \alpha(\psi_{1/2})$: è sempre giorno, il Sole non tramonta mai.
- $\alpha(\psi_0) < \alpha(\psi_{1/2}) < 0$: è sempre notte, il Sole non sorge mai.

Per tornare al problema iniziale (quando albeggia, e quando tramonta), potremmo procedere così: fissati θ e λ, anzitutto cerchiamo $\psi_{1/2}$, ovvero il "mezzogiorno locale". Anziché cercare una soluzione analitica, si può lavorare al computer, facendo una scansione di $\psi \in [0, 2\pi]$ a piccoli passi — per esempio a passi di un minuto: in tal caso l'angolo giro viene diviso in $\dfrac{24\text{ h}}{1\text{ min}} = 1440$ parti, quindi $\Delta\psi = \dfrac{2\pi}{1440}$. Si cerca il valore di ψ in cui $\alpha(\psi)$ è massimo: questo definisce $\psi_{1/2}$. Nella stessa scansione si possono cercare (se esistono) i valori di ψ in cui $\alpha(\psi)$ cambia di segno: se $\alpha(\psi)$ è crescente, abbiamo l'alba (ψ_+), mentre se $\alpha(\psi)$ è decrescente, abbiamo il tramonto (ψ_-).

La durata del giorno, a diverse latitudini, è rappresentata in Fig. 6.7 (alto). Analogamente, l'elevazione del Sole al mezzogiorno locale è raffigurata in Fig. 6.7 (centro).

Si può anche calcolare l'insolazione media al giorno. L'insolazione massima si avrebbe per $\hat{\boldsymbol{u}} \parallel \hat{\boldsymbol{n}}$, ovvero quando il Sole è allo zenith: ciò accade per esempio sul Tropico, al solstizio di estate, oppure sull'Equatore, negli equinozi, in entrambi i casi al mezzogiorno locale. L'insolazione istantanea è direttamente proporzionale a $\hat{\boldsymbol{u}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \sin\alpha$, e cambia durante le ore del giorno (di notte invece $\alpha < 0$ e l'insolazione è nulla). Il grafico dell'insolazione giornaliera media è in Fig. 6.7 (basso). Si vede che nella zona tropicale ($|\lambda| < 23.5°$) l'insolazione durante l'anno cambia poco, mentre nelle zone polari ($|\lambda| > 66.5°$) ci sono grosse variazioni fra estate e inverno, e la media annuale è decisamente più bassa (ragion per cui ai poli fa più freddo che ai tropici...)

Capitolo 7

Cinematica

In questo capitolo estenderemo i concetti della cinematica — velocità ed accelerazione, nonché le loro relazioni — al moto nello spazio tridimensionale. Anche qui analizzeremo moti di oggetti che possono essere considerati puntiformi, ovvero tali per cui il loro stato sia definito solo dalla posizione: più precisamente dal *raggio vettore*, o *vettore posizione*, introdotto nel Capitolo 4.

Vale la pena notare che la cinematica è solo descrittiva: definisce i concetti necessari alla descrizione del moto (traiettoria, legge oraria, velocità, accelerazione), ma non indaga le cause del moto. Esse vengono trattate dalla *dinamica*, introdotta nel Capitolo 8 e sviluppata nei capitoli successivi.

7.1 Traiettoria e legge oraria

Il moto di un oggetto puntiforme nello spazio tridimensionale è descritto da un vettore posizione $\vec{\boldsymbol{r}}$ che cambia in funzione del tempo:

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t) \tag{7.1}$$

(vd Fig. 7.1). L'insieme dei punti $\vec{\boldsymbol{r}}$ occupati dall'oggetto nel suo movimento si chiama *traiettoria*. La relazione fra posizione e tempo, espressa dall'Eq. (7.1), si chiama invece *legge oraria*.

È utile introdurre il *versore tangente alla traiettoria*, $\hat{\boldsymbol{t}}$: il suo orientamento definisce anche l'orientamento convenzionale della traiettoria [1].

[1] La forma della traiettoria in generale è determinata dalle condizioni nelle quali il punto

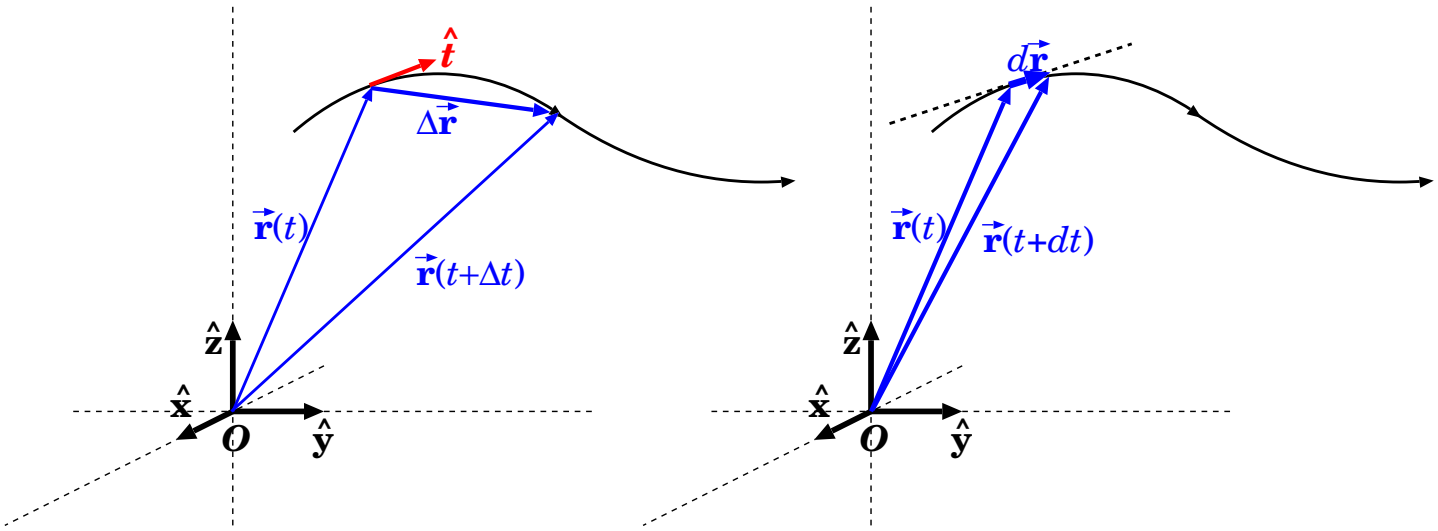


Figura 7.1: *Traiettoria e legge oraria $\vec{r} = \vec{r}(t)$ di un oggetto puntiforme. A sinistra: le posizioni $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t+\Delta t)$ in due diversi istanti, separati dal tempo Δt: il vettore-spostamento $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ è una corda che congiunge i due punti sulla traiettoria. A destra: nel limite $\Delta t \to 0$ lo spostamento infinitesimo $d\vec{r}$ è tangente alla traiettoria.*

7.1.1 Spostamenti lungo la traiettoria

In un intervallo di tempo Δt l'oggetto si sposta dalla posizione $\vec{r}(t)$ alla posizione $\vec{r}(t+\Delta t)$, compiendo uno spostamento

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) \tag{7.2}$$

che graficamente si può rappresentare come una *corda* congiungente due punti sulla traiettoria, come in Fig. 7.1 (sinistra). Per tempi Δt sempre più piccoli, tale corda si avvicina sempre più alla traiettoria, tendendo alla retta tangente alla traiettoria stessa. Nel limite $\Delta t \to 0$ lo spostamento infinitesimo $d\vec{r}$ è dunque *tangente* alla traiettoria, come raffigurato in Fig. 7.1 (destra). Come già detto in precedenza, mentre una variazione di una quantità viene indicata con Δ, una variazione infinitesima viene indicata con d.

Nel Capitolo 2 avevamo considerato moti lungo una curva predefinita, indicando con la quantità ds lo spostamento infinitesimo. Ora vediamo che ds e $d\vec{r}$ sono legati dalla relazione:

$$d\vec{r} \;=\; ds\,\hat{t} \tag{7.3}$$

materiale si muove. Tuttavia, in molti casi il verso della percorrenza della traiettoria può essere invertito: si pensi ad un carrello su una rotaia, o al moto di un pianeta intorno al Sole.

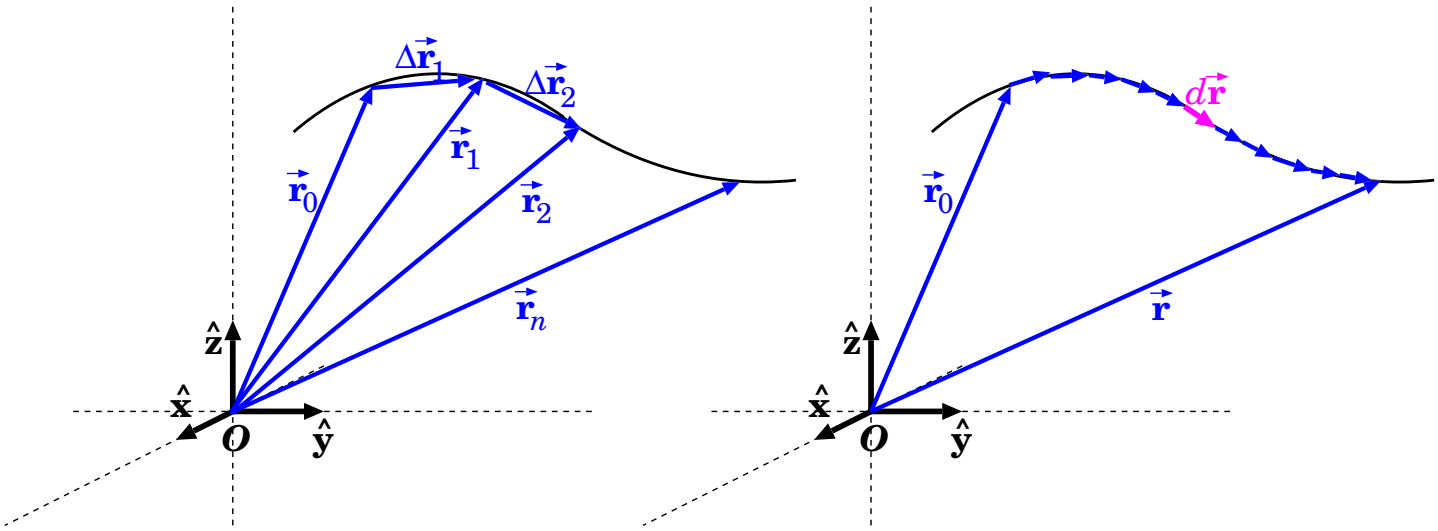


Figura 7.2: *Spostamento finito come successione di spostamenti più piccoli (a sinistra) e di spostamenti infinitesimi (a destra).*

Si noti che ds può essere > 0 o < 0, a seconda che lo spostamento $d\vec{r}$ sia concorde o discorde rispetto a $\hat{t}$ [2].

7.1.2 Successione di spostamenti infinitesimi

Uno spostamento lungo la traiettoria può essere sempre scomposto in una successione di spostamenti più piccoli.

Nella Fig. 7.2, a sinistra, un oggetto si sposta dalla posizione iniziale $\vec{r}_0$ alla posizione finale $\vec{r}_n$, attraverso una successione $\Delta\vec{r}_1, \Delta\vec{r}_2, \ldots, \Delta\vec{r}_n$ di spostamenti più piccoli. Ciascuno produce un cambiamento di posizione:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= \vec{r}_0 + \Delta\vec{r}_1 \\
\vec{r}_2 &= \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 \\
\vec{r}_3 &= \vec{r}_2 + \Delta\vec{r}_3 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\vec{r}_{n-1} &= \vec{r}_{n-2} + \Delta\vec{r}_{n-1} \\
\vec{r}_n &= \vec{r}_{n-1} + \Delta\vec{r}_n
\end{aligned}$$

Concatenando tutte queste relazioni si ottiene

$$\vec{r}_n = \vec{r}_0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta\vec{r}_i$$

[2] Si noti anche che sarebbe stato sbagliato scrivere $d\vec{r} = dr\,\hat{t}$: infatti $r = |\vec{r}|$, quindi $dr = d|\vec{r}|$, e $d|\vec{r}| \neq |d\vec{r}|$!

Aumentando il numero n di spostamenti, ciascuno di essi può essere reso sempre più piccolo, al limite infinitesimo: $\Delta\vec{\boldsymbol{r}}_i \to d\vec{\boldsymbol{r}}$. Contemporaneamente, il numero di elementi della somma diventa infinito: $n \to +\infty$. Questa situazione è rappresentata in Fig. 7.2 a destra: gli spostamenti infinitesimi $d\vec{\boldsymbol{r}}$ giacciono tutti sulla traiettoria. Come abbiamo già visto, nel caso limite di una somma di infiniti termini infinitesimi, si usa il simbolo di *integrale*:

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_0 + \int d\vec{\boldsymbol{r}} \tag{7.4}$$

7.2 Velocità

Se un oggetto puntiforme, in un tempo Δt, si sposta dalla posizione $\vec{\boldsymbol{r}}(t)$ alla posizione $\vec{\boldsymbol{r}}(t+\Delta t)$, compie uno spostamento:

$$\Delta\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t+\Delta t) - \vec{\boldsymbol{r}}(t) \tag{7.5}$$

come raffigurato in Fig. 7.1 (sinistra). Come fatto nel caso unidimensionale, si definisce la *velocità vettoriale* come rapporto fra $\Delta\vec{\boldsymbol{r}}$ e Δt, nel limite $\Delta t \to 0$.

$$\vec{\boldsymbol{v}}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}(t+\Delta t)-\vec{\boldsymbol{r}}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}(t)}{dt} \tag{7.6}$$

ovvero si considera lo spostamento infinitesimo $d\vec{\boldsymbol{r}}$ che avviene in un tempo infinitesimo dt. Poiché lo spostamento infinitesimo $d\vec{\boldsymbol{r}}$ è tangente alla traiettoria (vd Fig. 7.1 (destra)), anche la velocità $\vec{\boldsymbol{v}}$ lo è.

Anche la velocità si può scomporre in componenti cartesiane:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = v_x\,\hat{\boldsymbol{x}} + v_y\,\hat{\boldsymbol{y}} + v_z\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{7.7}$$

Poiché i vettori si sommano e si sottraggono per componenti, l'Eq. (7.6) è equivalente alle equazioni:

$$\begin{aligned}
v_x &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}\\
v_y &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} = \frac{dy(t)}{dt}\\
v_z &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t} = \frac{dz(t)}{dt}
\end{aligned} \tag{7.8}$$

7.2.1 Spostamento come integrale della velocità

Abbiamo visto in Sezione 7.1.2 e in Fig. 7.2 che uno spostamento $\Delta\vec{\boldsymbol{r}}$ può essere scomposto in una successione di spostamenti infinitesimi, Eq. (7.4):

$$\Delta\vec{\boldsymbol{r}} = \int d\vec{\boldsymbol{r}}$$

Dalla definizione di velocità, Eq. (7.6), possiamo esprimere lo spostamento infinitesimo all'istante t come

$$d\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{v}}(t)dt \tag{7.9}$$

Pertanto lo spostamento finito può essere scritto:

$$\Delta\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t) - \vec{\boldsymbol{r}}(t_0) = \int_{t_0}^{t} dt'\, \vec{\boldsymbol{v}}(t') \tag{7.10}$$

oppure in coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned} \Delta x &= x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} dt'\, v_x(t') \\ \Delta y &= y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} dt'\, v_y(t') \\ \Delta z &= z(t) - z(t_0) = \int_{t_0}^{t} dt'\, v_z(t') \end{aligned} \tag{7.11}$$

Notiamo che per calcolare la posizione finale $\vec{\boldsymbol{r}}(t)$ è necessario conoscere la posizione all'istante iniziale $\vec{\boldsymbol{r}}(t_0)$, oltre la velocità $\vec{\boldsymbol{v}}(t')$ per tutti gli istanti $t' \in [t_0; t]$.

7.2.2 Velocità scalare

Si può definire anche la *velocità scalare*, come limite del rapporto fra lo spostamento ds lungo la traiettoria e il tempo dt impiegato a percorrerlo:

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{7.12}$$

esattamente come fatto nel Capitolo 2. Essendo $d\vec{\boldsymbol{r}} = ds\,\hat{\boldsymbol{t}}$ — vd Eq. (7.3) — troviamo $\vec{\boldsymbol{v}} = \dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \dfrac{ds\,\hat{\boldsymbol{t}}}{dt} = \dfrac{ds}{dt}\hat{\boldsymbol{t}} = v\,\hat{\boldsymbol{t}}$ e quindi:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = v\,\hat{\boldsymbol{t}} \tag{7.13}$$

Vale la pena notare che v può essere > 0 o < 0, a seconda che lo spostamento $d\vec{\boldsymbol{r}}$ — o la velocità vettoriale $\vec{\boldsymbol{v}}$ — sia concorde o discorde rispetto a $\hat{\boldsymbol{t}}$. In particolare, $v \neq |\vec{\boldsymbol{v}}|$, ma $|v| = |\vec{\boldsymbol{v}}|$.

7.3 Accelerazione

In maniera del tutto analoga si definisce l'*accelerazione vettoriale*, come il rapporto fra la variazione di velocità $\Delta\vec{\boldsymbol{v}}$ e il tempo Δt in cui essa ha luogo, nel limite $\Delta t \to 0$. Scritto in forma vettoriale:

$$\vec{\boldsymbol{a}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\boldsymbol{v}}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\boldsymbol{v}}(t+\Delta t) - \vec{\boldsymbol{v}}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}(t)}{dt} \tag{7.14}$$

Come fatto per la velocità, anche l'accelerazione può essere scritta per componenti cartesiane:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = a_x\,\hat{\boldsymbol{x}} + a_y\,\hat{\boldsymbol{y}} + a_z\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{7.15}$$

L'Eq. (7.14) è equivalente alle 3 equazioni per componenti cartesiane:

$$\begin{aligned}
a_x &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} = \frac{dv_x(t)}{dt} \\
a_y &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_y(t+\Delta t) - v_y(t)}{\Delta t} = \frac{dv_y(t)}{dt} \\
a_z &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_z(t+\Delta t) - v_z(t)}{\Delta t} = \frac{dv_z(t)}{dt}
\end{aligned} \tag{7.16}$$

7.3.1 Variazione di velocità come integrale dell'accelerazione

In presenza di accelerazione, la velocità subisce variazioni. Dalla definizione di accelerazione, Eq. (7.14), possiamo esprimere la variazione infinitesima di velocità all'istante t come

$$d\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{a}}(t)dt \tag{7.17}$$

Quanto varia la velocità, da un istante t_0 ad un istante t? Il ragionamento è del tutto analogo a quanto fatto per velocità e spostamenti. Avevamo visto che

$$\vec{\boldsymbol{v}}(t) = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}(t)}{dt} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t) - \vec{\boldsymbol{r}}(t_0) = \int_{t_0}^{t} dt'\,\vec{\boldsymbol{v}}(t')$$

Essendo $\vec{\boldsymbol{a}}(t) = \dfrac{d\vec{\boldsymbol{v}}(t)}{dt}$ identico, formalmente, a $\vec{\boldsymbol{v}}(t) = \dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}(t)}{dt}$, deve valere una regola di integrazione analoga, con la sostituzione $(\vec{\boldsymbol{r}}, \vec{\boldsymbol{v}}) \to (\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{a}})$, ovvero:

$$\Delta\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}(t) - \vec{\boldsymbol{v}}(t_0) = \int_{t_0}^{t} dt'\, \vec{\boldsymbol{a}}(t') \tag{7.18}$$

oppure in coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned} \Delta v_x &= v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{t_0}^{t} dt'\, a_x(t') \\ \Delta v_y &= v_y(t) - v_y(t_0) = \int_{t_0}^{t} dt'\, a_y(t') \\ \Delta v_z &= v_z(t) - v_z(t_0) = \int_{t_0}^{t} dt'\, a_z(t') \end{aligned} \tag{7.19}$$

Notiamo che per calcolare la velocità finale $\vec{\boldsymbol{v}}(t)$ è necessario conoscere la velocità all'istante iniziale $\vec{\boldsymbol{v}}(t_0)$, oltre l'accelerazione $\vec{\boldsymbol{a}}(t')$ per tutti gli istanti $t' \in [t_0; t]$.

7.4 Moto rettilineo uniforme

Il primo esempio di moto particolare che consideriamo è quello con accelerazione nulla:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = 0$$

È ovviamente un caso *molto particolare*. Tuttavia vedremo che rappresenta un caso fisico ben preciso: quello di un oggetto che *non è soggetto a interazioni con l'ambiente circostante.*

La prima considerazione è che la velocità vettoriale deve essere costante:

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\boldsymbol{v}} = \text{costante}$$

La legge oraria si ottiene integrando la velocità nel tempo (vd Eq. (7.10) oppure Eq. (7.11)):

$$\vec{\boldsymbol{r}}(t) = \vec{\boldsymbol{r}}(t_0) + \int_{t_0}^{t} dt'\, \vec{\boldsymbol{v}}(t') = \vec{\boldsymbol{r}}(t_0) + \vec{\boldsymbol{v}} \int_{t_0}^{t} dt'$$

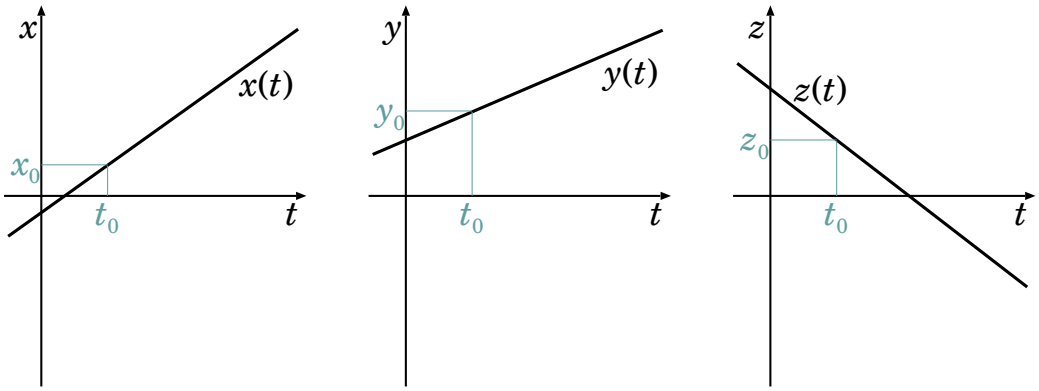


Figura 7.3: *Grafici della legge oraria del moto rettilineo uniforme, per le tre coordinate cartesiane* $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. *La posizione* (x_0, y_0, z_0) *è occupata all'istante* $t = t_0$. *La pendenza delle rette nei tre grafici dipende dalle tre componenti cartesiane della velocità: i coefficienti angolari delle tre rette sono rispettivamente* v_x, v_y, v_z. *Nell'esempio di questa figura,* v_x *e* v_y *sono positive — cioè* x, y *crescono nel tempo — e* $v_x > v_y$. *Invece* v_z *è negativa, cioè* z *decresce nel tempo.*

(essendo $\vec{\boldsymbol{v}}$ costante, può essere fattorizzato al di fuori dell'integrale). Ovviamente $\int_{t_0}^{t} dt' = (t - t_0)$, pertanto la legge oraria del moto è semplicemente data da:

$$\vec{\boldsymbol{r}}(t) = \vec{\boldsymbol{r}}_0 + (t - t_0) \cdot \vec{\boldsymbol{v}} \qquad \text{(moto rettilineo uniforme)} \tag{7.20}$$

oppure in coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + (t - t_0) \cdot v_x \\ y(t) &= y_0 + (t - t_0) \cdot v_y \qquad \text{(moto rettilineo uniforme)} \\ z(t) &= z_0 + (t - t_0) \cdot v_z \end{aligned} \tag{7.21}$$

La rappresentazione grafica della legge oraria del moto rettilineo uniforme, per le tre componenti cartesiane, appare come nella Fig. 7.3.

Le Eq. (7.21) sono equazioni parametriche di una retta: infatti per valori arbitrari di Δt, i rapporti $\Delta x/\Delta y$, $\Delta x/\Delta z$, $\Delta z/\Delta y$ restano costanti, ovvero la traiettoria non subisce variazioni di direzione.

Per riassumere, abbiamo trovato che *un oggetto puntiforme non soggetto*

ad accelerazioni si muove lungo una traiettoria rettilinea, con velocità $v = |\vec{\boldsymbol{v}}|$ *costante* — da cui il nome di *moto rettilineo uniforme.*

7.5 Moto uniformemente accelerato

Il secondo esempio di moto particolare che consideriamo è quello con accelerazione costante:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \text{costante}$$

Anche questo è un caso molto particolare. Tuttavia anch'esso presenta molte applicazioni. Fra queste, ricordiamo per esempio i moti soggetti alla gravità in prossimità della superficie terrestre.

7.5.1 Integrazione del moto

Affrontiamo l'integrazione del moto. L'Eq. (7.14):

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}(t)}{dt}$$

oppure le Eq. (7.16):

$$a_x = \frac{dv_x(t)}{dt} \quad ; \quad a_y = \frac{dv_y(t)}{dt} \quad ; \quad a_z = \frac{dv_z(t)}{dt}$$

ci dicono come cambia la velocità nel tempo. Dalle formule della Sezione 3.3 sappiamo che l'integrale di una funzione costante è una funzione lineare, $\int a\,dt = at$, pertanto:

$$\vec{\boldsymbol{v}}(t) = \vec{\boldsymbol{v}}_0 + (t - t_0) \cdot \vec{\boldsymbol{a}} \qquad \text{(moto uniformemente accelerato)} \tag{7.22}$$

oppure in coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{x,0} + (t - t_0) \cdot a_x \\ v_y(t) &= v_{y,0} + (t - t_0) \cdot a_y \\ v_z(t) &= v_{z,0} + (t - t_0) \cdot a_z \end{aligned} \tag{7.23}$$

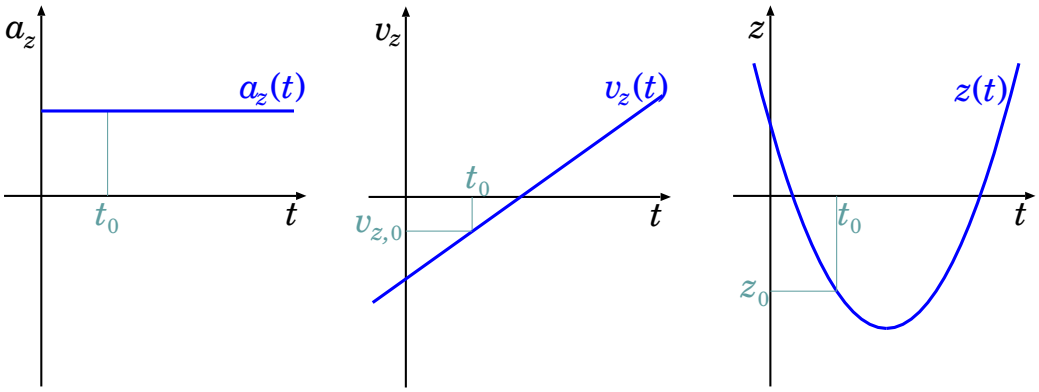


Figura 7.4: *Grafici dell'evoluzione temporale dell'accelerazione (a sinistra), della velocità (al centro) e della posizione (a destra) di un moto uniformemente accelerato. In figura è rappresentata la coordinata z; grafici analoghi valgono per x, y. L'accelerazione in questo esempio è positiva: quindi la velocità cresce linearmente nel tempo, e la posizione ha un andamento parabolico con la concavità verso l'alto.*

La legge oraria del moto si ottiene *integrando* le Eq. (7.22), oppure Eq. (7.23). Usando le regole della Sezione 3.3: $\int dt\,(v + at) = vt + \frac{1}{2}at^2$. Si ricava che la legge oraria è:

$$\vec{\boldsymbol{r}}(t) = \vec{\boldsymbol{r}}_0 + (t - t_0) \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_0 + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{a}} \cdot (t - t_0)^2 \quad \text{(moto uniformemente accelerato)} \tag{7.24}$$

oppure in coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + (t - t_0) \cdot v_{x,0} + \frac{1}{2}a_x \cdot (t - t_0)^2 \\ y(t) &= y_0 + (t - t_0) \cdot v_{y,0} + \frac{1}{2}a_y \cdot (t - t_0)^2 \\ z(t) &= z_0 + (t - t_0) \cdot v_{z,0} + \frac{1}{2}a_z \cdot (t - t_0)^2 \end{aligned} \tag{7.25}$$

La rappresentazione grafica della legge oraria del moto uniformemente accelerato, per la componente cartesiana z, appare come nella Fig. 7.4.

7.5.2 Traiettoria

Per capire la forma della traiettoria, conviene orientare gli assi cartesiani in modo che $\hat{\boldsymbol{z}}$ sia parallelo a $\vec{\boldsymbol{a}}$, in tal caso:

$$a_x = a_y = 0 \quad ; \quad a_z \equiv a$$

e le componenti della velocità lungo x, y sono costanti: $v_x = v_{x,0}$ e $v_y = v_{y,0}$. Possiamo inoltre scegliere $\hat{\boldsymbol{y}}$ ortogonale alla velocità iniziale $\vec{\boldsymbol{v}}_0$, cosicché:

$$v_y = 0$$

La legge oraria in coordinate cartesiane diventa quindi:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + t \cdot v_{x,0} \\ y(t) &= y_0 \\ z(t) &= z_0 + t \cdot v_{z,0} + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \end{aligned}$$

(per semplicità di calcolo abbiamo assunto $t_0 = 0$). Il grafico della legge oraria, per le tre coordinate, è illustrato in Fig. 7.5.

Abbiamo quindi due casi:

- La velocità iniziale $\vec{\boldsymbol{v}}_0$ è nulla, oppure parallela all'accelerazione $\vec{\boldsymbol{a}}$. In tal caso, anche $v_{x,0} = 0$; l'oggetto si muove solo lungo $\hat{\boldsymbol{z}}$, cioè è un moto rettilineo: si chiama *moto rettilineo uniformemente accelerato*. Esso è caratterizzato da:

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 + v_{z,0} t + \frac{a}{2} t^2 \\ v_z(t) &= v_{z,0} + at \end{aligned}$$

- La velocità iniziale $\vec{\boldsymbol{v}}_0$ ha una componente ortogonale all'accelerazione $\vec{\boldsymbol{a}}$. Allora $v_x = v_{x,0} \neq 0$; si può ricavare $t = \dfrac{x - x_0}{v_{x,0}}$ dalla 1ª equazione e sostituirlo nella 3^a, ottenendo:

$$z = z_0 + v_{z,0} \left(\frac{x - x_0}{v_{x,0}} \right) + \frac{a}{2} \left(\frac{x - x_0}{v_{x,0}} \right)^2$$

  Allora z ha una dipendenza quadratica da x, quindi la traiettoria è una parabola con l'asse parallelo a $\hat{\boldsymbol{z}}$. La concavità della parabola è rivolta verso $+\hat{\boldsymbol{z}}$ o $-\hat{\boldsymbol{z}}$ a seconda che sia $a > 0$ o $a < 0$.

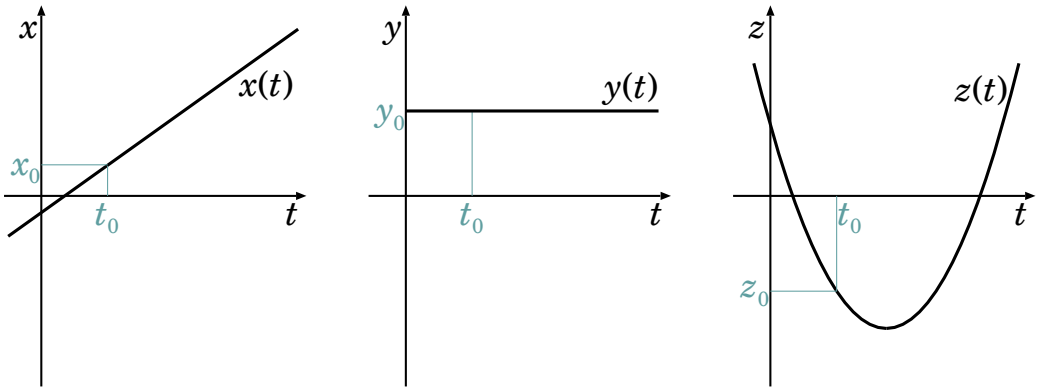


Figura 7.5: *Grafici della legge oraria del moto uniformemente accelerato, per le tre coordinate cartesiane $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. L'orientamento degli assi cartesiani è stato scelto in modo che l'accelerazione $\vec{\boldsymbol{a}}$ sia lungo l'asse z e che la velocità iniziale $\vec{\boldsymbol{v}}_0$ non abbia componente lungo l'asse y. In questo modo il grafico della legge oraria $x(t)$ è una retta (non c'è accelerazione lungo x) mentre quello di $y(t)$ è una retta orizzontale (non c'è velocità lungo y). Invece, in grafico della legge oraria $z(t)$ è una parabola: nell'esempio, $a_z > 0$, cosicché la concavità è verso l'alto — per $a_z < 0$ la concavità sarebbe stata verso il basso. La posizione (x_0, y_0, z_0) è occupata all'istante $t = t_0$.*

7.5.3 Esercizi sul moto rettilineo uniformemente accelerato

Ricordiamo le leggi orarie del moto uniformemente accelerato, nel caso particolare che esso avvenga lungo una linea retta. Possiamo scegliere il sistema di coordinate $Oxyz$ in modo che l'asse x sia orientato lungo la direzione del moto: le Eq. (7.25), Eq. (7.23) si riducono a:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a \cdot (t - t_0)^2 \\ v(t) &= v_0 + a \cdot (t - t_0) \end{aligned} \tag{7.26}$$

(lungo y, z non c'è moto).

Esercizio 7.1. *Una pallina rotola giù per una rotaia inclinata, partendo da ferma. Per scendere di una lunghezza $\ell = 1.5$ m impiega un tempo $t = 5$ s. Assumendo che il moto sia uniformemente accelerato, calcolare l'accelerazione a. Che velocità ha raggiunto?*

Risposta. *Poiché la pallina parte da ferma, la relazione fra la distanza ℓ percorsa e il tempo impiegato è $\ell = \frac{1}{2}at^2$. Da qui si può ricavare l'accelerazione*

$a = \frac{2\ell}{t^2} = \frac{3\ \mathrm{m}}{25\ \mathrm{s}^2} = 0.12\ \mathrm{m/s}^2$. *La velocità finale pertanto è* $v = at = 0.12\ \mathrm{m/s}^2 \cdot 5\ \mathrm{s} = 0.6\ \mathrm{m/s}$.

Esercizio 7.2. *Consideriamo sempre la pallina e la rotaia dell'esempio precedente. Lungo la discesa, a distanze intermedie* $x_1 = 50$ cm, $x_2 = 1$ m, *sono poste delle fotocellule collegate a cronometri, che rilevano tempi di passaggio di* $t_1 = 2.89$ s *e* $t_2 = 4.08$ s *rispettivamente. Queste osservazioni confermano che il moto sia effettivamente "uniformemente accelerato"?*

Risposta. *Con l'accelerazione calcolata, ci si aspetta che le distanze percorse dopo un tempo* t_k *siano* $x_k = \frac{1}{2}at_k^2$; *dunque, al tempo* $t_1 = 2.89$ s *risulterebbe* $x_1 = 0.501$ m, *e a* $t_2 = 4.08$ s *risulterebbe* $x_2 = 0.999$ m. *Queste previsioni sono in accordo entro 1 mm con le posizioni dei cronometri.*

Commento. *Un accordo entro 1 mm è accettabile? Con quale precisione è nota la posizione delle fotocellule? Qual è la precisione dei cronometri? Per concludere se l'osservazione è in accordo con l'ipotesi di moto uniformemente accelerato bisognerebbe investigare questi quesiti. Purtroppo ciò va al di là dello scopo di questo testo...*

Esercizio 7.3. *Un carrello scende lungo una rotaia con moto uniformemente accelerato. Partendo da fermo, impiega* $t = 10$ s *per percorrere* $\ell = 5$ m. *Lo stesso carrello, se lanciato dal basso con una velocità* v_0, *risale la rotaia fino a fermarsi dopo una distanza* $\ell' = 3$ m. *Calcolare* v_0.

Risposta. *Come negli esempi precedenti, si può calcolare l'accelerazione del carrello in discesa:* $a = \frac{2\ell}{t^2} = 0.1\ \mathrm{m/s}^2$. *Per calcolare* v_0 *occorre sapere con che legge si muove il carrello in salita. Si tratta di un modo "uniformemente decelerato", ovvero uniformemente accelerato con accelerazione negativa. L'accelerazione è caratteristica del sistema carrello-rotaia, pertanto sarà la stessa che aveva in discesa, a parte il segno. Possiamo scrivere quindi* $x(t) = v_0 t - \frac{a}{2}t^2$, *esplicitando il segno* $-$ *davanti ad* a. *Il tempo* t' *a cui il carrello si arresta è dato dalla legge della velocità,* $v(t) = v_0 - at$, *in cui si ponga* $v(t') = 0$, *quindi:* $t' = \frac{v_0}{a}$. *Introducendo* t' *nella legge di* $x(t)$, *e imponendo* $x(t') = \ell'$, *si ottiene* $\ell' = v_0 t' - \frac{a}{2}(t')^2 = \frac{v_0^2}{a} - \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2a}$. *Risolvendo per* v_0, *abbiamo* $v_0 = \sqrt{2a\ell'} = \sqrt{0.6\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2} = 0.775\ \mathrm{m/s}$.

7.5.4 Esercizi sui moti di caduta

In prossimità della superficie terrestre, un oggetto sottoposto solo alla gravità subisce una accelerazione diretta verso il basso, pari a:

$$\vec{a} = -g\hat{z}$$

essendo $g = 9.806$ m/s^2 [3] e $\hat{\boldsymbol{z}}$ il versore verticale orientato verso l'alto.

Pertanto, qualunque moto di oggetti sotto l'azione della gravità — in prossimità della superficie terrestre!! — è riconducibile al moto uniformemente accelerato.

Esercizio 7.4. *Un oggetto cade da fermo nel campo gravitazionale terrestre. Che distanza ha percorso, e che velocità ha raggiunto, dopo 1 secondo?*

Risposta. *Si fa semplicemente uso delle componenti-z delle Eq. (7.25) e Eq. (7.23):*

$$\Delta z = -\frac{g}{2}t^2 = -4.903 \text{ m} \qquad ; \qquad v_z = -gt = -9.806 \text{ m/s}$$

Esercizio 7.5. *Un oggetto cade da fermo dall'altezza $h = 1$ m nel campo gravitazionale terrestre. Quanto tempo dura la sua caduta? Con che velocità raggiunge il suolo? Come cambierebbero queste risposte, se l'altezza della caduta fosse $h' = 2$ m?*

Risposta. *Si tratta di un moto uniformemente accelerato con $\vec{\boldsymbol{a}} = -g\hat{\boldsymbol{z}}$. L'oggetto parte da fermo, pertanto le componenti della velocità lungo le direzioni orizzontali x, y sono e restano nulle. Il moto è quindi rettilineo lungo la verticale. Scegliamo l'origine ($z = 0$) al livello del suolo, cosicché il valore iniziale di z è $z_0 = h$. La legge oraria è data dalla componente lungo z delle Eq. (7.25):*

$$z = h - \frac{g}{2}t^2$$

L'oggetto tocca terra quando $z = 0$, dunque deve essere $0 = h - \frac{g}{2}t^2$: risolvendo per t si trova

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.45 \text{ s}$$

La velocità con cui l'oggetto cade è data dalla componente lungo z delle Eq. (7.23): all'istante in cui tocca il suolo abbiamo:

$$v_z = -gt = -\sqrt{2gh} = -4.43 \text{ m/s}$$

Il segno $-$ di v_z significa che la velocità ha direzione opposta all'orientamento dell'asse z.

Sia il tempo impiegato a cadere, che la velocità finale, sono proporzionali a $\sqrt{h}$. Se la caduta fosse stata da $h' = 2$ m, entrambi aumenterebbero di un fattore $\sqrt{2}$, diventando rispettivamente 0.64 s *e* -6.26 m/s

[3] In realtà il valore di g non è uniforme su tutta la superficie terrestre: quello indicato qui è un valore valido alle medie latitudini.

Esercizio 7.6. *Un oggetto cade dall'altezza $h = 1$ m nel campo gravitazionale terrestre. La sua velocità iniziale è orizzontale e vale $v_{x0} = 2$ m/s. Quanto tempo dura la sua caduta? Quanto è spostato il punto in cui cade, rispetto alla posizione in cui cadrebbe partendo da fermo?*

Risposta. *Si tratta sempre di un moto uniformemente accelerato con $\vec{\boldsymbol{a}} = -g\hat{\boldsymbol{z}}$, però ora la velocità iniziale ha una componente ortogonale alla accelerazione. Quindi il moto non è più rettilineo — anzi sappiamo che è parabolico. Il problema va affrontato in due dimensioni. Scegliamo l'origine degli assi cartesiani al livello del suolo, nel punto dove cadrebbe l'oggetto se partisse da fermo. La legge oraria è data dalle componenti x, z delle Eq. (7.25):*

$$z = h - \frac{g}{2}t^2 \qquad ; \qquad x = v_{x0}t$$

Il tempo impiegato a cadere si ricava sempre dalla legge oraria di z, imponendo $z = 0$, cioè esattamente come nell'esempio precedente: il risultato è ovviamente identico:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.45 \text{ s}$$

ovvero il tempo impiegato a cadere non cambia se il moto aveva una componente iniziale di velocità orizzontale. Lo spostamento del punto di caduta rispetto alla caduta verticale è:

$$\Delta x = v_{x0}t = v_{x0}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.90 \text{ m}$$

Esercizio 7.7. *Un oggetto viene sparato dall'altezza $h = 1$ m nel campo gravitazionale terrestre. La sua velocità iniziale è obliqua, con una componente verticale $v_{z0} = 3$ m/s e una orizzontale $v_{x0} = 2$ m/s. Quanto tempo dura la sua caduta? Quanto è spostato il punto in cui cade, rispetto alla posizione in cui cadrebbe partendo da fermo?*

Risposta. *Anche qui si tratta di un moto uniformemente accelerato con $\vec{\boldsymbol{a}} = -g\hat{\boldsymbol{z}}$, con traiettoria parabolica. Il problema si affronta in due dimensioni. Scegliamo l'origine degli assi cartesiani al livello del suolo, nel punto dove cadrebbe l'oggetto se partisse da fermo. La legge oraria è data dalle componenti x, z delle Eq. (7.25):*

$$z = h + v_{z0}t - \frac{g}{2}t^2 \qquad ; \qquad x = v_{x0}t$$

La durata del volo si ricava sempre imponendo $z = 0$ e risolvendo per t, però questa volta c'è una componente iniziale della velocità verticale che cambia il risultato. L'equazione da risolvere è $gt^2 - 2v_{z0}t - 2h = 0$. Si tratta di una equazione di 2° grado nell'incognita t, che ha due soluzioni:

$$t_{\pm} = \frac{v_{z0} \pm \sqrt{v_{z0}^2 + 2gh}}{g}$$

La soluzione $t_- = \dfrac{v_{z0} - \sqrt{v_{z0}^2 + 2gh}}{g}$ *è negativa (essendo* $\sqrt{v_{z0}^2 + 2gh} > v_{z0}$*), pertanto si riferirebbe ad un tempo anteriore alle condizioni iniziali, cioè a prima che il proiettile venisse sparato. Per questa ragione viene scartata, e ci concentriamo su quella positiva:*

$$t_+ = \frac{v_{z0} + \sqrt{v_{z0}^2 + 2gh}}{g} = 0.85 \text{ s}$$

Lo spostamento del punto di caduta rispetto alla caduta verticale è:

$$\Delta x = v_{x0} t_+ = 1.70 \text{ m}$$

Osservazione. *Notiamo che il tempo di caduta è maggiore rispetto ai casi precedenti, nonostante l'altezza iniziale sia la stessa:* $h = 1$ m. *La ragione sta nel fatto che il proiettile era dotato di una velocità iniziale con una componente* v_{z0} *diretta verso l'alto. Pertanto prima di iniziare a cadere, è effettivamente salito. Per sapere di quanto è salito, dobbiamo trovare l'istante in cui la sua velocità verticale si è annullata. La legge oraria di tale velocità è*

$$v_z = v_{z0} - gt$$

da cui si ricava che abbiamo $v_z = 0$ *all'istante* $t = \dfrac{v_{z0}}{g} = 0.31$ s. *A tale istante il proiettile ha raggiunto un'altezza* $h + v_{z0}t - \dfrac{g}{2}t^2 = 1.46$ m.

Esercizio 7.8. *Un oggetto viene sparato dall'altezza del suolo nel campo gravitazionale terrestre. La sua velocità iniziale* $v_0 = 5$ m/s *è obliqua, e forma un angolo* α *con l'orizzontale. Calcolare qual è l'angolo ottimale per massimizzare la "gittata", ovvero la distanza a cui il proiettile tocca il suolo. Quindi calcolare la gittata.*

Risposta. *Scegliamo il sistema di riferimento cartesiano con l'origine nel punto dove viene sparato il proiettile. Il problema è bidimensionale. Le componenti della velocità iniziale sono*

$$v_{x0} = v_0 \cos\alpha \qquad ; \qquad v_{z0} = v_0 \sin\alpha$$

La legge oraria è:

$$z = v_{z0}t - \frac{g}{2}t^2 \qquad ; \qquad x = v_{x0}t$$

L'istante in cui il proiettile impatta il suolo è dato da $z = 0$*, quindi* $t\left(v_{z0} - \dfrac{g}{2}t\right) = 0$. *Questa equazione è di 2° grado e ha due soluzioni. Una è* $t = 0$*, che coincide con l'istante in cui il proiettile viene sparato: non è quella che cerchiamo. L'altra è*

$$t = \frac{2v_{z0}}{g} = \frac{2v_0}{g}\sin\alpha$$

La gittata quindi vale

$$\Delta x = v_{x0}t = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2v_0}{g} \sin\alpha = \frac{v_0^2}{g} \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha$$

E qui occorre conoscere la trigonometria... in particolare, la relazione $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin(2\alpha)$. *Per massimizzare* Δx, *occorre massimizzare* $\sin(2\alpha)$. *Questo si ottiene per* $2\alpha = \pi/2$, *ovvero per* $\alpha = \pi/4$ *(45 gradi). In tal caso la gittata è*

$$\Delta x = \frac{v_0^2}{g} = 2.55 \text{ m}$$

Esercizio 7.9. *I delfini tursiopi sono veloci nuotatori: possono lanciarsi a grandi velocità ed emergere dall'acqua con salti alti anche 10 metri. Anche i pinguini non se la cavano male: battendo le ali sott'acqua possono acquisire una buona velocità e balzare fuori dall'acqua fino a 3 metri di altezza, cosa che permette loro di salire rapidamente sulle rive ghiacciate. Con quale velocità devono nuotare questi animali, per raggiungere queste altezze?*

Risposta. *Chiamiamo* v_0 *la velocità che l'animale riesce a tenere in acqua. Appena esce dall'acqua non può più spingersi, quindi è soggetto solo alla forza di gravità che lo tira verso il basso con accelerazione* g. *Dall'istante* $t = 0$ *in cui esce dall'acqua, il suo moto è governato dalle leggi orarie* $v = v_0 - gt$ *e* $h = v_0 t - \frac{g}{2}t^2$. *La massima altezza è raggiunta quando la velocità si annulla:* $0 = v_0 - gt$, *quindi* $t_{max} = \frac{v_0}{g}$. *L'altezza raggiunta a questo istante è* $h_{max} = v_0 t_{max} - \frac{g}{2}t_{max}^2 = v_0\frac{v_0}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2g}$. *Ovvero,* $v_0 = \sqrt{2gh_{max}}$.

Per il delfino, $h_{max} = 10$ m, *quindi* $v_0 = \sqrt{2(9.806 \text{ m/s}^2)(10 \text{ m})} = 14.00 \text{ m/s} \simeq 50 \text{ km/h}$.

Per il pinguino, $h_{max} = 3$ m, *quindi* $v_0 = \sqrt{2(9.806 \text{ m/s}^2)(3 \text{ m})} = 7.67 \text{ m/s} \simeq 28 \text{ km/h}$.

7.6 Moti circolari

Consideriamo un moto molto particolare: quello di un punto materiale che si muove lungo una traiettoria circolare, come illustrato in Fig. 7.6. Si tratta di un moto molto speciale: in natura è improbabile che un oggetto si muova lungo una traiettoria perfettamente circolare. In realtà, esistono molti esempi pratici per i quali questo moto è realizzato con vincoli meccanici — per esempio il punto materiale segue una rotaia, oppure è trattenuto a distanza fissa da un ancoraggio mediante un filo inestensibile.

Questi moti ci consentono di introdurre diversi concetti, come il raggio di curvatura e la velocità angolare. Infine, vedremo nella Sezione 7.7 che

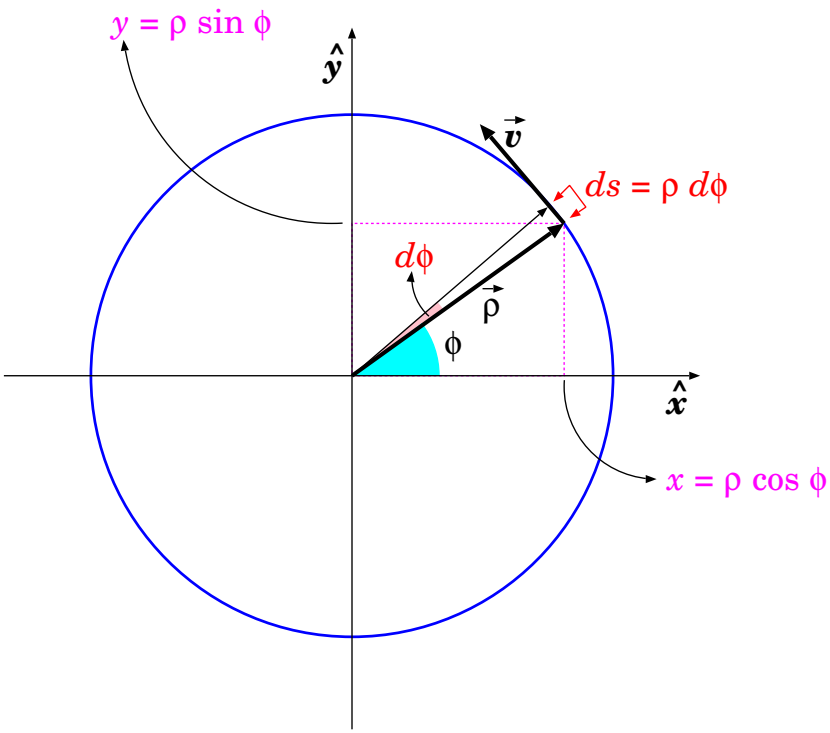


Figura 7.6: *Moto circolare.*

ogni moto curvilineo, per tratti infinitamente brevi, può essere approssimato come un moto lungo un archetto di cerchio.

7.6.1 Raggio di curvatura, velocità angolare

Il moto circolare è un moto piano, quindi può essere studiato con coordinate cartesiane $(O; x, y)$, in cui l'origine O è posta nel centro della traiettoria circolare. La distanza ρ dal centro è fissata, e definisce il *raggio di curvatura*; la posizione quindi è individuata da un angolo ϕ, e le coordinate cartesiane sono:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\phi \\ y &= \rho \sin\phi \end{aligned} \tag{7.27}$$

In un tempo infinitesimo dt, il punto si sposta con velocità scalare v lungo

la circonferenza, per un tratto ds tale che:

$$\begin{aligned} ds &= \rho\, d\phi \\ &= v\, dt \end{aligned}$$

pertanto:

$$v = \rho \frac{d\phi}{dt}$$

Si introduce la *velocità angolare*

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \tag{7.28}$$

che è legata alla velocità scalare v dalla relazione

$$v = \omega\, \rho \tag{7.29}$$

Notiamo ancora una volta che v può essere > 0 o < 0, e quindi lo stesso vale per $d\phi$, ds, ω. La convenzione del segno è quella degli angoli: se il moto è antiorario, $d\phi > 0$ e quindi anche $\omega > 0$, $v > 0$.

7.6.2 Accelerazione tangenziale e centripeta

Le componenti cartesiane della velocità $\vec{\boldsymbol{v}}$ si ottengono per derivazione temporale delle Eq. (7.27):

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = -\rho\, \omega \sin\phi \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \rho\, \omega \cos\phi \end{aligned} \tag{7.30}$$

e derivando una seconda volta si ottengono le componenti cartesiane dell'accelerazione $\vec{\boldsymbol{a}}$:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \rho \left(-\frac{d\omega}{dt} \sin\phi - \omega^2 \cos\phi \right) \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \rho \left(\frac{d\omega}{dt} \cos\phi - \omega^2 \sin\phi \right) \end{aligned} \tag{7.31}$$

Confrontando le Eq. (7.31) con le Eq. (7.30), Eq. (7.27), e osservando che:

$$\rho \frac{d\omega}{dt} = \frac{dv}{dt} \qquad ; \qquad \begin{aligned} -\sin\phi &= \frac{v_x}{\omega\rho} = \frac{v_x}{v} \\ \cos\phi &= \frac{v_y}{\omega\rho} = \frac{v_y}{v} \end{aligned}$$

si trova:

$$\begin{aligned} a_x &= -\omega^2\, x + \frac{dv}{dt}\frac{v_x}{v} \\ a_y &= -\omega^2\, y + \frac{dv}{dt}\frac{v_y}{v} \end{aligned} \tag{7.32}$$

Possiamo riscrivere questa relazione in forma vettoriale:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{a}} &= a_x\hat{\boldsymbol{x}} + a_y\hat{\boldsymbol{y}} \\ \vec{\boldsymbol{\rho}} &= x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} \\ v\hat{\boldsymbol{t}} = \vec{\boldsymbol{v}} &= v_x\hat{\boldsymbol{x}} + v_y\hat{\boldsymbol{y}} \end{aligned}$$

da cui:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \underbrace{-\omega^2\,\vec{\boldsymbol{\rho}}}_{\vec{\boldsymbol{a}}_n} + \underbrace{\frac{dv}{dt}\hat{\boldsymbol{t}}}_{\vec{\boldsymbol{a}}_t} \tag{7.33}$$

L'accelerazione è stata scomposta in due componenti:

- una componente parallela alla direzione del moto, dunque tangente alla traiettoria:

$$\vec{\boldsymbol{a}}_t = \frac{dv}{dt}\hat{\boldsymbol{t}} \qquad \text{(accelerazione tangenziale)} \tag{7.34}$$

  che descrive la variazione della velocità scalare;

- una componente perpendicolare alla direzione del moto, diretta verso il centro della circonferenza

$$\vec{\boldsymbol{a}}_n = -\omega^2\vec{\boldsymbol{\rho}} \qquad \text{(accelerazione centripeta)} \tag{7.35}$$

  che descrive il cambiamento di direzione del moto.

Usando $\omega = \dfrac{v}{r}$ — Eq. (7.29) — l'Eq. (7.35) può essere scritta anche come:

$$\vec{\boldsymbol{a}}_n = -\frac{v^2}{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad \text{(accelerazione centripeta)} \tag{7.36}$$

7.6.3 Moto circolare uniforme

Un moto circolare di dice *uniforme* quando la *velocità scalare* v è costante. Dalla relazione $v = \omega\rho$ si deduce che anche ω è costante:

$$v \text{ costante} \quad ; \quad \omega \text{ costante} \qquad \text{(moto circolare uniforme)} \tag{7.37}$$

da cui la legge oraria dell'angolo azimuthale:

$$\phi(t) = \phi_0 + \omega t \qquad \text{(moto circolare uniforme)} \tag{7.38}$$

Inserendo questo risultato nelle Eq. (7.27), si ricava che le coordinate x, y per il moto circolare uniforme seguono leggi orarie *sinusoidali*:

$$\begin{cases} x(t) = \rho\cos(\omega t + \phi_0) \\ y(t) = \rho\sin(\omega t + \phi_0) \end{cases} \qquad \text{(moto circolare uniforme)} \tag{7.39}$$

Leggi orarie con questa forma sinusoidale (con ω costante!) si chiamano *moti oscillatori armonici*: ne riparleremo in Sezione 10.1.1.

Periodicità

Le funzioni trigonometriche $\cos, \sin$ sono funzioni *periodiche*, nel senso che

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha \quad ; \quad \sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha \qquad \forall\ \alpha$$

Questa proprietà si traduce in una *periodicità temporale*. Infatti $\cos(\omega t + \phi_0) = \cos(\omega t + \phi_0 + 2\pi) = \cos\left(\omega \cdot \left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \phi_0\right)$ — e analogamente per sin — cosicché:

$$\begin{aligned} x(t) &= x\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) \\ y(t) &= y\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) \end{aligned}$$

Da questa scrittura risulta che il moto circolare uniforme è un *moto periodico*, vale a dire che esiste un intervallo di tempo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, chiamato *periodo*, tale che

$$\begin{cases} x(t) = x(t+T) \\ y(t) = y(t+T) \end{cases} \qquad \left(T \equiv \frac{2\pi}{\omega}\right) \qquad \text{(moto circolare uniforme)} \tag{7.40}$$

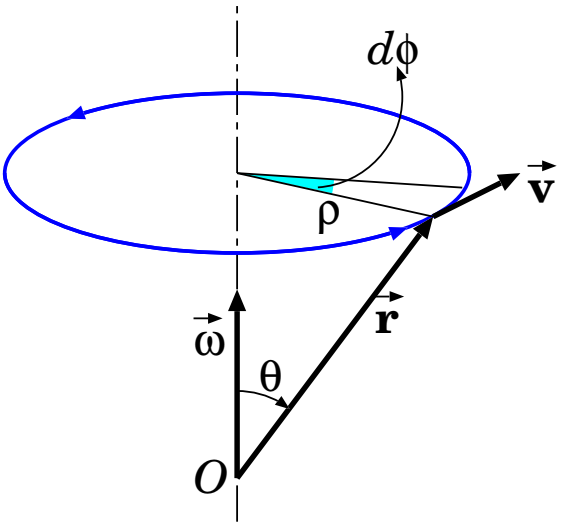


Figura 7.7: *Moto circolare*

Accelerazione

Dall'Eq. (7.34), l'accelerazione tangenziale è sempre nulla, tutta l'accelerazione è solo centripeta:

$$\vec{\boldsymbol{a}} \;=\; -\omega^2\vec{\boldsymbol{\rho}} \;=\; -\frac{v^2}{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad \text{(moto circolare uniforme)} \tag{7.41}$$

Moti periodici, considerazioni generali

Un moto è periodico quando esiste un intervallo di tempo T, detto periodo, tale che

$$\vec{\boldsymbol{r}}(t) = \vec{\boldsymbol{r}}(t+T)\ \forall\ t$$

Il moto circolare uniforme è solo un caso particolarissimo di moto periodico. Nei moti periodici, anche velocità e accelerazione sono periodiche: $\vec{\boldsymbol{v}}(t) = \vec{\boldsymbol{v}}(t+T)$ e $\vec{\boldsymbol{a}}(t) = \vec{\boldsymbol{a}}(t+T)$. Per esempio, per la velocità, basta ricordare che $\vec{\boldsymbol{v}}(t+T) = \lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}(t+T+\Delta t)-\vec{\boldsymbol{r}}(t+T)}{\Delta t}$, e applicare la periodicità per $\vec{\boldsymbol{r}}$. Analogamente per l'accelerazione.

7.6.4 Velocità angolare come vettore

Ora consideriamo il moto di un punto che ruota intorno ad un asse, individuato dal versore $\hat{\boldsymbol{u}}$, come indicato in Fig. 7.7. La traiettoria è

sempre un arco di circonferenza, come nell'esempio precedente, ma stiamo immergendo il moto in uno spazio 3-dimensionale.

Nel tempo infinitesimo dt si compie una rotazione di angolo $d\phi$. Pertanto definiamo la *velocità angolare*

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \tag{7.42}$$

In questo caso, conviene misurare la posizione $\vec{\boldsymbol{r}}$ da un'origine O scelta sull'asse di rotazione. Essendo θ l'angolo fra $\vec{\boldsymbol{r}}$ e $\hat{\boldsymbol{u}}$, il *raggio di curvatura* del moto è

$$\rho = r \sin\theta$$

pertanto lo spostamento ds nel tempo dt è:

$$ds = \rho\, d\phi = \rho\, \omega\, dt$$

e la velocità (scalare) del moto è:

$$v = \frac{ds}{dt} = \omega\, \rho = \omega\, r \sin\theta$$

Sempre dalla Fig. 7.7 si deduce che la velocità vettoriale $\vec{\boldsymbol{v}}$ deve avere direzione ortogonale al piano che contiene $\vec{\boldsymbol{r}}$ e $\hat{\boldsymbol{u}}$. Queste considerazioni suggeriscono di definire il tutto attraverso una relazione vettoriale.

È conveniente definire il *vettore velocità angolare* come

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega \hat{\boldsymbol{u}} \tag{7.43}$$

Ora è facile verificare che la relazione

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}} \tag{7.44}$$

soddisfa tutti i requisiti: basti pensare alle proprietà del prodotto vettoriale descritte in Sezione 6.4: orientamento e modulo sono corretti.

7.6.5 Derivata di vettore che ruota intorno a un asse

Quanto detto nella sezione precedente può essere generalizzato a un qualunque vettore $\vec{\boldsymbol{A}}$, costante in modulo, che ruota intorno ad un asse $\hat{\boldsymbol{u}}$ con velocità angolare $\vec{\boldsymbol{\omega}} \equiv \omega \hat{\boldsymbol{u}}$. La situazione è sempre la stessa raffigurata in Fig. 7.7 — a parte la sostituzione $\vec{\boldsymbol{r}} \rightarrow \vec{\boldsymbol{A}}$. La derivata del vettore deve quindi valere:

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{A}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{A}} \qquad \text{(vettore rotante)} \tag{7.45}$$

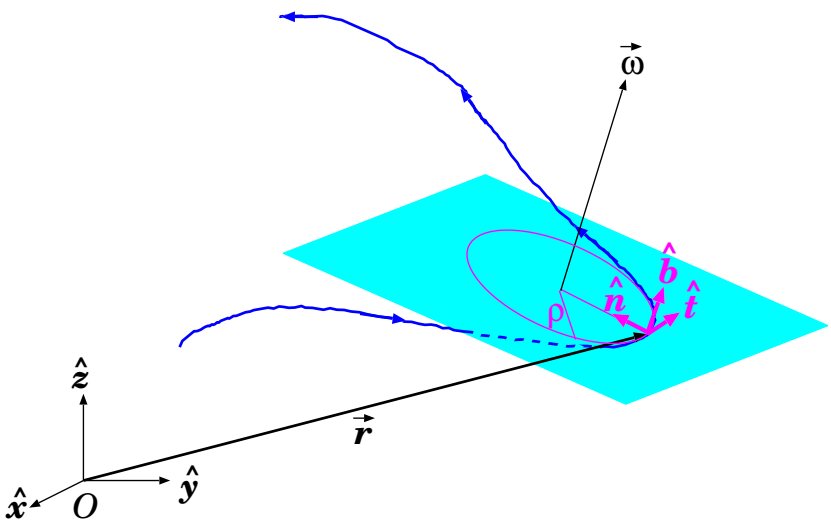


Figura 7.8: *Approssimazione di una traiettoria curva con la sua circonferenza osculatrice, e definizione dei versori tangente, normale, e binormale,* $\hat{\boldsymbol{t}}$, $\hat{\boldsymbol{n}}$, $\hat{\boldsymbol{b}}$.

Un caso particolare, che ci sarà molto utile più avanti, è quello del *versore rotante* — dato un versore $\hat{\boldsymbol{e}}$ qualunque, ovviamente $|\hat{\boldsymbol{e}}| = 1$ è costante per definizione. Quindi la derivata del versore è:

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{e}} \qquad \text{(versore rotante)} \tag{7.46}$$

7.7 Traiettorie curve

Una traiettoria curva, in ogni punto può essere approssimata con un archetto infinitesimo di circonferenza ("circonferenza osculatrice") [4], come in Fig. 7.8. Quindi, localmente, possiamo trattare il moto come se fosse circolare.

Il raggio della circonferenza osculatrice si chiama *raggio di curvatura*, ρ.

Possiamo definire tre versori:

- il *versore tangente* $\hat{\boldsymbol{t}}$, tangente alla traiettoria e orientato nel verso di percorrenza;

[4] Immaginate un punto generico P sulla traiettoria, e altri due punti "satelliti" P', P'' posti prima e dopo di P: questi 3 punti individuano in modo univoco un piano e una circonferenza. Ora immaginiamo che i punti P', P'' si spostino sempre più vicini al punto P: l'arco di circonferenza $P'\overset{\frown}{P}P''$ approssima sempre meglio l'arco di traiettoria da P' a P''. La circonferenza osculatrice si ottiene come passaggio al limite di $P' \to P$ e $P'' \to P$.

- il *versore normale* $\hat{\boldsymbol{n}}$, ortogonale alla traiettoria e giacente sul piano della circonferenza osculatrice, orientato verso il suo centro;
- il *versore binormale*, ortogonale al piano della circonferenza osculatrice, e definito da $\hat{\boldsymbol{b}} = \hat{\boldsymbol{t}} \times \hat{\boldsymbol{n}}$.

In generale, quando un moto avviene lungo una traiettoria curva, la velocità $\vec{\boldsymbol{v}}(t)$ può cambiare sia in direzione che in modulo.

Si può definire il *versore tangente* nei due modi equivalenti:

$$\hat{\boldsymbol{t}} = \frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{v} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{ds} \tag{7.47}$$

Ovviamente $\vec{\boldsymbol{v}} = v\hat{\boldsymbol{t}}$. L'accelerazione si può quindi scrivere come:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{d(v\hat{\boldsymbol{t}})}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\hat{\boldsymbol{t}}}_{\vec{\boldsymbol{a}}_t} + \underbrace{v\frac{d\hat{\boldsymbol{t}}}{dt}}_{\vec{\boldsymbol{a}}_n} \tag{7.48}$$

Evidentemente, $\vec{\boldsymbol{a}}_t$ è parallela a $\vec{\boldsymbol{v}}$. Inoltre, utilizzando la derivata del versore, Eq. (7.46), possiamo scrivere $\frac{d\hat{\boldsymbol{t}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{t}}$, quindi:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{a}}_n &= v\,\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{t}} \\ &= \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}} \end{aligned} \tag{7.49}$$

da cui $\vec{\boldsymbol{a}}_n$ è manifestamente ortogonale a $\vec{\boldsymbol{v}}$.

Il vettore $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ che compare nell'Eq. (7.49) è ortogonale al piano del cerchio osculatore:

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega\,\hat{\boldsymbol{b}}$$

la velocità scalare v è legata a ρ da:

$$v = \omega\,\rho$$

quindi l'Eq. (7.49), nella sua prima versione, si riscrive:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{a}}_n &= v\left(\omega\hat{\boldsymbol{b}}\right) \times \hat{\boldsymbol{t}} = \omega v\hat{\boldsymbol{n}} \\ &= \frac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{n}} \\ &= \omega^2\rho\hat{\boldsymbol{n}} \end{aligned} \tag{7.50}$$

Si può anche dare una definizione vettoriale del raggio di curvatura, come vettore $\vec{\boldsymbol{\rho}}$, orientato dal centro di curvatura verso la posizione del punto [5]:

$$\vec{\boldsymbol{\rho}} = -\rho\hat{\boldsymbol{n}} \tag{7.51}$$

Così l'Eq. (7.50) si può riscrivere come:

$$\vec{\boldsymbol{a}}_n = -\omega^2\vec{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{7.52}$$

7.8 Esercizi

Per calcolare le derivate e gli integrali in questi esercizi, possono essere d'aiuto le tabelle in Sezione 3.3.

Esercizio 7.10. *Un oggetto puntiforme si muove con la seguente legge oraria:*

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t) \\ y(t) &= B\mathrm{e}^{-\gamma t} \\ z(t) &= Ct^3 \end{aligned}$$

Scrivere, per coordinate cartesiane, la velocità e l'accelerazione in funzione del tempo.

Risposta. *Per calcolare la velocità, basta derivare le coordinate cartesiane:*

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t) \\ v_y(t) &= \frac{dy}{dt} = -\gamma B\mathrm{e}^{-\gamma t} \\ v_z(t) &= \frac{dz}{dt} = 3Ct^2 \end{aligned}$$

e per calcolare l'accelerazione si derivano le velocità:

$$\begin{aligned} a_x(t) &= \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t) \\ a_y(t) &= \frac{dv_y}{dt} = \gamma^2 B\mathrm{e}^{-\gamma t} \\ a_z(t) &= \frac{dv_z}{dt} = 6Ct \end{aligned}$$

[5] *ATTENZIONE però:* $\vec{\boldsymbol{\rho}}$ *NON è il raggio vettore* $\vec{\boldsymbol{r}}$: in generale, l'origine O, a cui si riferisce la posizione $\vec{\boldsymbol{r}}$, non coincide con il centro di curvatura. Solo se la traiettoria è esattamente circolare allora si può scegliere O nel suo centro, altrimenti è impossibile.

Esercizio 7.11. *Un oggetto puntiforme si muove con una velocità che, in coordinate cartesiane, vale:*

$$\begin{aligned} v_x(t) &= a_x t && (\ a_x = 3\ \mathrm{m/s^2}\ ) \\ v_y(t) &= u_y \mathrm{e}^{\gamma t} && (\ u_y = 2.5\ \mathrm{m/s}\ \ ;\ \ \gamma_y = 0.1\ \mathrm{s^{-1}}\ ) \\ v_z(t) &= 0 \end{aligned}$$

All'istante $t = 0$ si trova nella posizione $\vec{r}_0 \equiv (1\ \mathrm{m}, 0\ \mathrm{m}, 1\ \mathrm{m})$. Calcolare la sua posizione al tempo $t_1 = 10$ s.

Risposta. *Per ottenere il vettore-spostamento $\Delta\vec{r}$ occorre integrare ciascuna componente della velocità:*

$$\begin{aligned} \Delta x &= \int_0^{t_1} dt\ v_x(t) = \left[\frac{a_x}{2} t^2\right]_0^{t_1} = 150\ \mathrm{m} \\ \Delta y &= \int_0^{t_1} dt\ v_y(t) = \left[\frac{u_y}{\gamma} \mathrm{e}^{\gamma t}\right]_0^{t_1} = (25\ \mathrm{m})\left(\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0\right) = 42.95\ \mathrm{m} \\ \Delta z &= \int_0^{t_1} dt\ v_z(t) = 0 \end{aligned}$$

La posizione finale si ottiene come $\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \Delta\vec{r}$. Per coordinate cartesiane si ottiene

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \Delta x = 151\ \mathrm{m} \\ y_1 &= y_0 + \Delta y = 42.95\ \mathrm{m} \\ z_1 &= z_0 + \Delta z = 1\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

Esercizio 7.12. *Un oggetto che cade liberamente in verticale acquista velocità sempre maggiori. In tempi pre-Galileiani, quando le leggi del moto non erano ancora state formulate, c'era l'ipotesi — sbagliata — che la velocità v fosse direttamente proporzionale allo spazio totale percorso s. Con il linguaggio cinematico che abbiamo imparato, formuleremmo questa ipotesi così:*

$$v(t) = \alpha \cdot s(t)$$

Si provi a dedurre la legge oraria del moto sotto questa ipotesi. Suggerimento: scrivere $v = \dfrac{ds}{dt}$, quindi si scriva la legge del moto come $\dfrac{ds}{s} = \alpha dt$, oppure si sfrutti la proprietà della derivata del logaritmo $\dfrac{d\ln(f(t))}{dt} = \dfrac{f'(t)}{f(t)}$, essendo $f'(t) \equiv \dfrac{df}{dt}$. Se partisse da fermo, l'oggetto cadrebbe davvero?

Risposta. *La legge del moto è $\dfrac{ds}{dt} = \alpha s$, che si può scrivere come $\dfrac{ds}{s} = \alpha dt$. Mettendo un segno di integrale, con estremi opportuni, da entrambi i lati,*

otteniamo $\int_{s_0}^{s} \frac{ds'}{s'} = \alpha \int_0^t dt'$, *ovvero* $\ln\left(\frac{s}{s_0}\right) = t$. *Risolvendo per* s *si trova:*

$$s = s_0 \mathrm{e}^{\alpha t}$$

Approccio più formale (ma meno diretto): scriviamo la legge del moto così: $\frac{ds/dt}{s(t)} = \alpha$. *Assomiglia molto alla forma* $\frac{f'(t)}{f(t)}$, *ma attenzione: non possiamo porre* $f \equiv s$ *perché il logaritmo accetta come argomento solo numeri privi di dimensioni — non possiamo fare* $\ln(s)$. *Quindi poniamo* $f(t) = \frac{s(t)}{\bar{s}}$, *con* $\bar{s}$ *una distanza arbitraria. Allora*

$$\frac{d\ln(f(t))}{dt} = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{ds/dt}{s(t)} = \alpha$$

La derivata di $\ln(f(t))$ *è una costante,* α, *quindi* $\ln(f(t)) = \alpha t + \beta$ *(con* β *costante arbitraria), ovvero* $\frac{s(t)}{\bar{s}} = f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t + \beta}$, *infine* $s(t) = \bar{s}\mathrm{e}^{\beta}\mathrm{e}^{\alpha t}$. *Risultato identico a quello trovato con l'approccio più diretto — basta identificare* s_0 *con* $\bar{s}\mathrm{e}^{\beta}$.

Per rispondere all'ultima domanda: la velocità è $v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \alpha s_0 \mathrm{e}^{\alpha t}$; *se per* $t = 0$ *l'oggetto è fermo, l'unica possibilità è che sia* $\alpha = 0$, *ma così sarebbe anche* $s(t) = 0$ *sempre, ovvero l'oggetto non entrerebbe mai in movimento, cioè non cadrebbe mai. Pur senza conoscere ancora il calcolo differenziale, Galileo aveva intuito che una legge del moto* $v \propto s$ *non avrebbe mai funzionato.*

Esercizio 7.13. *Galileo, dopo ripetuti esperimenti, osservò una regolarità nella "caduta dei gravi": un oggetto, lanciato con velocità orizzontale* v_0 *e libero di cadere, si muove con una traiettoria curva, contenuta in un piano verticale. Adottando su questo piano due coordinate cartesiane, con l'asse* $\hat{\boldsymbol{x}}$ *lungo* v_0 *e l'asse* $\hat{\boldsymbol{z}}$ *verso l'alto, la legge oraria osservata è sempre esprimibile come:*

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \\ z(t) &= -\frac{g}{2}t^2 \end{aligned}$$

Calcolare la velocità e l'accelerazione vettoriali, per componenti cartesiane, in un generico istante t. *Calcolare inoltre la velocità scalare* v, *l'accelerazione tangenziale* a_t, *l'accelerazione centripeta* a_n, *il raggio di curvatura* ρ, *e la velocità angolare* ω.

Risposta. *La velocità, per componenti cartesiane, si calcola derivando* x, z *rispetto a* t:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_0 \\ v_z(t) &= -gt \end{aligned}$$

Derivando ancora rispetto a t *si trova l'accelerazione, per componenti cartesiane:*

$$\begin{aligned} a_x(t) &= 0 \\ a_z(t) &= -g \end{aligned}$$

La velocità scalare è

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}$$

L'accelerazione tangenziale si può calcolare proiettando $\vec{\boldsymbol{a}}$ su $\vec{\boldsymbol{v}}$:

$$\begin{aligned} a_t &= \vec{\boldsymbol{a}} \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{v} = \frac{a_x v_x + a_z v_z}{v} \\ &= \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + (gt)^2}} \end{aligned}$$

L'accelerazione centripeta si calcola di conseguenza:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{g^2 - \frac{(g^2 t)^2}{v_0^2 + (gt)^2}} = g\sqrt{1 - \frac{(gt)^2}{v_0^2 + (gt)^2}} \\ &= \frac{v_0 g}{\sqrt{v_0^2 + (gt)^2}} \end{aligned}$$

Il raggio di curvatura si calcola da $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\left(v_0^2 + (gt)^2\right)^{3/2}}{v_0 g}$$

Infine, la velocità angolare si calcola come

$$\omega = \frac{v}{\rho} = \frac{v_0 g}{v_0^2 + (gt)^2}$$

Osservazione. *All'inizio ($t = 0$) l'accelerazione è solo centripeta: $a_n = g$, $a_t = 0$. Man mano che passa il tempo, a_t cresce, tendendo a g; nel frattempo a_n decresce, tendendo a 0; anche la velocità aumenta in modulo con una legge complicata. Invece, in coordinate cartesiane, le componenti dell'accelerazione sono tutte costanti, e anche l'evoluzione delle velocità è più semplice. La descrizione del moto per componenti cartesiane è decisamente più semplice che scomponendo lungo le direzioni tangente e ortogonale alla traiettoria. Anche questa idea è stata un'altra delle innovazioni che dobbiamo a Galileo.*

7.9 Riassunto

Riassumiamo i concetti introdotti finora. Un oggetto che si sposta nello spazio, all'istante t ha una posizione $\vec{\boldsymbol{r}}(t) \equiv (x(t), y(t), z(t))$. La sua velocità,

in forma vettoriale e per componenti cartesiane, è definita da:

$$\vec{\boldsymbol{v}}(t) = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}(t+dt) - \vec{\boldsymbol{r}}(t)}{dt} \qquad ; \qquad \begin{cases} v_x(t) = \dfrac{x(t+dt) - x(t)}{dt} \\ v_y(t) = \dfrac{y(t+dt) - y(t)}{dt} \\ v_z(t) = \dfrac{z(t+dt) - z(t)}{dt} \end{cases}$$

mentre l'accelerazione è espressa come:

$$\vec{\boldsymbol{a}}(t) = \frac{\vec{\boldsymbol{v}}(t+dt) - \vec{\boldsymbol{v}}(t)}{dt} \qquad ; \qquad \begin{cases} a_x(t) = \dfrac{v_x(t+dt) - v_x(t)}{dt} \\ a_y(t) = \dfrac{v_y(t+dt) - v_y(t)}{dt} \\ a_z(t) = \dfrac{v_z(t+dt) - v_z(t)}{dt} \end{cases}$$

Relazioni fra posizione e velocità:		
velocità	$\vec{\boldsymbol{v}} = \dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}$	$v_x = \dfrac{dx}{dt}$ $v_y = \dfrac{dy}{dt}$ $v_z = \dfrac{dz}{dt}$
spostamento	$\Delta\vec{\boldsymbol{r}} = \displaystyle\int_{t_0}^{t} dt'\, \vec{\boldsymbol{v}}(t')$	$\Delta x = \displaystyle\int_{t_0}^{t} dt'\, v_x(t')$ $\Delta y = \displaystyle\int_{t_0}^{t} dt'\, v_y(t')$ $\Delta z = \displaystyle\int_{t_0}^{t} dt'\, v_z(t')$

Relazioni fra velocità e accelerazione:		
accelerazione	$\vec{\boldsymbol{a}} = \dfrac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt}$	$a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$ $a_y = \dfrac{dv_y}{dt}$ $a_z = \dfrac{dv_z}{dt}$
variazione di velocità	$\Delta\vec{\boldsymbol{v}} = \int_{t_0}^{t} dt'\, \vec{\boldsymbol{a}}(t')$	$\Delta v_x = \int_{t_0}^{t} dt'\, a_x(t')$ $\Delta v_y = \int_{t_0}^{t} dt'\, a_y(t')$ $\Delta v_z = \int_{t_0}^{t} dt'\, a_z(t')$

Formule per il moto rettilineo uniforme:

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{a}} &= 0 \\
\vec{\boldsymbol{v}}(t) &= \vec{\boldsymbol{v}}_0(\text{costante}) \\
\vec{\boldsymbol{r}}(t) &= \vec{\boldsymbol{r}}_0 + \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{0}} \cdot (t - t_0)
\end{aligned}$$

Formule per il moto uniformemente accelerato:

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{a}} &= \text{costante} \\
\vec{\boldsymbol{v}}(t) &= \vec{\boldsymbol{v}}_0 + \vec{\boldsymbol{a}} \cdot (t - t_0) \\
\vec{\boldsymbol{r}}(t) &= \vec{\boldsymbol{r}}_0 + \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{0}} \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{a}} \cdot (t - t_0)^2
\end{aligned}$$

Formule per il moto su traiettoria curvilinea:

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{\omega}} &= \frac{d\alpha}{dt}\,\hat{\boldsymbol{b}} \\
\frac{d\hat{\boldsymbol{t}}}{dt} &= \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{t}} \\
v &= \omega\,\rho \\
\vec{\boldsymbol{a}} &= \vec{\boldsymbol{a}}_t + \vec{\boldsymbol{a}}_n \\
\vec{\boldsymbol{a}}_t &= (\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \hat{\boldsymbol{v}})\;\hat{\boldsymbol{v}} \;=\; \frac{dv}{dt}\,\hat{\boldsymbol{t}} \\
\vec{\boldsymbol{a}}_n &= \vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{a}}_t \;=\; -\frac{v^2}{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \;=\; -\omega^2\,\vec{\boldsymbol{\rho}} \;=\; \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}
\end{aligned}
$$

Capitolo 8

Dinamica del punto materiale

La cinematica descrive le caratteristiche del moto di un oggetto: legge oraria, velocità accelerazione. La dinamica indaga le *cause* del moto.

Più precisamente, *il moto di un oggetto è influenzato dalla sua "interazione" con l'ambiente circostante.* Tutto ciò che si trova nello spazio intorno ad un oggetto può influire sul suo moto, o per contatto diretto, oppure anche a distanza.

Abbiamo esempi ovvi di *interazione per contatto*, quando due oggetti si urtano, o sfregano l'uno contro l'altro, o quando spingiamo o tiriamo un oggetto. Tuttavia, esistono anche le *interazioni a distanza* — per esempio quando una calamita attrae un oggetto di ferro, o quando un qualunque oggetto cade al suolo: in questi casi il moto dell'oggetto subisce influenze senza che nessun altro oggetto lo tocchi.

La dinamica mette in relazione il moto di un oggetto e le sue interazioni con l'ambiente che lo circonda. Queste interazioni sono descritte con quantità vettoriali, chiamate *forze*. In questo capitolo vedremo le relazioni generali fra forze e moto. Nei capitoli successivi analizzeremo le diverse nature e caratteristiche di tali forze.

8.1 Le leggi della dinamica

Le leggi della dinamica sono il frutto di accurati studi sperimentali sul moto degli oggetti e di un enorme sforzo intellettuale che ha fornito un metodo matematico per darne una descrizione unificata. Dobbiamo la nostra attuale conoscenza della dinamica a numerose menti del passato, fra cui è d'obbligo ricordare Galileo Galilei e Isaac Newton.

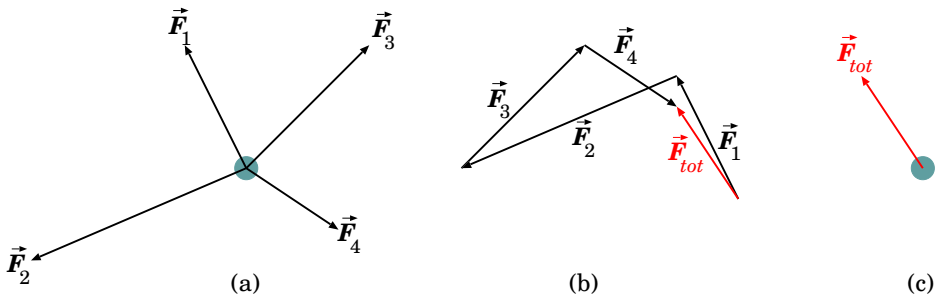


Figura 8.1: *Risultante di un sistema di forze: (a) forze $\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_N$ agenti su un punto materiale; (b) risultante come loro somma vettoriale, $\vec{F}_{tot} = \sum_i \vec{F}_i$; (c) forza risultante $\vec{F}_{tot}$ applicata al punto materiale in luogo del sistema di forze fisiche.*

Introdurre le leggi della dinamica con un approccio "storico" — cioè ripercorrendo i ragionamenti che hanno portato alla loro formulazione — sarebbe di estremo interesse, ma richiederebbe uno sforzo notevole, che esula da questo contesto. Scegliamo invece una esposizione assiomatica, per ragioni di maggiore chiarezza. Con questo non vogliamo essere dogmatici: al contrario, l'insieme di questi assiomi deve la sua validità al fatto che *funzionano*! Nel senso che consentono di spiegare i moti osservati, e anche di predirli.

Enunciamo ora le *leggi della dinamica* [1]:

[1] *Legge di inerzia, o di Galileo* (1^a legge della dinamica)
Un oggetto puntiforme che non sia soggetto ad azioni esterne rimane in quiete (fermo) oppure si muove di moto rettilineo uniforme.

[2.a] *Forze e loro composizione*
Se un oggetto subisce una o più azioni esterne, queste sono descritte da quantità vettoriali che si chiamano *forze*. Nel caso agiscano più azioni esterne, ciascuna di esse è descrivibile da una forza $\vec{F}_i$; il loro effetto è quello di produrre una *forza risultante*, pari alla somma vettoriale delle singole forze:

$$\vec{F}_{tot} = \sum_i \vec{F}_i \tag{8.1}$$

[1] Molti testi enunciano le "tre leggi della dinamica", posponendo la legge di composizione delle forze; trovo personalmente questa scelta piuttosto restrittiva, perché raramente succede nella realtà che esista una sola forza agente: tanto vale quindi esporre tutti gli "assiomi" della dinamica contemporaneamente.

(vedi Fig. 8.1).

[2.b] *Legge di Newton* (2^a legge della dinamica)
Ogni oggetto è dotato di una proprietà intrinseca che si chiama *massa*. Un oggetto di massa m, sottoposto ad una sola forza $\vec{\boldsymbol{F}}$, oppure ad un sistema di forze la cui risultante sia $\vec{\boldsymbol{F}}_{tot}$, subisce un'accelerazione $\vec{\boldsymbol{a}}$, data da

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{tot} = m\vec{\boldsymbol{a}} \tag{8.2}$$

Riprenderemo bene questo concetto nella Sezione 8.4: per il momento possiamo dire che la *massa* descrive l'*inerzia* di un oggetto, ovvero la sua "resistenza" ad essere accelerato.

[3] *Legge di azione-reazione* (3^a legge della dinamica)
Le forze agenti su un oggetto sono sempre dovute ad interazioni con gli oggetti circostanti. A prescindere dalla natura di tali interazioni, vale una legge di reciprocità nelle interazioni fra oggetti: se l'oggetto (1) produce sull'oggetto (2) una forza $\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$, allora l'oggetto (2) necessariamente deve produrre una forza uguale e contraria $\vec{\boldsymbol{F}}_{12}$ sull'oggetto (1):

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{21} \tag{8.3}$$

Inoltre, le forze $\vec{\boldsymbol{F}}_{12}$, $\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$ sono dirette lungo la linea retta che congiunge gli oggetti (1) e (2). Questa legge è illustrata in Fig. 8.2. Dette $\vec{\boldsymbol{r}}_1$, $\vec{\boldsymbol{r}}_2$ le posizioni degli oggetti (1) e (2), la direzione che li congiunge è lungo $(\vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2)$, pertanto possiamo scrivere questa proprietà come:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{12}\ ,\ \vec{\boldsymbol{F}}_{21}\ \text{ parallele a }\ (\vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2) \tag{8.4}$$

8.1.1 Unità di misura

Nel Sistema Internazionale delle unità di misura (SI) la massa si misura in *chilogrammi*, kg. Altre unità utili sono il *grammo*, g, e i suoi multipli e sottomultipli:

tonnellata	ton	= 1000 kg
quintale	q	= 100 kg
chilogrammo	kg	
grammo	g	$= 10^{-3}$ kg
milligrammo	mg	10^{-3} g $= 10^{-6}$ kg
microgrammo	μg	10^{-6} g $= 10^{-9}$ kg

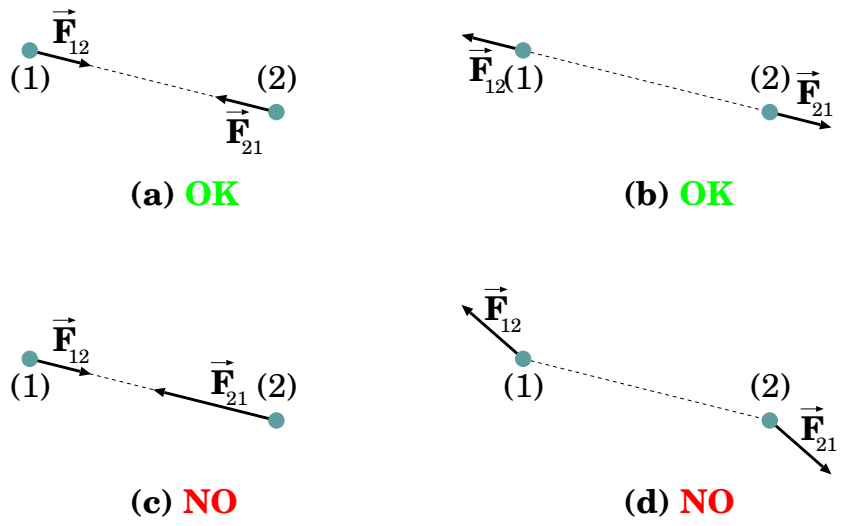


Figura 8.2: *Esempi di forze che soddisfano (a,b) o non soddisfano (c,d) il principio di azione-reazione. L'oggetto (1) esercita una forza $\vec{F}_{21}$ sull'oggetto (2), il quale a sua volta produce una forza $\vec{F}_{12}$ sull'oggetto (1). Nei casi (a,b) le due forze sono uguali ed opposte: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$; inoltre giacciono sulla retta congiungente gli oggetti (1), (2). Quindi il principio di azione-reazione è soddisfatto. In particolare, nel caso (a) si tratta di forze attrattive, mentre nel caso (b) di forze repulsive. Nei casi (c,d) il principio di azione-reazione non è soddisfatto: in (c), le forze giacciono sulla congiungente, ma non sono uguali ed opposte ($\vec{F}_{12} \neq -\vec{F}_{21}$); in (d) le forze sono uguali ed opposte ma non giacciono sulla congiungente.*

Le forze nel SI si misurano in *Newton*, N. Il Newton è un'unità di misura *derivata*, nel senso che si può esprimere attraverso le unità fondamentali di lunghezza, tempo e massa: metri (m), secondi (s) e chilogrammi (kg). *Si definisce "Newton" la forza necessaria per imprimere una accelerazione di* 1 m/s^2 *ad una massa di un chilogrammo.*

$$\mathrm{N} = \mathrm{kg\,m/s^2} \tag{8.5}$$

Un'altra unità di forza spesso usata è la *dyne*, definita come la forza necessaria per imprimere una accelerazione di 1 cm/s^2 ad una massa di un grammo

$$\mathrm{dyne} = \mathrm{g\,cm/s^2} \tag{8.6}$$

Essendo 1 kg = 1000 g e 1 m = 100 cm, si ricava subito la conversione fra Newton e dyne:

$$1\ \mathrm{N} \ = \ 10^5\ \mathrm{dyne} \tag{8.7}$$

8.2 Natura delle forze

In natura incontriamo diverse forze, le cui origini e caratteristiche sono svariate.

Vediamo alcuni esempi di forze che incontriamo più spesso:

- oggetti dotati di massa si attraggono a causa della *forza gravitazionale*;
- qualunque oggetto — in prossimità della superficie terrestre — è attratto verso il basso dalla *forza-peso* (si tratta di un caso particolare di forza gravitazionale, in cui la massa della Terra attrae la massa dell'oggetto);
- oggetti dotati di carica elettrica si attraggono o respingono a causa della *forza elettrica*; se essi sono in movimento interagiscono anche attraverso una *forza magnetica*;
- oggetti deformati da azioni esterne, a seconda del materiale di cui sono costituiti, tendono a riassumere la forma originale, mediante *forze elastiche*;
- oggetti vincolati a strutture rigide (fili inestensibili, piani o rotaie indeformabili, ...) sono da queste influenzati nel loro moto, attraverso le *reazioni vincolari*;
- oggetti a contatto con l'ambiente circostante possono subire da questo azioni che tendono ad opporsi al loro moto: sono le *forze di attrito*, e si manifestano in diversi modi;

Alcune forze si manifestano solo quando gli oggetti entrano in contatto, altre agiscono anche fra oggetti distanti. Di seguito alcuni esempi:

- *forze di contatto*: forze elastiche, reazioni vincolari, forze di attrito, ...
- *forze a distanza*: forze gravitazionali (e quindi anche forza-peso), elettriche, magnetiche, ...

Ricordiamo che tutte le forze di contatto elencate sono manifestazioni macroscopiche delle forze elettromagnetiche agenti fra gli atomi che costituiscono gli oggetti: in natura le uniche forze *fondamentali* sono quelle gravitazionali e elettromagnetiche [2]: entrambe agenti a distanza.

[2] Le *interazioni* debole e forte sono altrettanto fondamentali, ma non sono descrivibili come *forze*: a causa del loro raggio di azione molto limitato, giocano un ruolo solo a livello subatomico, e quindi devono essere trattate con la meccanica quantistica.

Gli assiomi [2.a] e [2.b] *non dànno indicazioni sulla natura delle forze agenti e su come calcolarle*: servono a descrivere il moto di un oggetto, una volta che le forze agenti siano note. In ogni caso, l'assioma [2.a] ci dice che la forza totale su un oggetto è pari alla somma vettoriale delle varie forze, *anche se queste sono di diverse nature!*

L'assioma [3] fornisce un principio di reciprocità anche sulla *natura* delle forze: se l'oggetto (1) esercita una forza di natura X (gravitazionale, o elettrica, o magnetica, o elastica, o vincolare, ...) sull'oggetto (2), allora anche (2) esercita una forza della stessa natura X su (1). Un esempio: se un sasso cade a terra a causa della forza-peso, anche la Terra è attratta dal sasso con una forza della stessa natura (gravitazionale) — anche se la cosa può apparire a prima vista strana [3].

8.3 Commenti sulla legge di inerzia

La legge di inerzia — assioma [1] — ci insegna che il moto rettilineo uniforme è il moto "naturale" di un oggetto.

Matematicamente, è semplicemente un caso particolare di $\vec{\boldsymbol{F}} = m\vec{\boldsymbol{a}}$, per $\vec{\boldsymbol{F}} = 0$. Tuttavia ci dice qualcosa di più, ovvero che, in assenza di influenze esterne, gli stati di quiete e di moto rettilineo uniforme sono altrettanto naturali per un oggetto. Non è necessario cercare una causa esterna per giustificare che un oggetto, dotato di moto, continui a mantenere la sua velocità inalterata.

Viceversa, se in un moto riscontriamo delle accelerazioni, cioè delle variazioni di velocità, allora devono essere all'opera degli agenti esterni che le causano.

Rimarchiamo che la legge di inerzia è *più generale* di $\vec{\boldsymbol{F}} = m\vec{\boldsymbol{a}}$. Vedremo (Capitolo **??**) che in *relatività* la legge di inerzia è ancora valida, mentre la 2^a legge di Newton va modificata.

8.3.1 Come verificare la legge di inerzia?

Nel mondo reale è praticamente impossibile realizzare le condizioni di un moto non soggetto ad azioni esterne: l'ambiente in cui viviamo è tutt'altro che vuoto, ed ogni oggetto tende ad interagire in qualche modo con l'ambiente

[3] La forza-peso che attrae il sasso verso terra è pari, in intensità, alla forza che attrae la Terra verso il sasso, ma l'effetto di quest'ultima non è percepibile, poiché la massa della Terra è troppo grande...

che lo circonda: un oggetto, lanciato in aria, risente dell'azione del proprio peso — tende a cadere; oppure, un oggetto, lanciato sulla superficie di un tavolo orizzontale, viene frenato dallo sfregamento — diciamo che risente dell'*attrito* con la superficie su cui appoggia.

L'ambiente in cui viviamo non consente di verificare la legge di inerzia direttamente, pertanto si arriva ad essa mediante un processo di astrazione. Per esempio, si possono far slittare oggetti via via più lisci su superfici orizzontali via via più levigate: ci accorgiamo che il moto è sempre frenato, ma si approssima sempre più ad un moto uniforme; nel frattempo il rumore dello strisciamento diventa sempre più debole, quindi deduciamo che l'interazione con la superficie diventa sempre più debole. Con un'estrapolazione concettuale, affermiamo che se l'interazione con la superficie scomparisse del tutto il moto sarebbe esattamente uniforme.

In effetti, si possono realizzare condizioni sperimentali molto simili a quelle di oggetti esenti da forze esterne. L'esempio tipico è fare uso di un piano orizzontale molto levigato, su cui vengono fatti scivolare oggetti appoggiati su dischi di ghiaccio secco. Il ghiaccio secco si ottiene raffreddando l'anidride carbonica (CO_2) a temperature inferiori a $-78°$C. In condizioni di pressione e temperatura ambiente, esso passa dallo stato solido direttamente allo stato gassoso, cioè "sublima". Un disco di ghiaccio secco, a contatto con un piano a temperatura ambiente, sublima, producendo un sottile strato di CO_2 gassoso su cui scivola praticamente senza venire frenato. Pertanto, un oggetto di questo tipo si muove sul piano in condizioni praticamente libere. Osservandone il moto, si ottiene un'ottima approssimazione di moto rettilineo uniforme.

Si può realizzare una situazione simile anche in maniera molto più "casalinga". Si prende una pentola di acciaio, la si mette sul fornello per diversi minuti (vuota!), quindi si fa cadere all'interno qualche piccola gocciolina d'acqua. La pentola è diventata estremamente calda, ha una temperatura più alta di 100°C, pertanto la gocciolina, appena entra a contatto con il fondo della pentola, evapora continuamente sulla superficie inferiore di contatto, quindi è costantemente separata dal fondo da un piccolo strato di vapore acqueo. Il risultato è che la gocciolina, se inizialmente dotata di moto, lo mantiene indefinitamente (rimbalzando contro le pareti quando le incontra), finché non è evaporata del tutto [4].

[4] Se l'esperimento non funziona, è perché la pentola non è sufficientemente calda, e la gocciolina in parte la bagna dove appoggia, creando così un contatto diretto con l'acciaio... Occorre aspettare che la pentola si scaldi di più. Difficile dire a priori quanto tempo occorre lasciarla sul fuoco: dipende dalle dimensioni della pentola e dalla potenza del fornello.

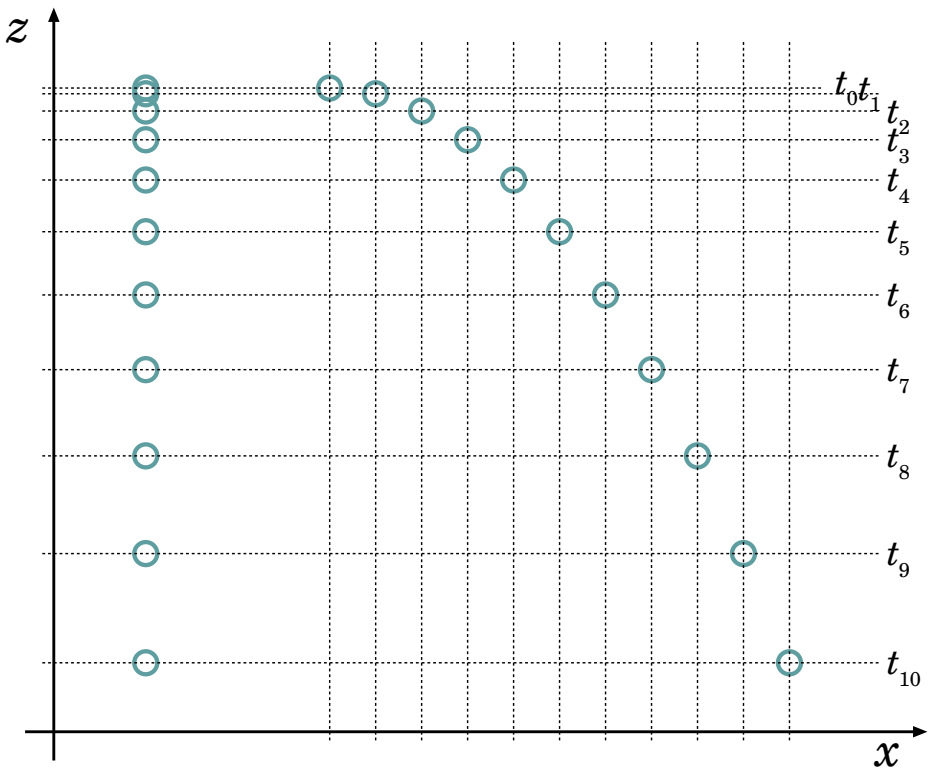


Figura 8.3: *Fotogrammi di un oggetto che cade a terra, scattati a intervalli di tempo regolari. A sinistra: l'oggetto cade da fermo. A destra: l'oggetto parte con una velocità orizzontale.*

8.3.2 Un ragionamento più articolato

Un'altra considerazione, più elaborata, ci può guidare allo stesso risultato. Pensiamo dapprima ad un oggetto lasciato cadere da fermo e misuriamone il moto. Orientiamo gli assi cartesiani in modo che $\hat{\boldsymbol{z}}$ sia orientato verso l'alto. Si osserva che il moto è rettilineo e diretto verso il basso. Facendo diversi fotogrammi a intervalli di tempo regolari, come in Fig. 8.3 a sinistra, si può ricavare la sua legge oraria, che per componenti cartesiane, è:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0 \\
y(t) &= y_0 \\
z(t) &= z_0 - \frac{1}{2}gt^2
\end{aligned}
$$

Calcolando velocità e accelerazione lungo la direzione $\hat{\boldsymbol{z}}$, con l'ausilio delle formule di derivazione descritte in Sezione 3.3 otteniamo:

$$v_z = \frac{dz}{dt} = -gt \qquad ; \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} = -g$$

Il moto lungo $\hat{\boldsymbol{z}}$ non è uniforme: ha accelerazione $-g\hat{\boldsymbol{z}}$. D'altra parte sappiamo empiricamente che qualunque oggetto lasciato libero cade sotto il suo peso. C'è un'azione esterna, indipendente dal singolo oggetto, che agisce lungo la verticale — nella fattispecie, verso il basso. Niente di nuovo. Viceversa, le prime due equazioni ci dicono che le coordinate x, y non cambiano: non si osserva nessuno spostamento lungo le direzioni $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}$, pertanto non abbiamo ragione di sospettare di azioni esterne all'oggetto che agiscano in queste direzioni.

Misuriamo ora il moto di un oggetto lanciato in aria in direzione orizzontale con velocità iniziale v lungo la direzione $\hat{\boldsymbol{x}}$: $\vec{\boldsymbol{v}}_0 = v\hat{\boldsymbol{x}}$. In questo caso il moto osservato ha una traiettoria parabolica, come in Fig. 8.3 a destra. Anche qui, con fotogrammi presi a intervalli di tempo regolari, si ottiene la legge oraria del moto, che per componenti è:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + vt \\ y(t) &= y_0 \\ z(t) &= z_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Calcolando per componenti la velocità e l'accelerazione — sempre con le formule della Sezione 3.3 — e omettendo la direzione $\hat{\boldsymbol{y}}$ per semplicità, otteniamo:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v \qquad ; \qquad a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = -gt \qquad ; \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} = -g$$

Anche ora il moto lungo $\hat{\boldsymbol{z}}$ non è uniforme, ma questo non ci deve turbare: sappiamo già che c'è un'azione esterna lungo la verticale. Il fatto che l'accelerazione sia sempre la stessa $(-g)$ è notevole: ci suggerisce che l'azione esterna non dipende dalla diversa condizione iniziale. Invece, il moto lungo $\hat{\boldsymbol{x}}$ *mantiene invariata la sua velocità iniziale*; nello stesso tempo, come abbiamo discusso prima, non abbiamo alcuna evidenza di azioni esterne che agiscano lungo tale direzione.

Proviamo a riassumere per punti i passaggi logici. Analizzando il moto di caduta di oggetti, sotto diverse condizioni iniziali (da fermi o con una

velocità iniziale orizzontale), ma nello stesso ambiente, abbiamo osservato le seguenti cose:

- esiste un'azione esterna diretta lungo la verticale — più precisamente verso il basso — che produce un'accelerazione costante g;
- tale azione influenza la componente del moto lungo la direzione $\hat{\boldsymbol{z}}$, in modo indipendente dalla condizione iniziale di quiete o di moto orizzontale;
- la precedente osservazione ci suggerisce che i moti lungo direzioni ortogonali (verticale e orizzontale in questo caso) possano essere trattati indipendentemente;
- nel caso di caduta da fermo, non si innesca nessuna componente orizzontale di moto; questo ci suggerisce che non esistano azioni esterne in direzioni orizzontali;
- se il moto aveva una velocità iniziale in direzione orizzontale, essa viene mantenuta invariata lungo la caduta;
- quindi, nelle direzioni orizzontali, non abbiamo azioni esterne e le velocità non subiscono variazioni, ovvero non ci sono accelerazioni orizzontali.

8.4 Commenti sulla legge di Newton

La legge di Newton

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{tot} = m\vec{\boldsymbol{a}}$$

introduce due concetti strettamente legati fra loro: quello di *forza* e quello di *massa*. Non va presa come una definizione di forza, o di massa — è una *relazione* fra forze e massa.

- Una *forza* è una qualunque causa che contribuisce a produrre una accelerazione su un oggetto, vale a dire che ne modifichi la velocità (oppure che lo metta in moto se era fermo).
- La *massa* quantifica la "resistenza" di un oggetto a modificare la propria velocità.

La *massa* è legata ai concetti di "inerzia" e di "quantità di materia". Facciamo un esempio. Supponiamo di avere un carrello della spesa vuoto:

possiamo metterlo in moto con una leggera spinta, e anche fargli cambiare direzione senza grande sforzo. In entrambi i casi stiamo alterando il suo stato di moto: stiamo impartendo ad esso una accelerazione. Quando il carrello è pieno diventa più faticoso metterlo in moto, e anche fargli cambiare direzione! Ovviamente il carrello ha più inerzia, e ovviamente contiene più materia di prima (c'è in più tutta la spesa fatta). In fisica, diciamo che il carrello pieno ha una massa maggiore di quando era vuoto. Diciamo anche che per imprimere la stessa accelerazione al carrello pieno occorre più forza che per il carrello vuoto.

Esercizio 8.1. *Un carrello della spesa, vuoto, ha una massa di 15 kg. Spingendolo con una forza costante per un tempo di 1 s, da fermo arriva a muoversi con una velocità di 2 m/s. Quanto vale la forza applicata? Alla fine della spesa, nel carrello sono stati caricati 30 kg di prodotti. Applicando la stessa forza per 1 s, che velocità raggiunge? Per quanto tempo è necessario spingerlo, con la stessa forza, affinché raggiunga la velocità di 2 m/s?*

Risposta. *Il carrello vuoto ha massa* $m_0 = 15$ kg*: applicando una forza* F *subisce un'accelerazione costante* $a_0 = \dfrac{F}{m_0}$*, pertanto dopo un tempo* $\Delta t_0 = 1$ s *raggiunge una velocità* $v_0 = a_0 \Delta t_0$*. La forza impressa deve essere* $F = m_0 a = m_0 \dfrac{v_0}{\Delta t_0} = 15 \text{ kg} \cdot \dfrac{2 \text{ m/s}}{1 \text{ s}} = 30 \text{ N}$.

A fine spesa, la massa del carrello è diventata $m_1 = 45$ kg*. Applicandovi la stessa forza* F*, si ottiene un'accelerazione* $a_1 = \dfrac{F}{m_1} = \dfrac{30 \text{ N}}{45 \text{ kg}} = 0.667 \text{ m/s}^2$*. Spingendolo per* $\Delta t_0 = 1$ s *raggiunge una velocità* $a_1 \Delta t_0 = 0.667$ m/s*. Per fargli raggiungere la velocità di 2 m/s occorre spingerlo per un tempo* $\dfrac{2 \text{ m/s}}{0.667 \text{ m/s}^2} = 3$ s.

Esercizio 8.2. *Un'automobile di massa* $m_0 = 1.2$ ton*, con a bordo il conducente di massa* $m_1 = 80$ kg*, deve frenare improvvisamente: il suo impianto frenante produce la massima decelerazione possibile, pari a* $a_0 = 5 \text{ m/s}^2$*. Se la stessa automobile, con lo stesso conducente, dovesse anche trasportare altre 4 persone della stessa massa e un carico di 400 kg, quale sarebbe la massima decelerazione che può produrre? Se inizialmente l'auto viaggiava alla velocità di 130 km/h, calcolare lo spazio necessario ad arrestarsi, in entrambi i casi.*

Risposta. *La massa dell'automobile in unità S.I. è* $m_0 = 1200$ kg*. La forza massima impressa dai freni deve essere* $F_0 = (m_0 + m_1)a_0 = (1280 \text{ kg})(5 \text{ m/s}^2) = 6400$ N*. L'automobile con 5 persone e il carico ha una massa totale* $m' = (1200 + 5 \cdot 80 + 400) \text{ kg} = 2000$ kg*. L'impianto frenante è sempre lo stesso, dunque* F_0 *non è cambiata. La decelerazione sarà dunque* $a' = \dfrac{F_0}{m'} = \dfrac{6400 \text{ N}}{2000 \text{ kg}} = 3.2 \text{ m/s}^2$.

Per rispondere all'ultima domanda, calcoliamo anzitutto il tempo di frenata: è il tempo t *necessario per passare dalla velocità iniziale,* $v_0 = 130$ km/h $= 36.11$ m/s*, a velocità nulla. La legge oraria per la velocità è* $v = v_0 - at$*, da cui*

$t = \frac{v_0}{a}$. In tale tempo, lo spazio percorso è $\Delta x = v_0 t - \frac{a}{2}t^2 = \frac{v_0^2}{2a}$. Quando l'auto ha su solo il guidatore $a = 5$ m/s^2, dunque $\Delta x = 130$ m. Quando l'auto ha 4 passeggeri e il carico, $a = 3.2$ m/s^2, dunque $\Delta x = 204$ m.

8.4.1 Commenti su forza e accelerazione

La legge

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{tot} = m\vec{\boldsymbol{a}}$$

fornisce una *relazione fra forze, massa, e accelerazione*:

- se conosciamo la massa m di un oggetto e la forza $\vec{\boldsymbol{F}}$, o il sistema di forze $\vec{\boldsymbol{F}} = \sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i$, agente su di esso, possiamo *predire* l'accelerazione $\vec{\boldsymbol{a}}$ cui è soggetto:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}}{dt^2} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{m}$$

- se conosciamo il sistema di forze $\vec{\boldsymbol{F}}_i$ che agiscono su un oggetto e ne misuriamo l'accelerazione $\vec{\boldsymbol{a}}$, possiamo dedurre la massa m;

- se conosciamo la massa m dell'oggetto e ne misuriamo l'accelerazione $\vec{\boldsymbol{a}}$, possiamo risalire alla risultante delle forze $\vec{\boldsymbol{F}} = \sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i$ che agiscono su di esso.

8.4.2 Integrazione del moto

Il problema fondamentale della dinamica è *ricavare la legge oraria del moto* $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t)$ a partire dalla conoscenza delle forze agenti.

Se in ogni istante t' conosciamo la forza totale $\vec{\boldsymbol{F}}(t')$, possiamo calcolare l'accelerazione $\vec{\boldsymbol{a}}(t') = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}(t')}{m}$, e quindi ricavare la legge oraria della velocità:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{v}}(t) &= \vec{\boldsymbol{v}}(t_0) + \int_{t_0}^{t} dt' \vec{\boldsymbol{a}}(t') \\ &= \vec{\boldsymbol{v}}(t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} dt' \vec{\boldsymbol{F}}(t') \end{aligned} \tag{8.8}$$

Analogamente, si ricava la legge oraria della posizione, integrando la velocità:

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{r}}(t) &= \vec{\boldsymbol{r}}(t_0) + \int_{t_0}^{t} dt' \vec{\boldsymbol{v}}(t') \\
&= \vec{\boldsymbol{r}}(t_0) + \int_{t_0}^{t} dt' \left[\vec{\boldsymbol{v}}(t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t'} dt'' \vec{\boldsymbol{F}}(t'') \right] \\
&= \vec{\boldsymbol{r}}(t_0) + \vec{\boldsymbol{v}}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \vec{\boldsymbol{F}}(t'')
\end{aligned}
\tag{8.9}
$$

Questo calcolo si chiama *integrazione del moto*.

Osserviamo che, per risolvere il moto, è necessario conoscere non solo la forza $\vec{\boldsymbol{F}}$ applicata in tutto l'intervallo di tempo $[t_0; t]$, ma anche le *condizioni iniziali*, ovvero la velocità $\vec{\boldsymbol{v}}(t_0)$ e la posizione $\vec{\boldsymbol{r}}(t_0)$ all'istante iniziale t_0.

In alcuni (rari!) casi, la forma di $\vec{\boldsymbol{F}}(t)$ rende queste integrazioni possibili in forma analitica, sfruttando le regole riassunte nella Sezione 3.3. In molti casi l'integrazione analitica non è possibile, pertanto si risolve il problema al computer, con metodi numerici.

8.4.3 Condizione di equilibrio statico

Un punto materiale è in *equilibrio statico* se, una volta posto in quiete in una data posizione, lì resta.

Perché ciò si realizzi, occorre che $\vec{\boldsymbol{a}} = 0$, e quindi che *la risultante delle forze* agenti su di esso sia nulla:

$$
\vec{\boldsymbol{F}}_{tot} = \sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i = 0 \qquad \text{(equilibrio statico)} \tag{8.10}
$$

Insistiamo sul significato di tale condizione: non occorre che sull'oggetto non agiscano forze: esse possono esserci, e delle nature più svariate. L'importante è che la loro somma vettoriale sia zero.

Per esempio, sappiamo che un oggetto di massa m tende a cadere verso il basso con un'accelerazione $\vec{\boldsymbol{a}} = -g\,\hat{\boldsymbol{z}}$ (vd Sezione 7.5.4), quindi deve essere soggetto ad una *forza-peso* $\vec{\boldsymbol{F}}_g = -mg\,\hat{\boldsymbol{z}}$. Se lo stesso oggetto è appoggiato su un piano orizzontale, oppure se è appeso ad un filo, resta fermo. Evidentemente, la forza-peso continua ad esistere — per esempio, se il piano è flessibile osserviamo che si incurva sotto il peso, oppure se il filo non è perfettamente inestensibile osserviamo un allungamento. Quindi, deve subentrare un'altra forza — dovuta al vincolo, piano o filo che sia — che bilancia la forza-peso: $\vec{\boldsymbol{F}}_{vinc} = -\vec{\boldsymbol{F}}_g$. Riprenderemo meglio questi casi nel Capitolo 9.

8.4.4 Forza tangenziale e centripeta

Nel Capitolo 7 abbiamo introdotto le accelerazioni *tangenziale* e *centripeta*:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{a}}_t + \vec{\boldsymbol{a}}_n \qquad ; \qquad \begin{array}{ccc} \vec{\boldsymbol{a}}_t & \parallel & \vec{\boldsymbol{v}} \\ \vec{\boldsymbol{a}}_n & \perp & \vec{\boldsymbol{v}} \end{array}$$

Questo suggerisce di scomporre anche la forza totale $\vec{\boldsymbol{F}}$ in due componenti: una *tangenziale*, parallela a $\vec{\boldsymbol{v}}$, e una *centripeta*, perpendicolare a $\vec{\boldsymbol{v}}$. Precisamente, se su un punto materiale agisce una forza $\vec{\boldsymbol{F}}$, o più in generale un sistema di forze $\vec{\boldsymbol{F}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{F}}_n$ di risultante $\vec{\boldsymbol{F}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\boldsymbol{F}}_i$, possiamo calcolare la componente tangenziale e quella centripeta come:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{F}}_t &= \left(\vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{\boldsymbol{v}}\right) \hat{\boldsymbol{v}} \\ \vec{\boldsymbol{F}}_n &= \vec{\boldsymbol{F}} - \vec{\boldsymbol{F}}_t \end{aligned}$$

La forza tangenziale e centripeta sono legate alle rispettive accelerazioni da:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}_t + \vec{\boldsymbol{F}}_n \qquad ; \qquad \begin{array}{ccccc} \vec{\boldsymbol{F}}_t = m\vec{\boldsymbol{a}}_t & \parallel & \vec{\boldsymbol{v}} & & \text{forza tangenziale} \\ \vec{\boldsymbol{F}}_n = m\vec{\boldsymbol{a}}_n & \perp & \vec{\boldsymbol{v}} & & \text{forza centripeta} \end{array} \tag{8.11}$$

Gli effetti di tali forze si deducono da quelli delle rispettive accelerazioni:

- la *forza tangenziale* altera il modulo della velocità, ma non la sua direzione:
$$\vec{\boldsymbol{F}}_t = m\left(\frac{dv}{dt}\right)\hat{\boldsymbol{t}} \tag{8.12}$$
- la *forza centripeta* altera la direzione del moto, ma non il modulo della velocità:
$$\vec{\boldsymbol{F}}_n = m\left(\frac{v^2}{\rho}\right)\hat{\boldsymbol{n}} = m\,\omega^2\rho\,\hat{\boldsymbol{n}} \tag{8.13}$$

8.5 Commenti sulla legge di azione-reazione

Le forze che agiscono su di un oggetto sono dovute ad interazioni con altri oggetti circostanti. Queste interazioni possono avvenire sotto diverse forme. Per esempio per urti, oppure a distanza. In ogni caso, vale un principio generale: se l'oggetto (1) produce una forza $\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$ sull'oggetto (2), allora anche

l'oggetto (2) è in grado di produrre una forza $\vec{\boldsymbol{F}}_{12}$ sull'oggetto (1). E c'è di più: queste due forze sono "uguali e contrarie":

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{21} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{12}$$

e agiscono lungo la congiungente i due oggetti: $\vec{\boldsymbol{F}}_{12}, \vec{\boldsymbol{F}}_{21} \parallel (\vec{\boldsymbol{r}}_2 - \vec{\boldsymbol{r}}_1)$.

Vedremo poi (Sezione 8.6 e Sezione 15.6) che questa legge ha importanti conseguenze rispetto all'esistenza di *quantità conservate*, ovvero *costanti del moto*.

Almeno qualitativamente, l'idea di azione-reazione fa parte della nostra esperienza quotidiana. Se una persona, seduta in ufficio alla sua scrivania su una sedia con le rotelle, spinge le braccia in avanti contro il bordo del tavolo, ottiene come effetto che per reazione "il tavolo la spinge indietro". Una nave a motore, con le sue eliche spinge l'acqua all'indietro, e come effetto riceve una spinta in avanti. In modo del tutto simile, un aereo a reazione raccoglie l'aria dall'apertura frontale dei suoi turbo-reattori, la comprime e la scalda, facendola poi uscire all'indietro ad altissima velocità: come risultato viene spinto fortemente in avanti e riesce a volare. Il nome stesso, "aereo a reazione", deriva proprio dal principio che stiamo descrivendo. Anzi, a questo punto viene da chiedersi quale sia un meccanismo di propulsione che non sfrutti il principio di azione-reazione... Anche un'automobile, o un pedone, avanzano perché "spingono all'indietro il terreno".

Esercizio 8.3. *Un'auto da corsa di massa* $m = 500$ kg *accelera da* 0 *a* 100 km/h *in* $\Delta t = 2.5$ s. *Assumendo (che non è proprio vero!) che l'accelerazione sia costante, si calcoli la forza sviluppata dal motore. Perché, mentre è evidente che l'auto accelera in avanti, nessuno rileva che il terreno viene spinto all'indietro?*

Risposta.

L'accelerazione si calcola come $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{100 \text{ km/h}}{2.5 \text{ s}} = 11.111 \text{ m/s}^2$. *La forza del motore sull'auto è* $F_a = ma = 5556$ N.

Secondo la legge di azione-reazione, deve esistere una forza uguale e contraria agente sul terreno: $F_t = -F_a$, *quindi il terreno deve essere accelerato all'indietro. Qual è la massa del terreno? Se la strada è rigida, attaccata al suolo sottostante, dobbiamo considerare la massa di tutto ciò che è solidale con la strada... ovvero la massa del pianeta Terra, che è* $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg. *Quindi, l'accelerazione del terreno è* $a_t = \dfrac{F_t}{M} = 9 \cdot 10^{-22}$ m/s^2... *decisamente non misurabile!*

L'asinello "saggio"

Un asino, avendo studiato Fisica, si rifiuta di trainare il carro. Ragiona così: "se io sono l'oggetto (a) *e il carro l'oggetto* (c), *io applico una forza* F_{ca} *al carro, il*

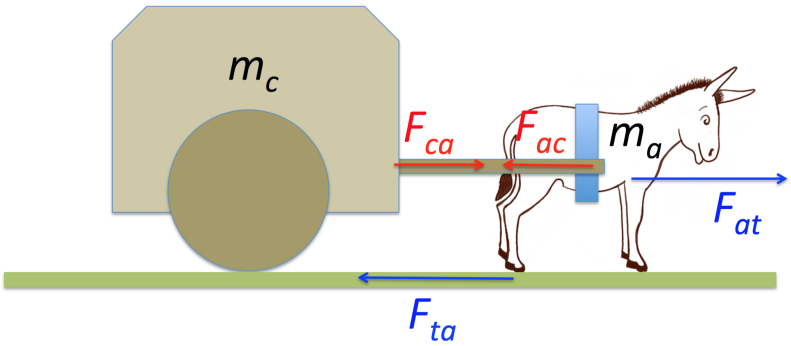


Figura 8.4: *Schema delle forze nel problema dell'"asinello saggio"*

carro applica su di me una forza $F_{ac} = -F_{ca}$; quindi la forza totale è nulla e non ci muoviamo. Più io tiro, più il carro mi contrasta, quindi che tiro a fare???". Ovviamente l'affermazione è paradossale. Dov'è l'errore?

Risposta. *Le forze F_{ca}, F_{ac} non sono le uniche in gioco. L'asino (se si convince...) esercita anche una forza sul terreno, il quale reagisce sull'asino. Chiamando (t) il terreno, la forza che l'asino esercita sul terreno è F_{ta}, mentre il terreno di rimando esercita sull'asino una forza $F_{at} = -F_{ta}$. Lo schema di tutte le forze in gioco è quello di Fig. 8.4.*

La forza totale agente sull'asino è dunque $F_a^{tot} = F_{at} + F_{ac} = -(F_{ta} + F_{ca})$. Guardiamo ai segni: l'asino spinge indietro il terreno, dunque $F_{ta} < 0$, però tira avanti il carro, quindi $F_{ca} > 0$. Basta che l'asino spinga abbastanza forte il terreno — $|F_{ta}| > F_{ca}$ — perché la forza totale sull'asino sia > 0. L'accelerazione dell'asino è $a = \dfrac{F_a^{tot}}{m_a} = -\dfrac{F_{ca} + F_{ta}}{m_a}$, essendo m_a la massa dell'asino. Ma quanto deve valere F_{ta}? Oppure, quanto vale F_{ca}?

Proviamo ora a ragionare considerando il sistema (asino) + (carro). La forza totale agente su di esso è $F_{c+a}^{tot} = F_c^{tot} + F_a^{tot} = F_{ca} + (F_{ac} + F_{at}) = F_{at} = -F_{ta}$. L'accelerazione del sistema (asino) + (carro) è sempre a, e deve valere $a = \dfrac{F_{c+a}^{tot}}{m_c + m_a} = -\dfrac{F_{ta}}{m_c + m_a}$, essendo m_c la massa del carro.

Quindi, la forza che l'asino deve applicare sul terreno, è $F_{ta} = -(m_c + m_a)a$. Confrontando le due equazioni per l'accelerazione, $\dfrac{F_{ca} + F_{ta}}{m_a} = \dfrac{F_{ta}}{m_c + m_a}$, da cui $F_{ca} = -\dfrac{m_c}{m_c + m_a} F_{ta} = \dfrac{m_c}{m_c + m_a} |F_{ta}|$. Della forza applicata dall'asino sul terreno ($|F_{ta}|$), una frazione $\dfrac{m_c}{m_c + m_a}$ viene trasmessa al carro (il resto mette in moto lo stesso asino). Notate che, al crescere di $\dfrac{m_c}{m_a}$, la frazione di forza trasmessa al carro è maggiore. Se siete bravi carrettieri, potete convincere l'asino che gli conviene tirare carri più pesanti...

8.6 Quantità di moto

La legge di Newton ci porta a definire una quantità meccanica di importanza fondamentale: la *quantità di moto* [5]. Un oggetto di massa m e dotato di velocità $\vec{\boldsymbol{v}}$ possiede una quantità di moto

$$\vec{\boldsymbol{p}} = m\vec{\boldsymbol{v}} \tag{8.14}$$

Poiché la massa m è costante nel tempo, $\dfrac{d\vec{\boldsymbol{p}}}{dt} = m\dfrac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt}$. Quindi la legge di Newton, $\vec{\boldsymbol{F}} = m\vec{\boldsymbol{a}}$, si può scrivere in modo equivalente come:

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{p}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{F}} \tag{8.15}$$

Questa equazione può facilmente essere integrata, per ottenere la variazione di quantità di moto $\Delta\vec{\boldsymbol{p}}$ che subisce un oggetto sottoposto a una forza $\vec{\boldsymbol{F}}(t)$, in generale variabile con il tempo:

$$\Delta\vec{\boldsymbol{p}} = \vec{\boldsymbol{p}}(t) - \vec{\boldsymbol{p}}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{\boldsymbol{F}}(t')\, dt' \tag{8.16}$$

L'Eq. (8.16) è spesso nota come "teorema dell'impulso". Nel caso di forza costante, questa equazione si riduce semplicemente a

$$\Delta\vec{\boldsymbol{p}} = \vec{\boldsymbol{p}}(t) - \vec{\boldsymbol{p}}(t_0) = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot (t - t_0) \qquad (\vec{\boldsymbol{F}} \text{ costante}) \tag{8.17}$$

8.6.1 Forze impulsive, impulso di una forza

Si chiamano "forze impulsive" forze che agiscono per intervalli di tempo Δt molto brevi — per esempio durante un urto.

Se su un oggetto agisce una forza impulsiva $\vec{\boldsymbol{F}}_{imp}$ per un intervallo di tempo Δt, si definisce l'*impulso* della forza come

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{I}}} \;=\; \int_{t}^{t+\Delta t} dt' \vec{\boldsymbol{F}}_{imp}(t') \;=\; \overline{\vec{\boldsymbol{F}}_{imp}}\; \Delta t \tag{8.18}$$

dove abbiamo introdotto la "forza impulsiva media"

$$\overline{\vec{\boldsymbol{F}}_{imp}} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t}^{t+\Delta t} dt' \vec{\boldsymbol{F}}_{imp}(t') \tag{8.19}$$

[5] Attenzione alla terminologia: in relatività e in fisica delle particelle, al posto di "quantità di moto" si suole più spesso usare il termine *impulso*. In fisica classica, invece, tale termine è spesso usato per indicare l'integrale di una forza nel tempo, come spiegato in Sezione 8.6.1. Dunque, se trovate la parola "impulso" nella letteratura, attenzione a che cosa si intende!

agente nel breve intervallo di tempo Δt. Applicando l'Eq. (8.16):

$$\Delta\vec{\boldsymbol{p}} = \int_t^{t+\Delta t} dt' \vec{\boldsymbol{F}}_{imp}(t') = \overline{\vec{\boldsymbol{F}}_{imp}}\ \Delta t = \vec{\boldsymbol{\mathcal{I}}}$$

In generale, deve trattarsi di una forza molto intensa, se deve produrre un $\Delta\vec{\boldsymbol{p}}$ apprezzabile in un tempo Δt molto piccolo. Immaginate una martellata su un chiodo, o un sasso che sfonda un vetro... La durata Δt potrebbe anche non essere facile da definire, e di conseguenza nemmeno la forza media $\overline{\vec{\boldsymbol{F}}_{imp}}$. In questi casi è molto più comodo caratterizzare l'effetto attraverso l'impulso $\vec{\boldsymbol{\mathcal{I}}}$.

Se su un punto materiale agiscono tante forze $\vec{\boldsymbol{F}}_i$, e una forza impulsiva $\vec{\boldsymbol{F}}_{imp}$, la risultante è $\vec{\boldsymbol{F}}_{tot} = \sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i + \vec{\boldsymbol{F}}_{imp}$. La variazione della quantità di moto, nel tempo Δt in cui agisce $\vec{\boldsymbol{F}}_{imp}$, è quindi

$$\begin{aligned}\Delta\vec{\boldsymbol{p}} &= \int_t^{t+\Delta t} dt' \left(\sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i + \vec{\boldsymbol{F}}_{imp}\right) \\ &= \vec{\boldsymbol{\mathcal{I}}} + \int_t^{t+\Delta t} dt' \left(\sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i\right)\end{aligned}$$

Ora, la forza impulsiva è normalmente molto più intensa delle altre, $\vec{\boldsymbol{F}}_{imp} \gg \sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i$, pertanto, nel breve tempo Δt, è l'unica che dà un effetto apprezzabile, mentre le altre $\vec{\boldsymbol{F}}_i$, integrate su un tempo Δt molto breve, sono trascurabili:

$$\begin{aligned}\int_t^{t+\Delta t} dt' \left(\sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i\right) &\ll \overline{\vec{\boldsymbol{F}}_{imp}}\ \Delta t \equiv \vec{\boldsymbol{\mathcal{I}}} \\ \Delta\vec{\boldsymbol{p}} &\simeq \vec{\boldsymbol{\mathcal{I}}}\end{aligned}$$

8.6.2 Conservazione della quantità di moto

Consideriamo due oggetti (1) e (2) che si scambiano forze $\vec{\boldsymbol{F}}_1$ e $\vec{\boldsymbol{F}}_2$ ciascuno sull'altro, e supponiamo che non esistano altre forze esterne. Le due forze soddisfano il principio di azione-reazione: $\vec{\boldsymbol{F}}_1 = -\vec{\boldsymbol{F}}_2$, pertanto anche le variazioni delle due quantità di moto sono tali che:

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{p}}_1}{dt} = -\frac{d\vec{\boldsymbol{p}}_2}{dt}$$

Senza conoscere i dettagli delle forze scambiate fra (1) e (2), possiamo comunque affermare che in un tempo Δt le due quantità di moto sono variate ciascuna di

$$\Delta \vec{\boldsymbol{p}}_i = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} dt \, \frac{d\vec{\boldsymbol{p}}_i}{dt}$$

(con $i = 1, 2$ per indicare ciascuno dei due oggetti), e quindi

$$\Delta \vec{\boldsymbol{p}}_1 = -\Delta \vec{\boldsymbol{p}}_2 \tag{8.20}$$

ovvero la variazione di quantità di moto di un oggetto è *compensata* dalla variazione di quantità di moto dell'altro oggetto. In altre parole, la quantità di moto totale dei due oggetti non cambia:

$$\vec{\boldsymbol{p}}_1 + \vec{\boldsymbol{p}}_2 \;=\; \text{costante} \tag{8.21}$$

ma durante l'interazione viene scambiata da un oggetto all'altro.

Ripetiamo che questa circostanza si verifica *solo se le uniche forze in gioco sono quelle scambiate fra i due oggetti.*

Riassumendo: *quando due oggetti sono sottoposti solo alle reciproche forze — cioè senza ulteriori forze esterne — la loro quantità di moto totale si conserva, ovvero è una costante del moto.*

Nella dimostrazione abbiamo usato la legge di azione-reazione, in particolare il fatto che le forze agenti su (1) e su (2) siano uguali in modulo ed opposte. Se ciò non è vero, per esempio come in Fig. 8.2(c), la conservazione della quantità di moto viene violata.

8.6.3 Misure di massa

La conservazione della quantità di moto ci fornisce un metodo di misurare le masse di oggetti — anche se non è il metodo più comunemente usato.

Due oggetti di masse m_0, m (ignote) vengono posti in quiete, separati da un dispositivo di massa trascurabile che li collega ed è pronto a "spararli via" — per esempio, una molla compressa e bloccata, che può rapidamente estendersi non appena viene sbloccata. Si può immaginare di appoggiare il tutto su un tavolo orizzontale liscio. La quantità di moto totale del sistema è nulla. Appena il dispositivo viene sbloccato, le due masse vengono sparate in direzioni opposte, con velocità $\vec{\boldsymbol{v}}_0$, $\vec{\boldsymbol{v}}$, tali che

$$0 \;=\; m_0 \vec{\boldsymbol{v}}_0 + m \vec{\boldsymbol{v}}$$

In moduli, $m_0 v_0 = mv$, essendo le velocità v_0, v misurabili subito dopo lo sblocco. Si noti che non facciamo nessuna ipotesi su come il dispositivo spari via le masse. Inoltre, l'estensione avviene in un tempo talmente breve, da poter trascurare qualunque effetto dell'interazione fra le due masse e il tavolo — si tratta di una forza *impulsiva*. Quindi si può risalire al valore della massa m:

$$m = \frac{v_0}{v} m_0$$

Il problema potrebbe sembrare indeterminato: due incognite (m, m_0) con una sola equazione. Ricordiamo però il significato di misura, ovvero "quante volte una grandezza campione è contenuta nella grandezza che dobbiamo misurare". Quindi, se adottiamo una massa campione m_0 (per esempio $m_0 = 1$ kg), qualunque altra massa m può essere misurata con questo sistema in unità di m_0.

8.6.4 Esercizi sulla quantità di moto

Esercizio 8.4. *Un pattinatore maleducato, di massa $m_1 = 80$ kg, si muove sul ghiaccio alla velocità di $v_1 = 3$ m/s, quando improvvisamente dà uno spintone ad un altro pattinatore di massa $m_2 = 65$ kg, inizialmente fermo. In seguito alla spinta questo prende a muoversi con velocità di $v_2 = 2$ m/s nella stessa direzione. Qual è la velocità del pattinatore maleducato dopo la spinta?*

Risposta. *Non sappiamo con quale forza il primo pattinatore ha spinto il secondo, però possiamo usare la conservazione della quantità di moto. Per il secondo pattinatore, la quantità di moto è cambiata di $\Delta p_2 = m_2 v_2 = 130$ kg m/s. Pertanto per il primo deve essere cambiata di $\Delta p_1 = -\Delta p_2$. Chiamando v_1' la sua velocità dopo la spinta, deve quindi essere $\Delta p_1 = m_1(v_1' - v_1) = -\Delta p_2$, ovvero* $v_1' = v_1 - \dfrac{\Delta p_2}{m_1} = 3 \text{ m/s} - \dfrac{130 \text{ kg m/s}}{80 \text{ kg}} = 1.375 \text{ m/s}$.

Esercizio 8.5. *Un soldato in addestramento spara un colpo di fucile contro un sacco di sabbia. Il proiettile, con massa $m = 25$ g, viene sparato ad una velocità di 250 m/s. Se il soldato ha massa $M = 85$ kg, con quale velocità rincula all'indietro? Il sacco di sabbia ha una massa $m' = 30$ kg: che velocità acquista quando il proiettile si conficca in esso?*

Risposta. *Prima dello sparo, la quantità di moto del sistema soldato+proiettile è zero. Pertanto, tale deve essere anche dopo. La quantità di moto del proiettile è $p = mv = (0.025 \text{ kg}) \cdot (250 \text{ m/s}) = 6.25 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$. La stessa quantità di moto (all'indietro) viene quindi ceduta al soldato, che quindi rincula alla velocità* $\dfrac{p}{M} = \dfrac{6.25 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{85 \text{ kg}} = 0.0735 \text{ m/s}$.

Prima dell'impatto, il sacco è fermo, dunque non ha quantità di moto. Dopo l'impatto, la quantità di moto del sistema sacco+proiettile deve essere la stessa

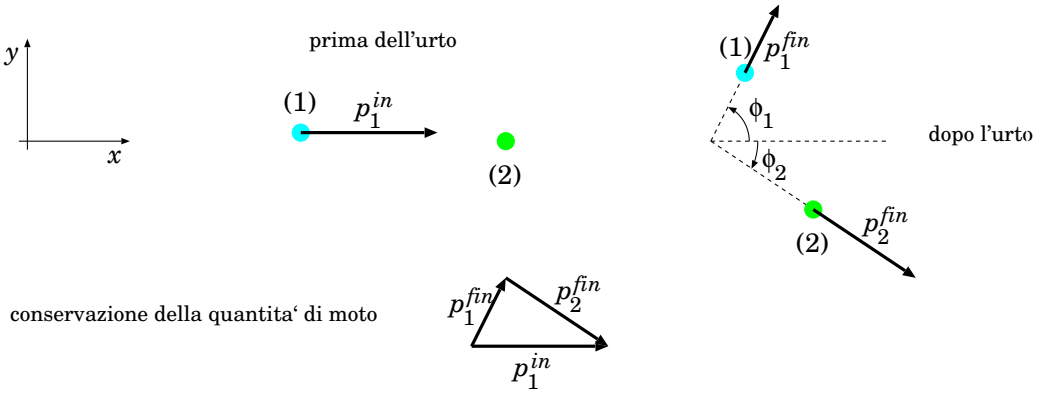


Figura 8.5: *Urto fra due bocce.*

posseduta dal proiettile prima dell'impatto; inoltre il proiettile si conficca nel sacco, quindi i due oggetti si muovono insieme. Pertanto, detta v' la velocità del sacco dopo l'impatto, deve essere $(m + m')v' = p$. Risolvendo, si trova $v' = \dfrac{p}{m+m'} = \dfrac{6.25 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{30.025 \text{ kg}} = 0.208 \text{ m/s}$.

Esercizio 8.6. *Una boccia di massa m_1 si muove con velocità v_1^{in}, quando all'improvviso urta un'altra boccia di massa m_2, inizialmente ferma. Dopo l'urto, la prima boccia si muove con velocità v_1^{fin}, in una direzione diversa che forma un angolo ϕ_1 rispetto alla direzione iniziale. Si calcolino la velocità v_2^{fin} della seconda boccia, e l'angolo ϕ_2 della sua direzione, sempre rispetto alla direzione iniziale della prima boccia.*

Risposta. *Si usa sempre la conservazione della quantità di moto. Schematizziamo il problema come in Fig. 8.5. Inizialmente le quantità di moto sono $\vec{p}_1^{in}$ e $\vec{p}_2^{in} = 0$. Dopo l'urto abbiamo $\vec{p}_1^{fin}$ e $\vec{p}_2^{fin}$, tali che $\vec{p}_1^{in} = \vec{p}_1^{fin} + \vec{p}_2^{fin}$. Quindi i 3 vettori non nulli ($\vec{p}_1^{in}$, $\vec{p}_1^{fin}$, $\vec{p}_2^{fin}$) non sono linearmente indipendenti. Il problema è 2-dimensionale, poiché si svolge sul piano individuato da $\vec{p}_1^{fin}$, $\vec{p}_2^{fin}$. Quindi introduciamo le coordinate cartesiane x, y, tali che l'asse $\hat{\boldsymbol{x}}$ sia orientato come $\vec{v}_1^{in}$. Con questa scelta:*

$$\begin{array}{rclcrcl}
p_{1,x}^{in} & = & m_1 v_1^{in} & ; & p_{1,y}^{in} & = & 0 \\
p_{1,x}^{fin} & = & m_1 v_1^{fin} \cos\phi_1 & ; & p_{1,y}^{fin} & = & m_1 v_1^{fin} \sin\phi_1 \\
p_{2,x}^{fin} & = & m_2 v_2^{fin} \cos\phi_2 & ; & p_{2,y}^{fin} & = & m_2 v_2^{fin} \sin\phi_2
\end{array}$$

Dalla conservazione della quantità di moto:

$$\begin{array}{rclcl}
v_{2,x}^{fin} & = & \dfrac{p_{2,x}^{fin}}{m_2} & = & \dfrac{m_1}{m_2}(v_1^{in} - v_1^{fin}\cos\phi_1) \\
v_{2,y}^{fin} & = & \dfrac{p_{2,y}^{fin}}{m_2} & = & -\dfrac{m_1}{m_2} v_1^{fin} \sin\phi_1
\end{array}$$

Poi ovviamente $v_2^{fin} = \sqrt{(v_{2,x}^{fin})^2 + (v_{2,y}^{fin})^2}$ *e* $\tan\phi_2 = \dfrac{v_{2,y}^{fin}}{v_{2,x}^{fin}}$.

Esercizio 8.7. *Un oggetto di massa* $m = 10$ kg *cade al suolo da un'altezza* $h = 1$ m. *Così come l'oggetto è attratto dalla gravità terrestre, anche la Terra è attratta dall'oggetto, con una forza di pari intensità ma di direzione opposta. Quindi, che ci crediate o no, anche la Terra "cade verso l'alto". Con quale velocità la Terra "cade" al momento della collisione con l'oggetto? Occorre sapere che la massa della Terra è* $M_\oplus = 6 \cdot 10^{24}$ kg.

Risposta. *L'oggetto si muove di moto uniformemente accelerato verso il basso, secondo la legge* $\Delta s = \frac{1}{2}gt^2$. *Quando colpisce il terreno, il tempo intercorso è tale che* $\dfrac{1}{2}gt^2 = h$, *ovvero* $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 0.452$ s. *La sua velocità è* $v = gt = \sqrt{2gh} = 4.43$ m/s. *Quindi la sua quantità di moto è* $p = mv = 44.3$ kg m/s. *Anche la Terra deve avere acquistato una uguale quantità di moto, verso l'alto:* $M_\oplus v_\oplus = p$, *pertanto la velocità acquistata dalla Terra è* $v_\oplus = \dfrac{p}{M_\oplus} = 7.38 \cdot 10^{-24}$ m/s. *Ovviamente si tratta di una velocità estremamente piccola ed assolutamente non rilevabile. Per questo il buon senso ci dice che "la Terra non cade verso l'alto, ma se ne sta lì dov'è".*

Capitolo 9

Forze "macroscopiche"

Cominciamo con lo studiare il moto di un punto materiale in condizioni che ci sono più familiari. Alcune forze fanno parte della nostra esperienza quotidiana:

- la prima è la cosiddetta "forza-peso", ovvero la *forza di gravità*, che attrae qualunque oggetto verso il basso.

Questa forza agisce sempre, su qualunque oggetto in prossimità della superficie terrestre.

Vi sono poi numerose altre forze, dette *forze di contatto* che si manifestano quando un oggetto entra in contatto con altri materiali, solidi o liquidi o gassosi.

- le *reazioni vincolari*, quando l'oggetto con cui si entra in contatto è rigido, cioè si oppone alle deformazioni;
- le *tensioni*, prodotte da fili inestensibili tesi;
- le *forze elastiche*, quando l'oggetto con cui si entra in contatto ha la capacità di deformarsi, e la tendenza a riprendere la sua forma iniziale: per esempio una molla;
- gli *attriti*, prodotti dal contatto con altri materiali, solidi o liquidi o gassosi.

Nell'introduzione abbiamo già detto che la materia (solida, liquida, o gassosa che sia) è sostanzialmente "vuota", nel senso che le masse occupano una frazione di volume minuscola (Sezione 1.1). Inoltre tutte le interazioni, a livello elementare fra atomi e molecole, sono di natura elettromagnetica, dunque sono "interazioni a distanza" (Sezione 1.3.3).

Quindi, a livello fondamentale *le forze di contatto non esistono*. Esse sono in effetti la manifestazione macroscopica di una combinazione di interazioni fondamentali. Tuttavia, descriverle in questo modo sarebbe estremamente complicato e poco utile ai fini pratici, pertanto è preferibile una trattazione più empirica. Il limite di validità di questa trattazione è dato dalle dimensioni dei sistemi fisici descritti: devono essere formati da *molti atomi*, affinché gli effetti locali di ciascuno di essi si diluiscano con quelli degli atomi circostanti.

9.1 La "forza-peso"

Nella Sezione 7.5.4 abbiamo visto che qualunque oggetto, in prossimità della superficie terrestre, subisce la forza di gravità che lo sottopone ad una accelerazione pari a:

$$\vec{\boldsymbol{a}} \equiv -g\,\hat{\boldsymbol{z}} \quad (g = 9.806 \text{ m/s}^2) \qquad \text{(alla superficie terrestre)}$$

Questo fatto è *indipendente dalla massa m dell'oggetto*. Quindi, la *forza di gravità* agente su un oggetto di massa m è sempre proporzionale alla massa:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_g = m\,\vec{\boldsymbol{g}} \tag{9.1}$$

essendo:

$$\vec{\boldsymbol{g}} \equiv -g\,\hat{\boldsymbol{z}} \quad (g = 9.806 \text{ m/s}^2) \qquad \text{(alla superficie terrestre)} \tag{9.2}$$

La forza di gravità alla superficie terrestre è spesso chiamata anche *forza-peso* [1].

9.1.1 Proporzionalità fra forza-peso e massa

La proporzionalità fra la forza-peso e la massa, e quindi il fatto che l'accelerazione sia indipendente dalla massa, è una importantissima peculiarità della gravità. Un'applicazione immediata è che, per misurare masse m di oggetti, si può misurare la forza-peso, $F_g = mg$, mediante una bilancia, quindi ricavare la misura della massa come $m = \dfrac{F_g}{g}$.

Ritroveremo spesso, nei prossimi capitoli, altre importanti conseguenze di questa proprietà.

[1] La forza di gravità è uniforme solo in prossimità della superficie della Terra, o di un pianeta, o di un qualunque oggetto molto esteso e massivo. In generale, la forza di gravità *non è uniforme*. Per esempio, a grandi distanze dall'oggetto astrofisico che la genera, essa è radiale e si attenua come l'inverso del quadrato della distanza.

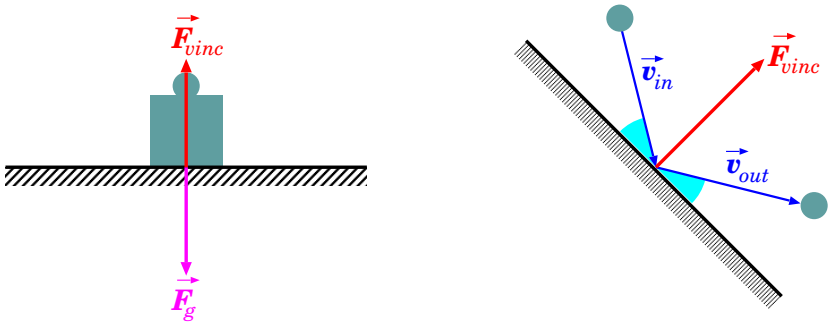


Figura 9.1: *Due esempi di reazione vincolare: a sinistra, un piano orizzontale che si oppone alla forza-peso; a destra, un rimbalzo contro una parete rigida. In entrambi i casi,* $\vec{F}_{vinc}$ *è perpendicolare alla superficie rigida.*

9.2 Reazioni vincolari

Le reazioni vincolari entrano in funzione quando un oggetto rigido entra in contatto con un altro oggetto rigido. Poiché entrambi sono indeformabili, non possono compenetrarsi.

Al livello atomico e molecolare abbiamo già discusso nella Sezione 1.3.3 che cosa succede: gli atomi hanno interazioni elettriche che li tengono "in posizione", ovvero non possono schiacciarsi gli uni contro gli altri, nè allontanarsi gli uni dagli altri.

Al livello macroscopico, diamo una descrizione più empirica, e diciamo che gli oggetti solidi, quando entrano in contatto diretto, manifestano forze repulsive, perpendicolari alla superficie di contatto, che impediscono la compenetrazione [2].

Per esempio, se appoggiamo un oggetto di massa m su un tavolo orizzontale, esso sta fermo — vd Fig. 9.1 (sinistra). Quindi la risultante delle forze agenti su di esso deve essere nulla. Sappiamo che su di esso agisce la forza di gravità, diretta verso il basso: $\vec{F}_g = -mg\hat{z}$. Deve quindi esistere un'altra forza che la contrasti esattamente, in modo che la risultante sia nulla. Questa è la reazione vincolare opposta dal tavolo: $\vec{F}_{vinc} = -\vec{F}_g$.

Un altro esempio: una palla da biliardo rimbalza contro una superficie rigida — vd Fig. 9.1 (destra). Misurando le velocità $\vec{v}_{in}$, $\vec{v}_{out}$ prima e dopo l'urto, si osserva che sono uguali in modulo, $|\vec{v}_{in}| = |\vec{v}_{out}|$, e che gli angoli di entrata e di uscita sono uguali. Si deduce quindi che la variazione di velocità, $\Delta\vec{v} = \vec{v}_{out} - \vec{v}_{in}$, è perpendicolare alla superficie rigida. L'urto deve

[2] Per un modello macroscopico un po' più approfondito, rimandiamo alla Sezione 9.5.5, e poi alla Sezione 14.4.1.

essere durato per un breve tempo Δt, durante il quale ha agito la reazione del vincolo, che ha prodotto la variazione di velocità: $\vec{\boldsymbol{F}}_{vinc} = m\dfrac{\Delta\vec{\boldsymbol{v}}}{\Delta t}$. Quindi anche in questo caso risulta che $\vec{\boldsymbol{F}}_{vinc}$ è perpendicolare alla superficie rigida. Il suo modulo, F_{vinc}, non è facilmente determinabile: si tratta di una forza impulsiva che agisce in un breve tempo Δt, producendo una inversione della componente della velocità ortogonale alla superficie del vincolo, $v_\perp$. Possiamo solo calcolare il suo valore medio: la variazione della quantità di moto, in modulo, è $|\Delta\vec{\boldsymbol{p}}| = 2mv_\perp$, quindi $\overline{F_{vinc}} = \dfrac{2mv_\perp}{\Delta t}$.

Ancora un esempio: un treno viaggia con velocità v su una rotaia, che descrive un tratto curvo ad arco di cerchio, con raggio di curvatura ρ. Dalle nozioni di cinematica, Sezione 7.7, sappiamo che un cambiamento di direzione implica la presenza di un'accelerazione centripeta. Precisamente, l'Eq. (7.36) ci dice che $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$, quindi deve esistere una forza centripeta $F_n = m\dfrac{v^2}{\rho}$. In questo caso è la reazione vincolare della rotaia a produrre tale forza: essa costringe il treno a seguire un percorso curvo, pertanto deve imprimere su di esso una forza: $F_{vinc} = m\dfrac{v^2}{\rho}$.

Notiamo che in tutti questi casi, l'intensità della reazione vincolare non è determinata a priori — non è cioè una caratteristica intrinseca del vincolo, dipende dalle condizioni del problema.

Riassumiamo quindi le caratteristiche delle reazioni vincolari:

- la reazione vincolare esiste solo in caso di contatto;
- è sempre perpendicolare alla superficie del vincolo e diretta verso l'esterno (repulsiva);
- il suo modulo è determinato dalle condizioni del problema: in generale, la strategia è identificare le altre forze agenti, $\vec{\boldsymbol{F}}_i$, e le condizioni realizzate nel moto, ovvero l'accelerazione $\vec{\boldsymbol{a}}$; $\vec{\boldsymbol{F}}_{vinc}$ sarà tale da soddisfare $\vec{\boldsymbol{F}}_{vinc} + \sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i = m\vec{\boldsymbol{a}}$.

9.2.1 Esercizi sulle reazioni vincolari

Consideriamo qui alcuni esempi di forze vincolari.

Esercizio 9.1. *Un oggetto di massa $m = 2.5$ kg è appoggiato su un piano orizzontale rigido. Calcolare la reazione vincolare che il piano esercita sull'oggetto, nei seguenti casi: (1) il piano è fermo; (2) il piano accelera verso l'alto con*

accelerazione $a_2 = 3$ m/s^2*; (3) il piano accelera verso il basso con accelerazione* $a_3 = -4$ m/s^2*; (4) il piano accelera verso il basso con accelerazione* $a_4 = -10$ m/s^2*.*

Risposta. *In tutti i casi si deve applicare* $\vec{\boldsymbol{F}}_{tot} = m\vec{\boldsymbol{a}}$*. L'oggetto è a contatto con il piano, quindi l'accelerazione dell'oggetto è uguale a quella del piano. In questo problema,* $\vec{\boldsymbol{F}}_{tot} = -mg\hat{\boldsymbol{z}} + \vec{\boldsymbol{F}}_{vinc}$*, ed essendo il piano sempre orizzontale,* $\vec{\boldsymbol{F}}_{vinc}$ *è sempre verticale:* $\vec{\boldsymbol{F}}_{vinc} = F_{vinc}\hat{\boldsymbol{z}}$*. Inoltre, essendo la forza vincolare sempre diretta verso l'esterno del vincolo, deve essere sempre* $F_{vinc} \geq 0$*. Il problema diventa dunque unidimensionale:* $ma = F_{tot} = F_{vinc} - mg$*, ovvero* $F_{vinc} = m(a+g)$*. Ora analizziamo i vari casi:*

(1) il piano è fermo, quindi $a = 0$ *e* $F_{vinc} = mg = 24.52$ N *— facile, no? La forza vincolare è tale da contrastare esattamente la forza-peso.*

(2) il piano accelera verso l'alto: $F_{vinc} = m(a_2 + g) = 32.02$ N*. Ora la forza vincolare è maggiore della forza-peso — se il piano fosse una bilancia, "sentirebbe un peso maggiore", per così dire...*

(3) il piano accelera verso il basso: $F_{vinc} = m(a_3 + g) = 14.52$ N*. La forza vincolare è minore della forza-peso — se il piano fosse una bilancia, "sentirebbe un peso minore".*

(4) il piano accelera verso il basso con un'accelerazione che, in valore assoluto, è maggiore di g*:* $F_{vinc} = m(a_4 + g) = -0.485$ N*. Abbiamo trovato* $F_{vinc} < 0$*, che non ha significato fisico. Questo significa che in realtà l'oggetto non può restare appoggiato al piano, perché "il piano cade più in fretta". Quindi accade che il piano si stacca dall'oggetto, e non esercita più la reazione vincolare:* $F_{vinc} = 0$*. L'unica forza agente sull'oggetto è la forza-peso,* $F_g = -mg$*, e l'oggetto cade con accelerazione* $-g$*, verso il basso.*

Esercizio 9.2. *Una locomotiva di massa* $m = 80$ ton *percorre una curva di raggio* $\rho = 100$ m *alla velocità* $v = 75$ km/h*. Calcolare l'accelerazione centripeta e la reazione vincolare della rotaia.*

Risposta. *Anzitutto convertiamo le misure in unità del S.I.:* $m = 80$ ton $= 8 \cdot 10^4$ kg*;* $v = 75$ km/h $= 20.83$ m/s*. L'accelerazione centripeta è* $a_n = \dfrac{v^2}{\rho} = 4.339$ ms^{-2}*. La reazione vincolare è* $F_{vinc} = ma_n = 3.47 \cdot 10^5$ N*.*

Esercizio 9.3. *Un'automobile di massa* $m = 1.5$ ton *percorre a velocità* v *una curva il cui raggio di curvatura è* $\rho = 50$ m*. La forza centripeta massima che i pneumatici possono imprimere alla vettura è* $F_n^{max} = 8 \cdot 10^3$ N*. Qual è la velocità massima* v^{max} *che l'automobile può sostenere senza sbandare?*

Risposta: *la forza centripeta impressa dai pneumatici in curva è* $F_n = m\dfrac{v^2}{\rho}$*. Ovviamente deve essere* $F_n < F_n^{max}$*, quindi* $v = \sqrt{\dfrac{F_n\rho}{m}} < \sqrt{\dfrac{F_n^{max}\rho}{m}} = \sqrt{\dfrac{8 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 50 \text{ m}}{1500 \text{ kg}}} = 16.33 \text{ m/s} = 58.79 \text{ km/h}.$

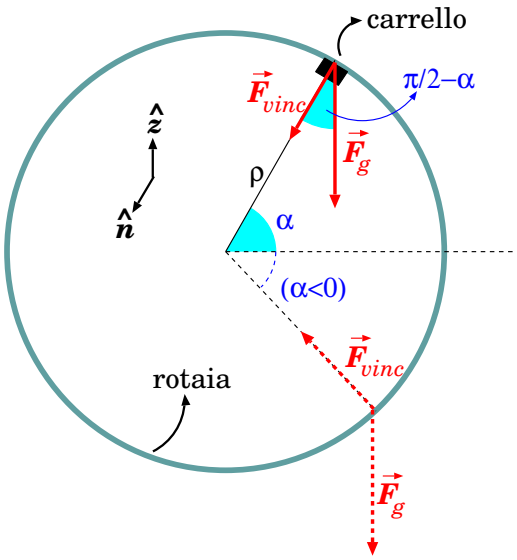


Figura 9.2: *Giro della morte nelle montagne russe, con diagramma delle forze. Per $\alpha > 0$ il carrello potrebbe staccarsi dalla rotaia, se la velocità è troppo bassa; invece, per $\alpha < 0$ (linee tratteggiate) il distacco non c'è mai.*

Giro della morte sulle montagne russe

Un carrello delle montagne russe deve fare un "giro della morte" verticale, di forma circolare di raggio ρ (vd Fig. 9.2). Chiamato α l'angolo, rispetto all'orizzontale, che denota la posizione del carrello, che condizioni deve soddisfare la velocità v affinché il carrello non si stacchi dalla rotaia?

Risposta. *Agiscono due forze: la forza-peso $\vec{\boldsymbol{F}}_g = -mg\hat{\boldsymbol{z}}$, diretta verticalmente verso il basso, e la forza vincolare $\vec{\boldsymbol{F}}_{vinc} = F_{vinc}\hat{\boldsymbol{n}}$, diretta perpendicolare alla rotaia e verso il centro: quindi $F_{vinc} > 0$ — il caso $F_{vinc} < 0$ vorrebbe dire che il vincolo attrae verso di sé il carrello, cosa che non è possibile. La forza risultante deve avere componente centripeta $\vec{\boldsymbol{F}}_n = m\dfrac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{n}}$. Quindi:*

$$
\begin{aligned}
F_n &= \vec{\boldsymbol{F}}_{tot}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = \left(F_{vinc}\hat{\boldsymbol{n}} + \vec{\boldsymbol{F}}_g\right)\cdot\hat{\boldsymbol{n}} \\
m\frac{v^2}{\rho} &= F_{vinc} + F_g\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = F_{vinc} + mg\,\sin\alpha
\end{aligned}
$$

La condizione $F_{vinc} > 0$ diventa quindi $m\left(\dfrac{v^2}{\rho} - g\,\sin\alpha\right) > 0$, ovvero:

$$
v^2 > \rho g\,\sin\alpha
$$

A questo punto i casi sono due:

- *il carrello si trova più in basso del centro di curvatura: quindi* $\alpha < 0$, $\sin\alpha < 0$, *e la condizione è sempre soddisfatta per qualunque valore di* v*: il carrello non si stacca mai (come ci si aspetterebbe!)*

- *il carrello si trova più in alto del centro di curvatura: in questo caso esiste una velocità minima* $v_{min} = \sqrt{\rho g \sin\alpha}$, *al di sotto della quale avremmo la condizione assurda* $F_{vinc} < 0$*: non essendo possibile, il carrello si staccherebbe.*

9.3 Tensioni su fili inestensibili

Un oggetto, attaccato ad una corda inestensibile tesa, viene da essa trattenuto, quindi subisce una forza vincolare. In tal caso essa è costituita dalla *tensione* della corda. In generale, le tensioni — che sono comunque delle forze — si indicano con F_T [3].

Qui consideriamo sempre fili e/o corde di massa trascurabile. Consideriamo alcuni esempi.

Un oggetto di massa m viene trainato con una corda, con accelerazione $\vec{\boldsymbol{a}}$. Se non agiscono altre forze, l'accelerazione è tutta dovuta alla tensione della corda, quindi $\vec{\boldsymbol{F}}_T = m\vec{\boldsymbol{a}}$. La corda è tesa nella direzione in cui l'oggetto viene trainato.

Oppure: un oggetto di massa m è appeso ad una corda, in quiete. Su di esso agiscono la forza-peso, $\vec{\boldsymbol{F}}_g = -mg\hat{\boldsymbol{z}}$, e la tensione della corda, $\vec{\boldsymbol{F}}_T$. Siamo in condizione di equilibrio statico, quindi $\vec{\boldsymbol{F}}_g + \vec{\boldsymbol{F}}_T = 0$, ovvero $\vec{\boldsymbol{F}}_T = mg\hat{\boldsymbol{z}}$. La tensione è diretta in verticale, verso l'alto, e il suo modulo è $F_T = mg$.

Ancora: un oggetto di massa m ruota, con velocità v, trattenuto da una corda di lunghezza ℓ ancorata ad un punto fisso. Il moto per forza di cose è circolare, con raggio ℓ, quindi ci deve essere una forza centripeta $F_n = m\dfrac{v^2}{\ell}$. Se non agiscono altre forze, l'unica forza che contribuisce a F_n è la tensione F_T, quindi $F_T = m\dfrac{v^2}{\ell}$. Ovviamente la corda è disposta sempre lungo il raggio della circonferenza.

Le proprietà delle *forze di tensione* sono:

- la tensione agisce solo quando la corda è tesa;

[3] In molti testi si usa il simbolo T per le tensioni: attenzione a non confondersi con il *periodo* del moto armonico, anch'esso indicato con T...

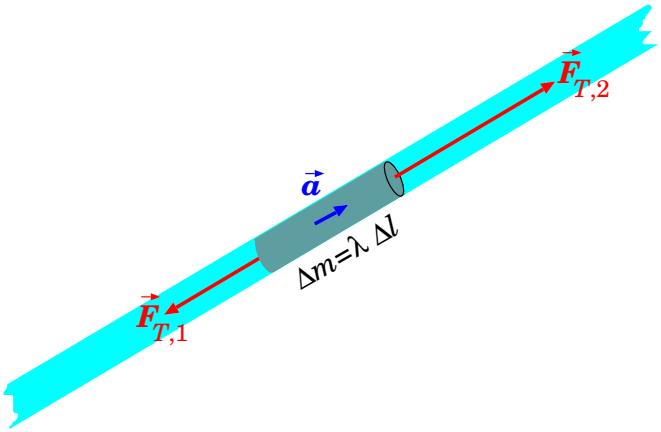


Figura 9.3: *Schema delle tensioni sull'elemento di corda.*

- agisce lungo la direzione della corda, sempre in trazione;
- il valore F_T della tensione e la direzione $\hat{\boldsymbol{F}}_T$ in cui si dispone la corda dipendono dalle condizioni del problema: dette $\vec{\boldsymbol{F}}_i$ le altre forze agenti, e $\vec{\boldsymbol{a}}$ l'accelerazione dell'oggetto, deve essere $\vec{\boldsymbol{F}}_T + \sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i = m\vec{\boldsymbol{a}}$.

9.3.1 Propagazione della tensione lungo un filo "ideale"

In quanto segue consideriamo solo *fili ideali*, ovvero:

- inestensibili (la lunghezza del filo e di ogni sua parte non sono modificabili);
- di massa nulla (o meglio, il filo e ogni sua parte hanno masse trascurabili rispetto a tutte le altre masse del sistema considerato).

La tensione esiste lungo tutto il filo — non solo ai capi. Vogliamo mostrare che essa è uniforme, in modulo, ai capi e in ogni punto del filo ideale.

Con riferimento alla Fig. 9.3, l'elementino $\Delta\ell$ di filo è sottoposto, ai suoi estremi, a due tensioni $\vec{\boldsymbol{F}}_{T,1}$, $\vec{\boldsymbol{F}}_{T,2}$ che lo tirano in direzioni opposte. Detta Δm la massa dell'elementino, si suole definire la *densità lineare*

$$\lambda = \frac{\Delta m}{\Delta \ell} \qquad \text{(densità lineare di massa)}$$

La dinamica dell'elementino è data da:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{T,1} + \vec{\boldsymbol{F}}_{T,2} \;=\; \Delta m \cdot \vec{\boldsymbol{a}} \;=\; \lambda\, \Delta\ell \cdot \vec{\boldsymbol{a}}$$

Per un filo teso, tutti i vettori hanno la stessa direzione. Pertanto, con una scelta opportuna dell'orientamento, l'equazione diventa scalare:

$$F_{T,2} - F_{T,1} \;=\; \Delta m \cdot a \;=\; \lambda\, \Delta\ell \cdot a$$

In generale, $F_{T,1} \neq F_{T,2}$. Tuttavia, le tensioni ai capi dell'elementino sono uguali se:

- se il filo è *statico*, oppure *scorre con velocità costante*, allora $a = 0$ e $F_{T,1} = F_{T,2}$;
- anche in caso di moto accelerato, se *la massa del filo è trascurabile* abbiamo ancora $F_{T,1} = F_{T,2}$.

Nei casi che tratteremo qui, considereremo sempre la tensione come uguale lungo tutto il filo.

Se il filo è flesso da una o più carrucole, i cui effetti (massa e attriti) siano trascurabili, l'effetto di ciascuna carrucola è di modificare la direzione del filo, e quindi della tensione, senza alterarne l'intensità (per farsi un'idea, vd Fig. 9.4). Questo fatto viene approfondito nella Sezione 9.3.2.

9.3.2 Carrucola ideale e filo ideale

Una carrucola è un dispositivo rigido attorno al quale il filo, posto a contatto, si flette. Parliamo di *carrucola ideale* quando il contatto con il filo non ha attriti. Possiamo pensare alla carrucola anche come ad un perno che non ruota. La situazione è illustrata in Fig. 9.5 (sinistra).

Vogliamo mostrare che, se ai capi A, B del filo vengono applicate due tensioni $\vec{\boldsymbol{F}}_T^A$, $\vec{\boldsymbol{F}}_T^B$, allora:

- la presenza della carrucola modifica la direzione della tensione, ma non il suo modulo, ovvero

$$\left|\vec{\boldsymbol{F}}_T^A\right| \;=\; \left|\vec{\boldsymbol{F}}_T^B\right|$$

- la carrucola applica sul filo una forza vincolare:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{vinc} \;=\; -\left(\vec{\boldsymbol{F}}_T^A + \vec{\boldsymbol{F}}_T^B\right)$$

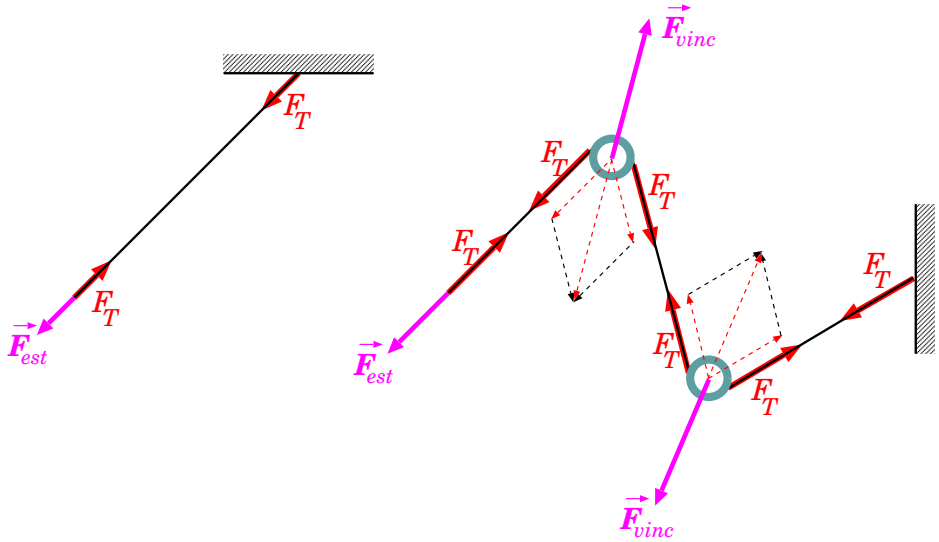


Figura 9.4: *Schemi di tensioni, indicate dalle frecce rosse, lungo corde inestensibili tese. A sinistra: una semplice corda, con tensioni uguali in modulo ma opposte agli estremi. A destra: una corda flessa da carrucole, lungo la quale la tensione mantiene sempre lo stesso modulo, ma cambia direzione, disponendosi sempre lungo la corda. In questo caso, in prossimità di ciascuna carrucola, le due tensioni producono una risultante (freccia rossa tratteggiata), che deve essere compensata dalla reazione vincolare della carrucola (freccia viola).*

- il filo applica sulla carrucola una forza:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{CF} \;=\; \vec{\boldsymbol{F}}_T^A + \vec{\boldsymbol{F}}_T^B$$

Notiamo che il 3° punto è conseguenza del 2° e della legge di azione-reazione, quindi ci concentriamo sui primi 2.

Parametrizziamo la posizione sul filo con la coordinata curvilinea s, e chiamiamo s_A, s_B i valori che essa assume ai capi A, B del filo.

Chiamiamo $\vec{\boldsymbol{F}}_T(s)$ la tensione nel punto di coordinata curvilinea s, sempre orientata nello stesso verso, quindi ai capi del filo:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_T^A \;=\; -\vec{\boldsymbol{F}}_T(s_A) \qquad ; \qquad \vec{\boldsymbol{F}}_T^B \;=\; \vec{\boldsymbol{F}}_T(s_B)$$

Suddividiamo il filo a contatto con la carrucola in tanti segmentini di lunghezza ds, come in Fig. 9.5 (destra); quindi ai capi del segmentino agiscono due forze:

$$-\vec{\boldsymbol{F}}_T(s) \qquad ; \qquad \vec{\boldsymbol{F}}_T(s+ds)$$

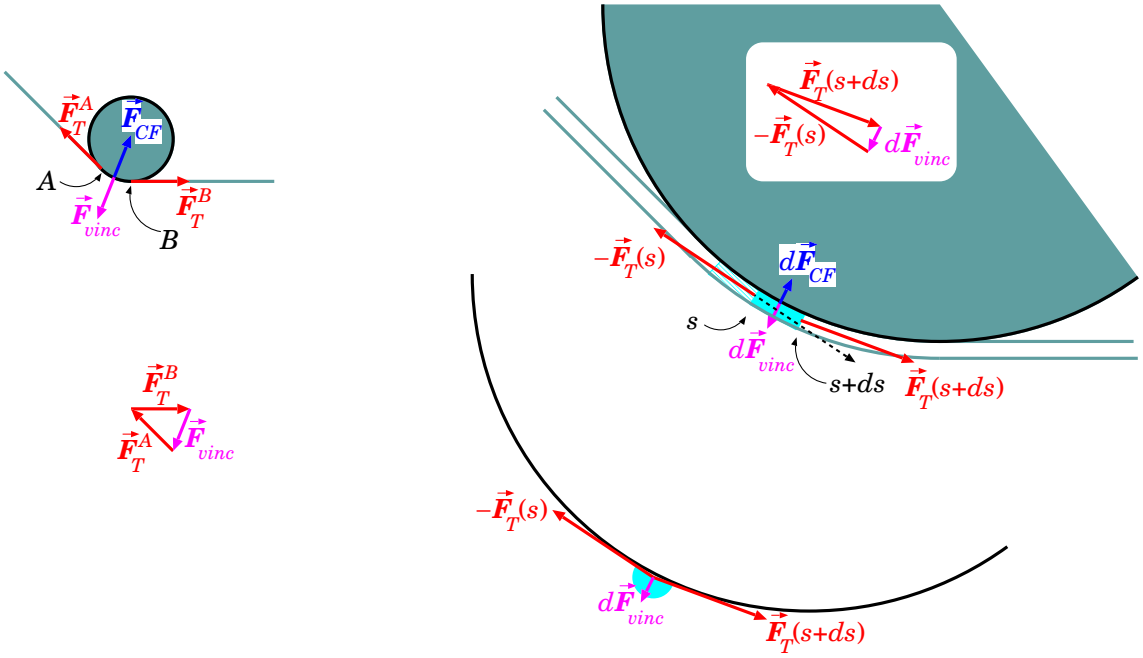


Figura 9.5: *Tensione su un filo ideale flesso su una carrucola ideale. A sinistra: le tensioni $\vec{F}_T^A$, $\vec{F}_T^B$ ai capi del filo, la forza vincolare $\vec{F}_{vinc}$ applicata dalla carrucola sul filo, la forza $\vec{F}_{CF}$ applicata dal filo sulla carrucola. A destra, un dettaglio di un tratto ds di filo, con tensioni ai capi pari a $-\vec{F}_T(s)$ e $\vec{F}_T(s+ds)$, reazione vincolare $d\vec{F}_{vinc}$ applicata dalla carrucola sul tratto ds di filo, forza $d\vec{F}_{CF}$ applicata dal tratto di filo sulla carrucola.*

La carrucola esercita una forza vincolare $d\vec{F}_{vinc}(s)$ sul segmentino. Quindi, detta dm la massa del segmentino, l'accelerazione $\vec{a}$ è tale che:

$$dm\,\vec{a} \;=\; -\vec{F}_T(s) + \vec{F}_T(s+ds) + d\vec{F}_{vinc}(s)$$

Per il filo ideale, $dm = 0$, quindi qualunque sia il moto del filo (e della carrucola) deve essere:

$$d\vec{F}_{vinc}(s) \;=\; \vec{F}_T(s) - \vec{F}_T(s+ds) \;=\; -d\vec{F}_T(s)$$

Ora, $d\vec{F}_{vinc}(s)$ è ortogonale alla carrucola e quindi al segmentino di filo; per ragioni di simmetria evidenti in figura, gli angoli formati rispettivamente da $\left(-\vec{F}_T(s)\ ;\ d\vec{F}_{vinc}\right)$ e $\left(\vec{F}_T(s+ds)\ ;\ d\vec{F}_{vinc}\right)$ sono uguali; quindi il triangolo di lati $-\vec{F}_T(s)$ e $\vec{F}_T(s+ds)$ è isoscele, quindi

$$\left|-\vec{F}_T(s)\right| \;=\; \left|\vec{F}_T(s+ds)\right|$$

ovvero $\left|\vec{\boldsymbol{F}}_T(s)\right|$ è costante lungo il filo. Quest'ultimo risultato può essere quindi applicato agli estremi, attraverso tutti i segmentini intermedi, ottenendo:

$$\left|\vec{\boldsymbol{F}}_T^A\right| = \left|\vec{\boldsymbol{F}}_T^B\right|$$

Inoltre, la forza vincolare totale applicata dalla carrucola sul filo è la somma delle forze vincolari applicate su ciascun segmentino ds:

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{F}}_{vinc} &= \int_A^B d\vec{\boldsymbol{F}}_{vinc}(s) = -\int_A^B d\vec{\boldsymbol{F}}_T(s) = \vec{\boldsymbol{F}}_T(s_A) - \vec{\boldsymbol{F}}_T(s_B) \\ &= -\left(\vec{\boldsymbol{F}}_T^A + \vec{\boldsymbol{F}}_T^B\right)\end{aligned}$$

e quindi anche la seconda parte è dimostrata.

9.3.3 Esercizi sulle tensioni

Esercizio 9.4. *Una massa $m = 100$ g si muove con moto circolare, legata ad una corda di lunghezza $\ell = 50$ cm, che può sopportare una tensione massima $F_T^{max} = 100$ N. Qual è la velocità angolare massima che la massa può avere, senza rompere la corda? Quanto impiegherebbe a fare un giro? Quanti giri farebbe in un secondo?*

Risposta. *La massa è dotata di un'accelerazione centripeta $a_n = \omega^2\ell$, quindi è soggetta ad una forza centripeta $F_n = ma_n = m\omega^2\ell$ che è data dalla tensione F_T della corda: quindi $T = m\omega^2\ell$. La velocità angolare massima è quindi $\omega_{max} = \sqrt{\frac{F_T^{max}}{m\ell}} = \sqrt{\frac{100\text{ N}}{(0.1\text{ kg})(0.5\text{ m})}} = 44.72$ rad/s. Il tempo necessario per fare un giro sarebbe $T = \frac{2\pi\text{ rad}}{\omega} = 0.1405$ s. Quindi in un secondo farebbe $n = \frac{1\text{ s}}{T} = 7.12$ giri.*

Esercizio 9.5. *Tre corde solo collegate insieme come in Fig. 9.6(a), e sottoposte a tensioni $F_{T,1}, F_{T,2}, F_{T,3}$ mediante delle masse appese $m_1 = 130$ g, $m_2 = 120$ g, $m_3 = 50$ g. Calcolare gli angoli $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ con cui si dispongono le tre corde.*

Risposta. *Intanto le tensioni devono equilibrare le forze-peso delle masse, quindi si possono calcolare come $F_{T,1} = m_1 g$, $F_{T,2} = m_2 g$, $F_{T,3} = m_3 g$. Le tre corde si disporranno in modo da realizzare l'equilibrio, quindi con notazione vettoriale deve essere $\vec{\boldsymbol{F}}_{T,1} + \vec{\boldsymbol{F}}_{T,2} + \vec{\boldsymbol{F}}_{T,3} = 0$. Ricaviamo $\vec{\boldsymbol{F}}_{T,3} = -(\vec{\boldsymbol{F}}_{T,1} + \vec{\boldsymbol{F}}_{T,2})$:*

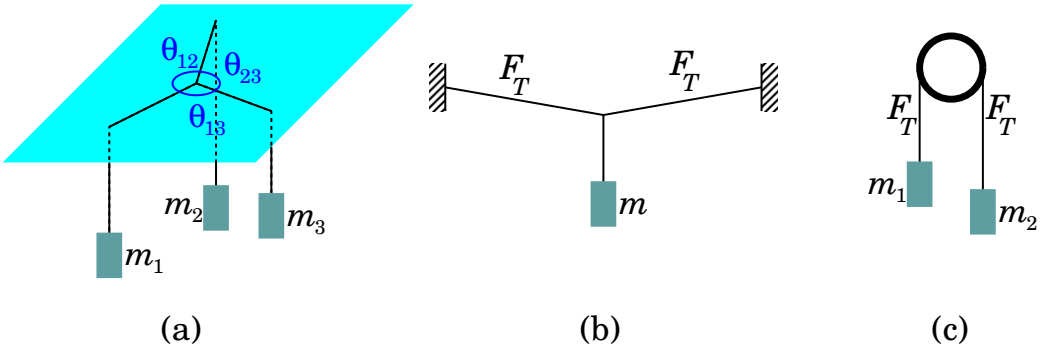


Figura 9.6: *Esercizi sulle tensioni.*

quindi il suo modulo quadro deve essere:

$$\begin{aligned} F_{T,3}^2 &= \vec{\boldsymbol{F}}_{T,3}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}_{T,3} = (\vec{\boldsymbol{F}}_{T,1}+\vec{\boldsymbol{F}}_{T,2})\cdot(\vec{\boldsymbol{F}}_{T,1}+\vec{\boldsymbol{F}}_{T,2}) \\ &= \vec{\boldsymbol{F}}_{T,1}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}_{T,1}+\vec{\boldsymbol{F}}_{T,2}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}_{T,2}+2\vec{\boldsymbol{F}}_{T,1}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}_{T,2} = F_{T,1}^2+F_{T,2}^2+2F_{T,1}F_{T,2}\cos\theta_{12} \\ \cos\theta_{12} &= \frac{F_{T,3}^2-(F_{T,1}^2+F_{T,2}^2)}{2F_{T,1}F_{T,2}} \end{aligned}$$

Nel nostro caso, $\cos\theta_{12} = \dfrac{m_3^2-(m_1^2+m_2^2)}{2m_1m_2} = -0.923$, *ovvero* $\theta_{12} = 2.747$ rad $= 157.4°$.

Procediamo in modo del tutto analogo per gli altri angoli. Troviamo quindi $\cos\theta_{23} = \dfrac{m_1^2-(m_2^2+m_2^2)}{2m_2m_3} = 0$, *cioè* $\theta_{23} = 1.571$ rad $= 90°$, *e* $\cos\theta_{13} = \dfrac{m_2^2-(m_1^2+m_3^2)}{2m_1m_3} = -0.3846$, *cioè* $\theta_{13} = 1.966$ rad $= 112.6°$.

Commento. *Una piccola verifica, per controllare di non aver commesso sbagli:* $\theta_{12}+\theta_{23}+\theta_{23} = 360°$. *Bene, era quello che ci aspettavamo!*

Esercizio 9.6. *Una massa* $m = 5$ kg *è appesa verticalmente ad una corda. Calcolare la tensione della corda.*

Risposta. *La forza di gravità cui la massa è soggetta è* $F_g = mg = 5$ kg $\cdot$ 9.81 ms^{-2} $= 49.05$ N. *Essa deve essere contrastata dalla tensione del filo, che quindi deve avere la stessa intensità, e ovviamente direzione opposta. Pertanto la tensione vale* $F_T = F_g = 49.05$ N.

Esercizio 9.7. *Una massa* $m = 5$ kg *è appesa a due corde, che formano con la verticale angoli di 80° — come in Fig. 9.6(b). Calcolare la tensione delle corde.*

Risposta. *La forza di gravità,* $F_g = mg = 5$ kg $\cdot$ 9.81 ms^{-2} $= 49.05$ N, *deve essere bilanciata dalla risultante delle due tensioni. Ciascuna di queste può essere scomposta nelle sue componenti orizzontale,* $F_{T,h} = F_T\sin\theta$ *e verticale,*

$F_{T,v} = F_T \cos\theta$, essendo $\theta = 80° = 1.396$ rad. Le componenti orizzontali si bilanciano fra loro, mentre quelle verticali si sommano e contrastano F_g; dunque $F_g = 2F_{T,v} = 2F_T \cos\theta$. Risolvendo, $F_T = \dfrac{F_g}{2\cos\theta} = \dfrac{mg}{2\cos\theta} = 141.0$ N.

Osservazione. *Nonostante le corde siano due, la loro tensione per tenere su la massa di 5 kg è maggiore di quella trovata nel caso di una sola corda. La ragione sta nel grande angolo formato dalle corde con la verticale: buona parte delle tensioni sono disposte orizzontalmente e si contrastano fra loro, mentre le componenti verticali (che servono a sorreggere la massa) sono in proporzione piccole: $F_{T,v} = F_T \cos\theta$. In effetti, quando è possibile, è meglio realizzare una configurazione con un angolo θ più piccolo: questo è quello che fanno gli scalatori quando devono attrezzare una sosta in parete. Viceversa, in altri casi, un grande angolo θ è d'obbligo: si pensi per esempio ad un lampione stradale, sospeso in mezzo da due cavi ancorati a due edifici sui lati opposti della strada: in tal caso i cavi sono quasi orizzontali, cioè θ è molto vicino a $90°$ e la tensione è molto grande. In tal caso il cavo e i suoi ancoraggi devono essere molto robusti.*

Esercizio 9.8. *Su una carrucola, di massa trascurabile, è disposta una corda, ai cui estremi sono ancorate due masse $m_1 = 5$ kg e $m_2 = 6$ kg, il tutto nel campo gravitazionale alla superficie terrestre — vedi Fig. 9.6(c). Calcolare la tensione della corda e l'accelerazione delle masse.*

Risposta. *La tensione della corda F_T è uguale agli estremi, e in entrambi i casi è diretta verso l'alto, per contrastare la forza di gravità. Scegliamo come orientamento convenzionale quello verso il basso, per m_1: quindi per m_2 sceglieremo quello verso l'alto, visto che se m_1 scende, m_2 sale, e viceversa. Su m_1 agisce dunque una forza risultante $F_1 = m_1 g - F_T$. La forza risultante su m_2 è $F_2 = F_T - m_2 g$.*

Le accelerazioni per m_1 e m_2 sono rispettivamente $a_1 = \dfrac{F_1}{m_1} = g - \dfrac{F_T}{m_1}$ e $a_2 = \dfrac{F_2}{m_2} = \dfrac{F_T}{m_2} - g$. D'altronde, essendo il filo inestensibile, gli spostamenti di m_1, m_2 sono identici ($ds_1 = ds_2$) quindi anche le velocità sono identiche: $v_1 = v_2$ in ogni istante. Si deduce che $a_1 = a_2$.

Uguagliando $g - \dfrac{F_T}{m_1} = \dfrac{F_T}{m_2} - g$ si ricava $F_T = 2g\,\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = 53.49$ N.

L'accelerazione quindi è $a_1 = g - \dfrac{F_T}{m_1} = g - 2g\,\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = g\,\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = -0.892$ m/s^2. Ovviamente si ottiene lo stesso risultato partendo da $a_2 = \dfrac{F_2}{m_2} = \dfrac{F_T}{m_2} - g$.

Osservazione: *l'accelerazione è negativa: dunque m_1 accelera verso l'alto (come da aspettarsi, visto che è più leggera di m_2).*

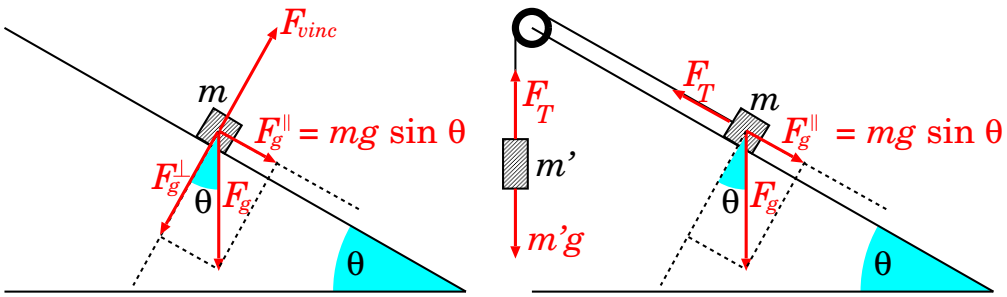


Figura 9.7: *Moto su un piano inclinato*

9.4 Moti su un piano inclinato

Consideriamo un piano molto levigato, inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale, e appoggiato su di esso un oggetto di massa m libero di scivolare sul piano — come in Fig. 9.7 (a sinistra). Le forze in gioco sono due: la forza di gravità, diretta verso il basso, e la reazione del vincolo, ortogonale al piano. Scomponiamo la forza di gravità lungo due direzioni: parallela e ortogonale al piano:

$$F_{g\parallel} = mg \sin\theta \qquad ; \qquad F_{g\perp} = mg \cos\theta$$

La reazione vincolare F_{vinc} deve essere esattamente opposta a $F_{g\perp}$ — altrimenti l'oggetto non starebbe sul piano, ma si solleverebbe o sprofonderebbe in esso. Quindi la forza risultante è parallela al piano e vale esattamente $F_{g\parallel} = mg \sin\theta$.

Questo risultato si può verificare sperimentalmente, collegando l'oggetto sul piano ad un altro, di massa m', mediante un filo. Se l'oggetto di massa m' è appeso in verticale, su di esso tutta la forza di gravità $F'_g = m'g$ è efficace. Analizziamo il sistema così costituito, aiutandoci con la Fig. 9.7 (a destra). Come orientamento positivo scegliamo quello della forza $F_{g\parallel}$ agente su m. Chiamiamo a l'accelerazione, di entrambe le masse m, m' (l'accelerazione è la stessa per le 2 masse, essendo il filo teso e inestensibile). La forza totale F agente su m è costituita da $F_{g\parallel}$ e dalla tensione F_T del filo, che ha direzione opposta:

$$ma = F = mg \sin\theta - F_T$$

La forza totale F' agente su m' è costituita da F'_g (con segno $-$ perché tira in direzione opposta rispetto a $F_{g\parallel}$) e dalla tensione del filo F_T (questa volta con segno $+$ perché tira nella direzione di $F_{g\parallel}$)

$$m'a = F' = -m'g + F_T$$

Sommando le 2 equazioni, F_T (che era ignoto) si cancella e resta

$$(m+m')a = F + F' = g(m\sin\theta - m')$$

quindi:

$$a = \frac{F+F'}{m+m'} = g\frac{m\sin\theta - m'}{m+m'}$$

Scegliendo opportunamente le masse m, m' e/o l'angolo θ si può realizzare una condizione di equilibrio, se $m' = m\sin\theta$.

Volendo, ora si può anche calcolare F_T:

$$F_T = m'(a+g) = \frac{mm'}{m+m'}g(\sin\theta + 1)$$

Esercizio 9.9. *Una rotaia inclinata di lunghezza $\ell = 1.5$ m forma un angolo $\theta = 20°$ con l'orizzontale. Un carrellino scende lungo la rotaia, partendo da fermo dall'estremo più alto: quanto tempo impiega per arrivare all'estremo più basso?*

Risposta. *Sul carrello agiscono la forza di gravità, $F_g = mg$, e la reazione del vincolo $F_{vinc} = mg\cos\theta$. La prima può essere scomposta nelle direzioni perpendicolare e parallela alla rotaia: $F_{g\perp} = mg\cos\theta$ e $F_{g\|} = mg\sin\theta$. F_{vinc} e $F_{g\perp}$ si annullano, resta dunque $F_{g\|}$, diretta lungo la rotaia e verso il basso. Pertanto l'accelerazione del carrello è $a = \frac{F_{g\|}}{m} = g\sin\theta$, indipendente dalla massa m del carrello. Numericamente, $a = 3.36$ ms^{-2}. L'accelerazione è costante, quindi la legge oraria del moto è $x = \frac{1}{2}at^2$; la distanza da percorrere è ℓ, quindi $t = \sqrt{\frac{2\ell}{a}} = 0.946$ s.*

Esercizio 9.10. *Un'automobile di massa $m_0 = 1.5$ ton con a bordo il conducente di massa $m_1 = 80$ kg può frenare con una decelerazione massima $a' = 4$ m/s^2, se la strada è in piano. Qual è la forza sviluppata dall'impianto frenante? Qual è la decelerazione se la strada è in discesa, con una pendenza di 10°? Qual è la massima pendenza possibile della strada, oltre la quale l'auto non riesce più a frenare?*

Risposta. *La massa totale di auto+guidatore è $m' = m_0 + m_1 = 1580$ kg. La forza dell'impianto frenante è $F' = m'a' = 6320$ N.*

Quando l'auto è in discesa, su di essa agisce anche la componente della gravità parallela alla strada: $F_{g\|} = m'g\sin\theta$, quindi l'accelerazione dell'auto è $a = \frac{m'g\sin\theta - F'}{m'}$. Si è scelto come positivo l'orientamento in discesa, cosicché F' ha segno negativo. Sviluppando i calcoli, $a = g\sin\theta - a' = (9.806\text{ m/s}^2)\sin(10°) - 4\text{ m/s}^2 = -2.297\text{ m/s}^2$. È negativa, quindi l'auto effettivamente decelera, ma molto meno che in piano.

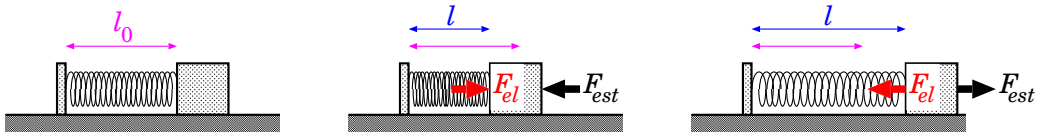


Figura 9.8: *Molla a riposo, in compressione, e in estensione: negli ultimi due casi è indicata la forza elastica F_{est} esercitata dalla molla, e l'eventuale forza esterna F_{est} che la equilibra.*

Quando l'auto non riesce più a frenare, vuol dire che l'accelerazione diventa nulla o positiva, cioè $a = \dfrac{m'g\sin\theta - F'}{m'} \geq 0$. *Questo accade se* $m'g\sin\theta \geq F'$, *cioè* $\sin\theta \geq \dfrac{F'}{m'g} = \dfrac{a'}{g} = 0.4079$, *ovvero* $\theta \geq 0.42$ rad $= 24°$.

9.5 Forze elastiche

Le forze elastiche, in generale, sono forze che tendono ad opporsi a spostamenti da una posizione di equilibrio, in maniera proporzionale agli spostamenti stessi.

L'esempio fisico più semplice per introdurre le forze elastiche è quello di una molla con una massa attaccata.

9.5.1 Forza elastica di una molla

Una molla che viene tirata esercita una forza di richiamo, che tende a riportarla alla sua lunghezza iniziale. Analogamente, se viene compressa esercita una spinta che tende a contrastare la compressione. Più la molla viene deformata, più la sua reazione diventa forte. Molte molle vengono costruite in modo che *la forza di reazione sia proporzionale alla deformazione*: detta ℓ_0 la lunghezza di una molla a riposo (cioè senza forze esterne agenti su di essa) e ℓ la lunghezza attuale, la forza elastica è data da:

$$F_{el} = -k(\ell - \ell_0) \tag{9.3}$$

dove k è la *costante di elasticità* della molla. Il segno $-$ sta ad indicare che ad una compressione ($\ell < \ell_0$) corrisponde una reazione che tende ad allungare ($F_{el} > 0$) , e viceversa, ad un allungamento ($\ell > \ell_0$) corrisponde una reazione che tende ad accorciare ($F_{el} < 0$): in ogni caso la forza elastica è diretta in modo da tentare di ripristinare la lunghezza ℓ_0 — vd Fig. 9.8.

L'Eq. (9.3) è nota come *legge di Hooke*.

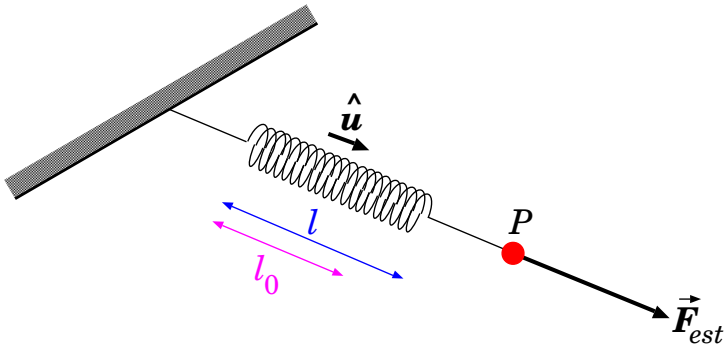


Figura 9.9: *Misura statica di una forza.*

Se si applica alla molla una forza esterna F_{est}, essa modifica la propria lunghezza fino a realizzare una condizione di equilibrio. La nuova lunghezza ℓ_{eq} deve essere tale che la forza elastica F_{el} compensi esattamente la forza esterna F_{est}: $F_{el} + F_{est} = 0$. Ovvero:

$$F_{est} = -F_{el} = +k(\ell_{eq} - \ell_0) \tag{9.4}$$

Se la forza esterna è di trazione ($F_{est} > 0$) si ha un allungamento della molla ($\ell > \ell_0$). Viceversa, una forza di compressione ($F_{est} < 0$) produce un accorciamento ($\ell < \ell_0$). A parità di forza applicata F_{est}, una molla con k elevato si allunga meno di una con k più piccolo: grandi k corrispondono a molle "dure", piccoli k a molle "morbide".

9.5.2 Misure statiche di forze

Una molla, di costante elastica k nota, consente di effettuare misure statiche di forze. Infatti, immaginiamo che un punto materiale P sia sottoposto ad un sistema di forze di risultante $\vec{\boldsymbol{F}}_{tot}$. In generale esso subirà un'accelerazione $\vec{\boldsymbol{a}} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{F}}_{tot}}{m}$. Ora colleghiamo P ad una molla, che metteremo in tensione in modo da mantenere P fermo. La molla subisce un allungamento $\Delta\ell = \ell - \ell_0$, misurabile, ed è mantenuta tesa lungo una direzione che individuiamo con un versore $\hat{\boldsymbol{u}}$ — vd Fig. 9.9. La molla imprime una forza elastica

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{el} = -k\,\Delta\ell\,\hat{\boldsymbol{u}}$$

Siamo in una condizione di equilibrio statico, quindi la risultante delle forze deve essere nulla: $\vec{\boldsymbol{F}}_{tot} + \vec{\boldsymbol{F}}_{el} = 0$. Pertanto il sistema di forze esterne deve avere risultante

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{tot} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{el} = +k\,\Delta\ell\,\hat{\boldsymbol{u}}$$

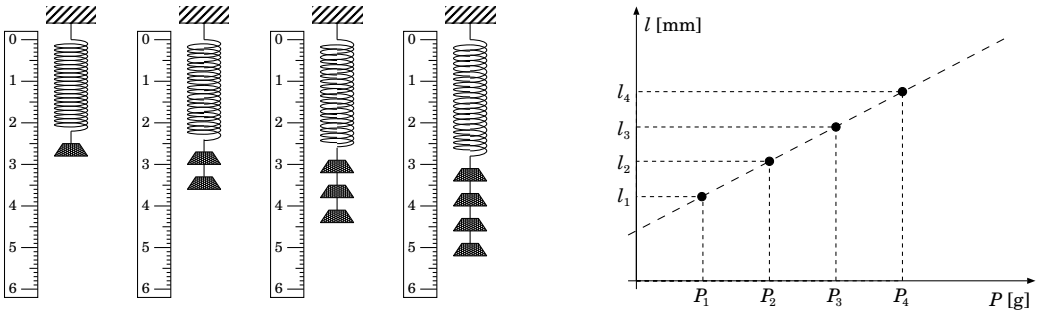


Figura 9.10: *Uso di una molla per misurare le masse.*

ATTENZIONE: va notato che questo sistema funziona solo se nessuna delle forze che contribuiscono a $\vec{F}_{tot}$ ha dipendenze dalla velocità: per esempio, non è applicabile per la misura di forze magnetiche agenti su cariche elettriche, perché queste agiscono solo se le cariche elettriche sono in movimento. Similmente non si può fare per misurare attriti dinamici.

9.5.3 Misure di massa con una molla

Un'applicazione ovvia è quella di usare una molla per misurare delle masse. Una massa m nel campo gravitazionale terrestre è soggetta alla forza-peso $F_g = mg$ ($g = 9.81$ m/s^2). Appendendo dunque una massa m ad una molla con elasticità k, l'Eq. (9.4), applicata per $F_{est} = mg$, predice un allungamento:

$$\Delta\ell = \ell_{eq} - \ell_0 = \frac{g}{k}m \tag{9.5}$$

Quindi una molla può essere usata come bilancia, come in Fig. 9.10.

In effetti, si tratta di una bilancia di ottima precisione, *purché la molla sia davvero elastica*, cioè purché $F_{el} = -k(\ell - \ell_0)$. Per verificare questa condizione si può procedere idealmente nel seguente modo. Si costruiscono diversi oggetti, tutti della stessa massa: l'omogeneità fra essi può essere ottenuta per costruzione, quindi verificata appendendoli uno alla volta alla stessa molla: se non si osservano differenze negli allungamenti ottenuti possiamo affermare che effettivamente le masse siano omogenee. Fatto ciò, si possono appendere n oggetti alla molla e si osserva l'allungamento $\Delta\ell$: se esso è sempre proporzionale al numero di oggetti appesi, possiamo affermare che la molla sia elastica.

Una volta verificata l'elasticità della molla, una qualunque massa m può essere misurata osservando l'allungamento prodotto sulla molla:

$$m = \frac{k}{g} \cdot \Delta\ell \tag{9.6}$$

Naturalmente occorre conoscere k e g, o più semplicemente il loro rapporto $\frac{k}{g}$. Questo può essere dedotto appendendo una massa-campione $\overline{m}$ (per esempio 1 g, o 1 kg, a seconda dell'elasticità della molla) e misurando l'allungamento ottenuto $\overline{\Delta\ell}$. Ovviamente $\frac{k}{g} = \frac{\overline{m}}{\overline{\Delta\ell}}$. Pertanto, per qualunque massa m appesa vale la relazione

$$m = \frac{\overline{m}}{\overline{\Delta\ell}} \cdot \Delta\ell \tag{9.7}$$

9.5.4 Esercizi sulle forze elastiche

Esercizio 9.11. *Un oggetto di massa $m = 15$ kg, nel campo gravitazionale terrestre, è appeso ad una molla, di costante $k = 250$ N/m, sospesa dall'estremo superiore. Un piano d'appoggio orizzontale, situato al di sotto della massa, viene sollevato, fino a toccare la massa e sollevarla di $\Delta h^{(1)} = 10$ cm. Quanto vale la reazione vincolare F_{vinc} del piano? Come cambia, se il sollevamento è di $\Delta h^{(2)} = 70$ cm?*

Risposta. *Sulla massa m agiscono 3 forze: la forza-peso, $F_g = -mg$, diretta verso il basso; la forza elastica, $F_{el} = k\,\Delta\ell$, diretta verso l'alto se la molla è estesa; la reazione vincolare, F_{vinc}, da determinare, che comunque deve essere diretta verso l'alto. La condizione di equilibrio è $F_g + F_{el} + F_{vinc} = 0$.*

Prima che il piano d'appoggio sollevi la massa, non c'è reazione vincolare, $F_{vinc} = 0$. Chiamando $\Delta\ell^{(0)}$ l'allungamento della molla in questo caso, la condizione di equilibrio diventa $-mg + k\Delta\ell^{(0)} = 0$; si deduce l'allungamento della molla, $\Delta\ell^{(0)} = \frac{mg}{k} = 0.588$ m.

Dopo il sollevamento, l'allungamento della molla diventa $\Delta\ell^{(1)} = \Delta\ell^{(0)} - \Delta h^{(1)} = 0.488$ m. Ora la condizione di equilibrio è $-mg + k\Delta\ell^{(1)} + F_{vinc} = 0$, da cui $F_{vinc} = mg - k\Delta\ell^{(1)} = 25$ N. Nota: $F_{vinc} < mg$, poiché parte del peso è sostenuto dalla molla.

Ripetendo il ragionamento per $\Delta h^{(2)} = 70$ cm, si trova $F_{vinc} = 175$ N. In questo caso, $F_{vinc} > mg$. La ragione è che ora la molla è compressa: $\Delta\ell^{(2)} = \Delta\ell^{(0)} - \Delta h^{(2)} = -0.112$ m, pertanto spinge verso il basso. La reazione vincolare deve quindi contrastare sia la forza-peso, che la forza elastica.

Esercizio 9.12. *Su un furgone, inizialmente scarico, viene caricato del materiale per una massa totale $\Delta m = 350$ kg. Alla fine, il fondo del furgone si è abbassato di $\Delta h = 10$ cm. Assumendo che tutto il carico gravi sulle sospensioni posteriori, e che queste siano identiche, quanto vale costante elastica k di ciascuna di queste?*

Risposta. *Chiamiamo ℓ_0 la lunghezza a riposo di ciascuna sospensione. Per una generica compressione $\Delta\ell = \ell - \ell_0$, la forza elastica totale, prodotta da entrambe le sospensioni, vale $F_{el} = -2k\,\Delta\ell$ (controllo sui segni: per una compressione, $\Delta\ell < 0$ e $F_{el} > 0$, diretta verso l'alto). La forza elastica contrasta*

la forza-peso $F_g = -m_{tot}g$*, diretta verso il basso:* $F_g + F_{el} = 0$*, dunque*

$$-2k\,\Delta\ell - m_{tot}g \;=\; 0$$

A furgone scarico, $m_{tot} = m_1$ *pari alla massa (ignota) del furgone, e la compressione delle sospensioni è* $\Delta\ell_1$ *(ignota). A furgone carico* $m_{tot} = m_1 + \Delta m \equiv m_2$*, e la compressione è* $\Delta\ell_2$*. Quindi:*

$$\begin{aligned} 2k\,\Delta\ell_1 &= -m_1 g \\ 2k\,\Delta\ell_2 &= -m_2 g \;=\; -(m_1 + \Delta m)g \end{aligned}$$

Non conosciamo $\Delta\ell_1$*,* $\Delta\ell_2$*,* m_1*, ma conosciamo* $\Delta\ell_1 - \Delta\ell_2 = \Delta h$*. Facendo la differenza fra le 2 equazioni:*

$$\begin{aligned} 2k\,\Delta h &= \Delta m\, g \\ k &= \frac{\Delta m\, g}{2\,\Delta h} \;=\; 17\,160 \text{ N/m} \end{aligned}$$

Esercizio 9.13. *Una corda elastica ha lunghezza a riposo* ℓ_0 *e costante elastica* k*. Un suo estremo viene fissato, all'altro viene attaccata una massa* $m = 130$ g*. La massa viene fatta roteare, su un piano orizzontale liscio, in modo che descriva una traiettoria circolare. Si osserva che se una rotazione completa impiega un tempo* $T_1 = 1$ s *la corda raggiunge una lunghezza* $\ell_1 = 15$ cm*; se invece la rotazione diventa più rapida,* $T_2 = 0.5$ s*, la corda si allunga e diventa* $\ell_2 = 17$ cm*. Quanto valgono* k *e* ℓ_0*?*

Risposta. *La forza elastica, di modulo* $F_{el} = k(\ell - \ell_0)$*, deve provvedere la forza centripeta* $F_n = \omega^2\ell = \left(\frac{2\pi}{T}\right)\ell$*. Quindi, per le due configurazioni, deve valere:*

$$\begin{aligned} k(\ell_1 - \ell_0) &= \frac{4\pi^2}{T_1^2}\ell_1 \\ k(\ell_2 - \ell_0) &= \frac{4\pi^2}{T_2^2}\ell_2 \end{aligned}$$

Si può eliminare ℓ_0 *sottraendo le 2 equazioni:*

$$\begin{aligned} k(\ell_2 - \ell_1) &= 4\pi^2\left(\frac{\ell_2}{T_2^2} - \frac{\ell_1}{T_1^2}\right) \\ k &= \frac{4\pi^2}{\ell_2 - \ell_1}\left(\frac{\ell_2}{T_2^2} - \frac{\ell_1}{T_1^2}\right) \;=\; 1046 \text{ N/m} \end{aligned}$$

Poi dalla 1ª equazione si ricava

$$\ell_0 \;=\; \ell_1\left(1 - \frac{4\pi^2}{k\,T_1^2}\right) \;=\; 14.43 \text{ cm}$$

Esercizio 9.14. *Due masse $m_1 = 150$ g e $m_2 = 80$ g sono posate su una superficie inclinata liscia, formata da due superfici piane collegate, di pendenze diverse: $\theta_1 = 10°$ sotto m_1, e $\theta_2 = 30°$ sotto m_2. m_1 si trova più in alto di m_2. Le due masse sono collegate da una corda elastica che rimane parallela alle superfici. Il sistema scivola in discesa, la lunghezza della corda rimane costante, e si osserva che è allungata di una quantità $\Delta\ell = 5$ mm rispetto alla sua lunghezza a riposo.*

Calcolare l'accelerazione a del sistema e la costante elastica k della corda.

Risposta. *Scegliamo come orientamento positivo quello in discesa. Su ciascuna massa agisce la componente della forza-peso parallela alla superficie, $F^{(i)}_{g,\parallel} = m_i g \sin\theta_i$ $(i = 1, 2)$. Inoltre su m_1 agisce la forza elastica $F_{el} = h\,\Delta\ell > 0$ (positiva perché tira in discesa) e su m_2 agisce la forza elastica $-F_{el}$. Quindi la forza totale su ciascuna massa è:*

$$\begin{aligned} m_1 a &= F^{(1)}_{tot} = m_1 g \sin\theta_1 + F_{el} \\ m_2 a &= F^{(2)}_{tot} = m_2 g \sin\theta_2 - F_{el} \end{aligned}$$

Sommando le 2 equazioni si ottiene subito:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)a &= (m_1 g \sin\theta_1 + m_2 g \sin\theta_2) g \\ a &= \frac{m_1 g \sin\theta_1 + m_2 g \sin\theta_2}{m_1 + m_2} g = 2.816 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Poi dalla 1^a equazione si ricava:

$$\begin{aligned} F_{el} &= m_1(a - g\sin\theta_1) = m_1 g \left(\frac{m_1 g \sin\theta_1 + m_2 g \sin\theta_2}{m_1 + m_2} - \sin\theta_1 \right) \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} k &= \frac{F_{el}}{\Delta\ell} \\ &= \frac{1}{\Delta\ell} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) = 33.39 \text{ N/m} \end{aligned}$$

9.5.5 Modello elastico delle forze vincolari

Abbiamo visto che le reazioni vincolari e le tensioni, introdotte in Sezione 9.2 e Sezione 9.3, sono di tipo *adattivo*, nel senso che il loro modulo non è prefissato, ma si adatta in modo da contrastare le altre forze agenti:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{F}}_{vinc} &= m\vec{\boldsymbol{a}} - \sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i \\ \vec{\boldsymbol{F}}_T &= m\vec{\boldsymbol{a}} - \sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i \end{aligned}$$

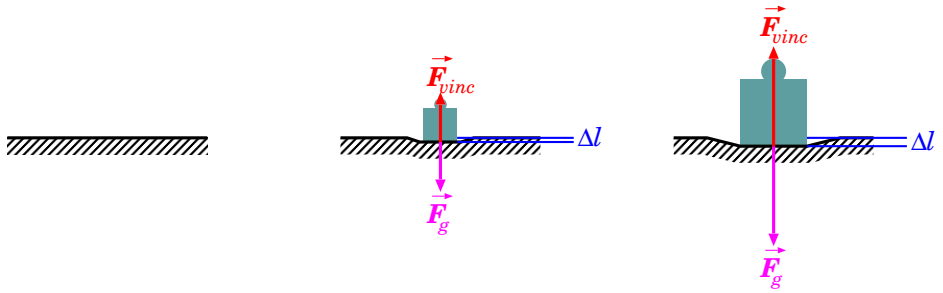


Figura 9.11: *Natura elastica della reazione vincolare.*

Finora abbiamo supposto che il vincolo (superficie nel caso di $\vec{F}_{vinc}$, corda nel caso di $\vec{F}_T$) sia *indeformabile*. Questa è una idealizzazione: in realtà il vincolo subisce una piccola deformazione $\Delta\ell$, in una direzione $\hat{\boldsymbol{u}}$ (la superficie rientra, oppure la corda si allunga), e questa produce una reazione di natura elastica:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{vinc} &= -k\,\Delta\ell\,\hat{\boldsymbol{u}} \\ \vec{F}_T &= -k\,\Delta\ell\,\hat{\boldsymbol{u}} \end{aligned}$$

Quando il sistema di forze $\sum_i \vec{F}_i$ è tale da sforzare maggiormente il vincolo, questo subisce una deformazione $\Delta\ell$ maggiore, e di conseguenza produce una reazione (F_{vinc} oppure F_T) più intensa: questo spiega il carattere adattivo della reazione — vedi Fig. 9.11.

Normalmente tali deformazioni sono molto piccole, spesso trascurabili: ciò significa che la costante elastica k è molto elevata.

9.6 Forze di attrito

Esistono in natura numerose forze, che vengono genericamente chiamate *attriti*, che si manifestano quando un corpo è in contatto con l'ambiente circostante, sia esso formato da superfici solide, o da sostanze liquide o gassose.

Quando l'ambiente circostante è *in quiete*, le *forze di attrito* tendono a:

- trattenere un oggetto, inizialmente fermo, nella sua condizione di quiete, anche se intervengono dall'esterno altre forze che dovrebbero metterlo in movimento — si chiamano *attriti "statici"*, e si manifestano tipicamente nel contatto fra l'oggetto in questione e una superficie di appoggio solida;

- rallentare un oggetto, inizialmente in movimento, fino a farlo fermare, se non intervengono altre forze esterne a mantenerlo in moto — questi sono gli *attriti "dinamici"*, e si manifestano quando l'oggetto esaminato scivola lungo una superficie solida (attrito *radente*), oppure quando si muove in un mezzo liquido o gassoso (attrito *viscoso*).

(Nota: a causa degli attriti, non è così sorprendente che, prima di Galileo, si pensasse che lo "stato naturale" di un oggetto, non sottoposto ad azioni esterne, fosse la quiete, e non il moto rettilineo uniforme!)

Se l'ambiente circostante è in movimento (per esempio una superficie di contatto in moto, oppure un fluido che scorre), gli attriti statici tendono a mantenere l'oggetto in moto alla stessa velocità dell'ambiente, mentre quelli dinamici tendono a uniformare la velocità dell'oggetto con quella dell'ambiente (rallentandolo se va più veloce, o accelerandolo se va troppo lentamente).

In generale, possiamo dire che *gli attriti tendono ad opporsi ad un moto relativo dell'oggetto in esame rispetto all'ambiente che lo circonda.*

Da un punto di vista microscopico, gli attriti sono l'effetto risultante di tutte le interazioni fra gli atomi dell'oggetto e quelli dell'ambiente. Ogni interazione interatomica comporta un trasferimento di quantità di moto, il cui effetto netto è quello osservato sull'oggetto macroscopico. Una descrizione microscopica degli attriti è in generale molto complessa. Viceversa, alcuni casi standard sono descritti bene da leggi empiriche.

Nella trattazione che segue, descriviamo le caratteristiche degli attriti (statico, radente viscoso) in un *ambiente statico.* In Sezione 9.6.4 adatteremo le equazioni al caso di ambiente in movimento.

9.6.1 Attrito statico

L'attrito statico si manifesta quando l'oggetto solido è posto a contatto con una superficie solida (ambiente). Se l'ambiente è fermo, l'attrito statico tende a mantenere l'oggetto fermo anche se su di esso agisce una forza esterna $\vec{\boldsymbol{F}}_{est}$. Ciò significa che la forza di attrito si oppone a quella esterna:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{attr} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{est} \qquad \text{(attrito statico)} \tag{9.8}$$

Consideriamo un oggetto di massa m appoggiato su un piano orizzontale, fermo. Su di esso agiscono la forza-peso $\vec{\boldsymbol{F}}_g = -mg\hat{\boldsymbol{z}}$ e la reazione del vincolo $\vec{\boldsymbol{F}}_{vinc} = +mg\hat{\boldsymbol{z}}$ che si contrastano esattamente. Ora immaginiamo

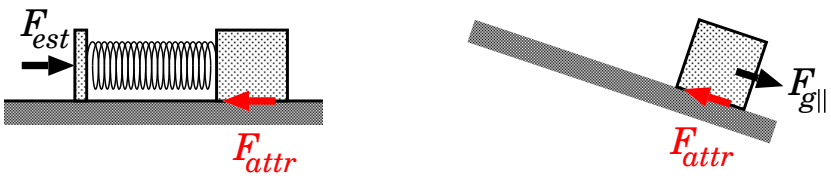


Figura 9.12: *Esempi di attrito statico: a sinistra, la forza esterna F_{est} è applicata attraverso una molla; a destra, è la componente della forza di gravità parallela al piano, $F_{g\|} = mg \sin\theta$.*

di applicare una forza orizzontale esterna F_{est}. Per esempio, possiamo applicarla attraverso una molla, come in Fig. 9.12 (sinistra), in modo che, dalla compressione $\Delta\ell$, possiamo conoscere la forza che stiamo applicando: $F_{est} = k\,\Delta\ell$. Si osserva che, comprimendo la molla pian piano, l'oggetto resta fermo, ma oltre una certa compressione l'oggetto si muove. Evidentemente, la forza di attrito non ha un valore preciso, bensì si adatta per contrastare la forza esterna, ma oltre un certo limite non ce la fa più. Quindi ha un "valore massimo", F_{attr}^{max}:

$$|\vec{\boldsymbol{F}}_{attr}| \leq F_{attr}^{max} \qquad \text{(attrito statico)}$$

Sperimentalmente, si osserva che F_{attr}^{max} è sempre direttamente proporzionale al modulo della reazione vincolare F_{vinc}, pertanto si può scrivere:

$$|\vec{\boldsymbol{F}}_{attr}| \leq F_{attr}^{max} = \mu_s\, F_{vinc} \qquad \text{(attrito statico)} \qquad (9.9)$$

Il coefficiente di proporzionalità, μ_s, si chiama *coefficiente di attrito statico*. È un numero adimensionale, che dipende dai materiali che sono posti a contatto, ma *non* dall'estensione della superficie di contatto.

L'Eq. (9.9) esprime un limite superiore alla forza di attrito statico. Quando l'Eq. (9.9) e l'Eq. (9.8) non possono essere simultaneamente realizzate, non può esserci attrito statico — ovvero l'oggetto si muove.

Se il piano è inclinato, con un angolo θ, come in Fig. 9.12 (destra), la reazione vincolare diventa $F_{vinc} = mg\cos\theta$ (vd Sezione 9.4), pertanto

$$F_{attr} \leq \mu_s\, mg\, \cos\theta \qquad \text{(attrito statico)}$$

mentre la componente parallela al piano della forza di gravità è $F_{g\|} = mg\,\sin\theta$. Siccome $\vec{\boldsymbol{F}}_{attr}$ è sempre diretta opposta a $\vec{\boldsymbol{F}}_{est}$, l'oggetto resta fermo solo se le due forze sono uguali in modulo:

$$\begin{aligned} F_{g\|} &= F_{attr} \\ mg\,\sin\theta &\leq \mu_s\, mg\,\cos\theta \qquad \text{(attrito statico)} \\ \tan\theta &\leq \mu_s \end{aligned}$$

Quindi l'angolo-limite perché l'attrito statico contrasti la forza-peso è tale che

$$\tan\theta_{lim} = \mu_s \qquad \text{(attrito statico)} \tag{9.10}$$

9.6.2 Attrito radente (o dinamico)

L'attrito radente, o dinamico, si ha quando un oggetto in movimento striscia su una superficie solida. Sperimentalmente, la forza di attrito radente ha le seguenti proprietà:

- è indipendente dalla velocità;
- è sempre diretta in direzione opposta allo spostamento;
- dipende dalla natura dei materiali a contatto (l'oggetto che striscia e la superficie su cui striscia) attraverso un *coefficiente di attrito dinamico* μ_d;
- è direttamente proporzionale al modulo della reazione vincolare F_{vinc} prodotta dalla superficie sull'oggetto strisciante.

Queste caratteristiche possono essere espresse da una formula vettoriale:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{attr} = -\mu_d F_{vinc}\,\hat{\boldsymbol{v}} \qquad \text{(attrito radente)} \tag{9.11}$$

dove $\hat{\boldsymbol{v}} \equiv \dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}}{v}$ è il versore che indica la direzione dello spostamento.

Sperimentalmente, fra due oggetti a contatto, si osserva sempre che

$$\mu_d < \mu_s \tag{9.12}$$

Scivolamento in discesa

Calcoliamo il moto di un oggetto di massa m, nel campo gravitazionale terrestre g, che scivola con attrito giù per un piano inclinato ad un angolo θ rispetto all'orizzontale — la situazione è sempre quella della Fig. 9.7 (a sinistra).

Le forze in gioco sono 3: la forza di gravità, la forza del vincolo, e la forza di attrito radente. La reazione vincolare

$$F_{vinc} = F_{g\perp} = mg\,\cos\theta$$

bilancia esattamente la componente della forza di gravità perpendicolare al piano, lasciando la componente parallela

$$F_{g\|} = mg\,\sin\theta$$

Scegliendo convenzionalmente il verso positivo come orientato verso il basso lungo la direzione di massima pendenza del piano, $F_{g\|} > 0$. La forza di attrito vale

$$F_{attr} = -\mu_d F_{vinc} = -\mu_d mg\cos\theta$$

$F_{attr} < 0$ perché è opposta alla direzione del moto. La risultante delle forze è diretta parallelamente al piano, e vale:

$$\begin{aligned} F_{tot} &= F_{g\|} + F_{attr} = mg\,(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) \\ &\quad \text{(scivolamento in discesa con attrito radente)} \end{aligned} \tag{9.13}$$

Si tratta dunque di un moto uniformemente accelerato, con accelerazione

$$\begin{aligned} a &= g\,(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) \\ &\quad \text{(scivolamento in discesa con attrito radente)} \end{aligned} \tag{9.14}$$

Il segno di F_{tot} e di a dipende da $\tan\theta$:

- se $\tan\theta > \mu_s$, il piano è più ripido dell'angolo-limite dell'attrito statico: se l'oggetto era in quiete, si mette in moto spontaneamente; in questo caso, sicuramente $\tan\theta > \mu_d$ [4], quindi $a > 0$ e il moto è accelerato in discesa;
- se $\tan\theta \leq \mu_s$, bisogna innescare il moto con un'azione esterna; in tal caso distinguiamo ulteriormente 3 casi:
  - se $\tan\theta > \mu_d$, il moto è accelerato: $a > 0$; la velocità aumenta man mano che l'oggetto scivola giù per il piano inclinato;
  - se $\tan\theta = \mu_d$, allora $a = 0$ e il moto è a velocità uniforme in discesa lungo il piano inclinato;
  - se $\tan\theta < \mu_d$, il moto è decelerato: $a < 0$; l'oggetto rallenta sempre più fino a fermarsi; l'attrito diventa statico, e l'oggetto resta fermo.

[4] Ricordiamo che $\mu_s > \mu_d$. Anzi, questo esempio ci fa capire che non può essere $\mu_d > \mu_s$. Se lo fosse, potremmo scegliere un angolo θ tale che $\mu_s < \tan\theta < \mu_d$, quindi ci troveremmo nella situazione ASSURDA che l'oggetto si "sblocca" spontaneamente dalla condizione di attrito statico (perché $\tan\theta > \mu_s$), ma essendo $\tan\theta < \mu_d$ avrebbe $a < 0$, cioè sarebbe accelerato in salita!

Scivolamento in salita

Analogamente, immaginiamo che un oggetto di massa m venga lanciato in salita sul piano inclinato e calcoliamo l'accelerazione per lo scivolamento in salita: a causa della gravità e dell'attrito, l'oggetto rallenterà. Possiamo scegliere l'orientamento positivo lungo il moto, cioè in salita. Le forze in gioco sono

$$F_{g\|} = -mg\sin\theta \quad ; \quad F_{attr} = -\mu_d mg\cos\theta$$

entrambe < 0 poiché dirette in discesa. Quindi la forza totale è:

$$\begin{aligned} F_{tot} &= F_{g\|} + F_{attr} = -mg\left(\sin\theta + \mu_d\cos\theta\right) \\ &\quad \text{(scivolamento in salita con attrito radente)} \end{aligned} \tag{9.15}$$

Si tratta dunque di un moto uniformemente accelerato, con accelerazione negativa

$$\begin{aligned} a &= -g\left(\sin\theta + \mu_d\cos\theta\right) \\ &\quad \text{(scivolamento in salita con attrito radente)} \end{aligned} \tag{9.16}$$

La velocità dovrà necessariamente decrescere, finché non si annullerà: a quel punto l'oggetto si arresterà. Anche qui distinguiamo diversi casi, a seconda del valore di $\tan\theta$:

- se $\tan\theta > \mu_s$, l'oggetto non può restare fermo, perché siamo oltre l'angolo limite dell'attrito statico; pertanto l'oggetto riprenderà a scivolare in discesa;
- se $\tan\theta \leq \mu_s$, l'attrito statico entrerà in funzione e l'oggetto resterà fermo.

9.6.3 Attrito viscoso

L'attrito viscoso si manifesta quando un oggetto si muove attraverso un mezzo fluido (cioè liquido o gassoso). In tal caso, empiricamente si osserva che il mezzo oppone una forza frenante al moto, in direzione opposta a questo, che cresce con la velocità $\vec{\boldsymbol{v}}$ di movimento:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{attr} = -\left(\eta v + \eta' v^2\right)\hat{\boldsymbol{v}} \tag{9.17}$$

I coefficienti η, η' si chiamano *coefficienti di attrito viscoso* e dipendono dalla forma dell'oggetto che si muove, dalla sua superficie e dal mezzo fluido in cui

si muove. In generale, per un oggetto affusolato è dominante la componente $-\eta\vec{\boldsymbol{v}}$; la componente $\propto v^2$ entra in gioco per oggetti poco aerodinamici, o in moto veloce.

Un oggetto che cade all'interno di un fluido, nel campo gravitazionale terrestre, è soggetto a due forze:

- la forza gravitazionale, $F_g = mg$;
- la forza di attrito viscoso, $F_{attr} = -\eta v - \eta' v^2$

(abbiamo scelto per convenzione il verso positivo diretto verso il basso). La forza totale agente è quindi:

$$F_{tot} \;=\; F_g + F_{attr} \;=\; mg - \eta v - \eta' v^2$$

Anche senza integrare il moto, possiamo farci un'idea qualitativa di ciò che succede. Quando la velocità è piccola, la forza di gravità è dominante e l'accelerazione è $a \simeq g$, verso il basso. Man mano che la velocità aumenta, la forza di attrito cresce sempre più, fino a diventare pari alla forza di gravità: a questo punto la risultante delle forze è nulla e la velocità si mantiene costante. Per trovare la velocità-limite v_{lim}, basta porre $F_{tot} = 0$, ovvero $\eta' v^2 + \eta v - mg = 0$. Questa è un'equazione di 2° grado che ammette due soluzioni: $v_{lim} = \dfrac{-\eta \pm \sqrt{\eta^2 + 4mg\eta'}}{2\eta'}$. Scartando la soluzione negativa, che non ha significato fisico, otteniamo:

$$v_{lim} = \frac{-\eta + \sqrt{\eta^2 + 4mg\eta'}}{2\eta'} \simeq \begin{cases} \sqrt{\dfrac{mg}{\eta'}} & \text{(per } \eta v \text{ trascurabile)} \\[2ex] \dfrac{mg}{\eta} & \text{(per } \eta' v^2 \text{ trascurabile)} \end{cases} \tag{9.18}$$

Caduta di una goccia di pioggia in aria

Studiamo il moto di una goccia di pioggia, che cade verticalmente nell'aria. Le forze in gioco sono: la gravità, $F_g = mg$, e l'attrito viscoso, $F_{attr} = -\eta v$. Normalmente la velocità v è tale che la componente $-\eta' v^2$ della forza di attrito è trascurabile. Il problema è unidimensionale, e in questo caso è comodo scegliere come positivo l'orientamento verso il basso. L'equazione del moto è:

$$\frac{dv}{dt} \equiv a \;=\; \frac{F_g + F_{attr}}{m} \;=\; g - \frac{\eta}{m} v \;=\; g - \beta v$$

essendo $\beta \equiv \dfrac{\eta}{m}$. *Questa equazione si risolve con il metodo della "separazione delle variabili", ovvero si isolano le due variabili (*v *e* t*) dalle parti opposte del segno =:*

$$\frac{dv}{g-\beta v} = dt$$

Si ottiene un'uguaglianza fra due forme differenziali, che va integrata fra estremi opportuni. Conviene rinominare le variabili di integrazione: $t \to t'$ *e* $v \to v'$. *L'intervallo temporale è* $0 < t' < t$, *mentre per le velocità* $v(t=0) = 0$, *quindi l'intervallo è* $0 < v' < v \equiv v(t)$. *Quindi otteniamo:*

$$\int_0^t dt' = \int_0^v \frac{dv'}{g-\beta v'}$$

Notiamo che il membro destro assomiglia a $\dfrac{1}{v'}$, *che avrebbe come funzione primitiva* $\ln v'$. *In effetti, una primitiva di* $\dfrac{1}{g-\beta v'}$ *è* $-\dfrac{1}{\beta}\ln(g-\beta v')$. *Quindi l'equazione integrale diventa:*

$$\begin{aligned}
t &= \left[-\frac{1}{\beta}\ln(g-\beta v')\right]_0^v \\
&= -\frac{1}{\beta}\left[\ln(g-\beta v) - \ln(g)\right] = -\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{g-\beta v}{g}\right) \\
\mathrm{e}^{-\beta t} &= \frac{g-\beta v}{g} = 1 - \frac{\beta}{g}v \\
v \equiv v(t) &= \frac{g}{\beta}\left(1-\mathrm{e}^{-\beta t}\right) \\
&= \frac{mg}{\eta}\left(1-\mathrm{e}^{-\beta t}\right)
\end{aligned}$$

Si noti che, per $t \to +\infty$, *si raggiunge la velocità-limite, come aspettato:* $v(t) \to \dfrac{mg}{\eta} \equiv v_{lim}$.

La distanza $s(t)$, *percorsa dalla goccia, si trova con una ulteriore integrazione:*

$$\begin{aligned}
s(t) &= \int_0^t v(t') = \frac{mg}{\eta}\left\{t + \left[\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta t'}\right]_{t'=0}^{t'=t}\right\} \\
&= \frac{mg}{\eta}\left(t + \frac{\mathrm{e}^{-\beta t}-1}{\beta}\right)
\end{aligned}$$

Bonus (*): com'è il moto della goccia, all'inizio, quando v *è ancora molto piccola, e quindi l'attrito è trascurabile rispetto alla gravità? Ci si aspetterebbe* $v(t) \simeq gt$ *e* $s(t) \simeq \dfrac{gt^2}{2}$, *giusto? Provate a verificare che le*

equazioni trovate descrivono questo comportamento. Utilizzate l'approssimazione $\mathrm{e}^{-\beta t} \simeq 1 - \beta t + \dfrac{\beta^2 t^2}{2} + \ldots$ *valida per piccoli valori di* t.

Moto di un proiettile in aria

Abbiamo già trattato il moto di un proiettile nel campo gravitazionale, trascurando gli attriti – vd Sezione 7.5.4. Ora studiamo il moto, in presenza di un attrito viscoso $\vec{\boldsymbol{F}}_{attr} = -\eta\vec{\boldsymbol{v}}$. *Le forze in gioco sono:*

$$\begin{aligned} F_x &= -\eta v_x \\ F_z &= -\eta v_z - mg \end{aligned}$$

Quindi si possono risolvere i moti lungo x *e* z *separatamente. Conviene introdurre le quantità* $\beta = \dfrac{\eta}{m}$ *e* $\alpha = \dfrac{g}{\beta}$. *Lungo* x*:*

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\beta v_x \\ \frac{dv_x}{v_x} &= -\beta dt \\ \int_{v_{x0}}^{v_x} \frac{dv'_x}{v'_x} &= -\beta \int_0^t dt' \\ \ln\left(\frac{v_x}{v_{x0}}\right) &= -\beta t \\ v_x &= v_{x0}\mathrm{e}^{-\beta t} \end{aligned}$$

In modo appena più complicato, si risolve per z*:*

$$\begin{aligned} \frac{dv_z}{dt} &= -\beta v_z - \frac{g}{m} = -\beta(v_z + \alpha) \\ \frac{dv_z}{v_z + \alpha} &= -\beta dt \\ \int_{v_{z0}}^{v_z} \frac{dv'_z}{v'_z + \alpha} &= -\beta \int_0^t dt' \\ \ln\left(\frac{v_z + \alpha}{v_{z0} + \alpha}\right) &= -\beta t \\ v_z &= (v_{z0} + \alpha)\,\mathrm{e}^{-\beta t} - \alpha \end{aligned}$$

Le coordinate spaziali si integrano dalle velocità:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^t v_x(t')dt' = x_0 + \frac{v_{x0}}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta t}\right) \\ z(t) &= z_0 + \int_0^t v_z(t')dt' = z_0 + \frac{v_{z0} + \alpha}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta t}\right) - \alpha t \end{aligned}$$

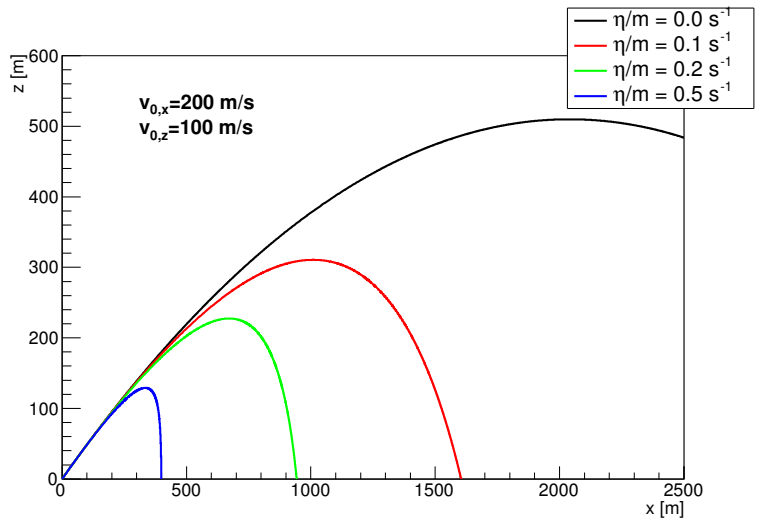


Figura 9.13: *Traiettoria di un proiettili, per diversi valori dell'attrito viscoso.*

Il risultato è mostrato in Fig. 9.13, per diversi valori di η. Come si nota, al crescere di η, la componente orizzontale del moto è sempre più frenata: l'effetto è che la traiettoria si discosta sempre più dalla parabola, mostrando una caduta sempre più verticale dopo l'apice. Analogamente, anche la componente verticale subisce un frenamento, che si manifesta nella diminuzione dell'altezza massima raggiunta.

9.6.4 Attriti in ambiente non statico

Tutto quanto detto può essere esteso al caso di ambiente in movimento.

L'*attrito statico* tende a mantenere l'oggetto "fermo rispetto all'ambiente". Se l'ambiente si muove, con accelerazione $\vec{\boldsymbol{a}}_{amb}$, anche l'oggetto deve avere la stessa accelerazione; pertanto, la risultante delle forze su di esso, $\vec{\boldsymbol{F}}_{est}$ e $\vec{\boldsymbol{F}}_{attr}$, deve essere tale che

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{attr} + \vec{\boldsymbol{F}}_{est} = m\vec{\boldsymbol{a}}_{amb} \qquad \text{(attrito statico)} \tag{9.19}$$

Vale comunque il limite superiore per la forza di attrito:

$$|\vec{\boldsymbol{F}}_{attr}| \leq \mu_s \, F_{vinc}$$

Un esempio: se l'oggetto è premuto contro una superficie in moto, la quale reagisce con una reazione vincolare F_{vinc}, la forza di attrito riesce a

trascinare l'oggetto in modo solidale con l'ambiente solo se l'accelerazione dell'ambiente è $|\vec{\boldsymbol{a}}_{amb}| \leq \mu_s \dfrac{F_{vinc}}{m}$.

L'*attrito dinamico radente* tende ad uniformare la velocità $\vec{\boldsymbol{v}}$ dell'oggetto alla velocità $\vec{\boldsymbol{v}}_{amb}$ dell'ambiente. È utile introdurre quindi la *velocità relativa*

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{rel} = \vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{v}}_{amb}$$

dell'oggetto rispetto all'ambiente, e il suo versore $\hat{\boldsymbol{v}}_{rel} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}_{rel}}{v_{rel}}$. Allora, l'Eq. (9.11) si modifica in:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{attr} = -\mu_d F_{vinc}\, \hat{\boldsymbol{v}}_{rel} \qquad \text{(attrito radente)} \tag{9.20}$$

Anche per l'attrito viscoso, si può modificare l'Eq. (9.17) in:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{attr} = -\left(\eta v_{rel} + \eta' v_{rel}^2\right) \hat{\boldsymbol{v}}_{rel} \qquad \text{(attrito viscoso)} \tag{9.21}$$

9.6.5 Esercizi sugli attriti

Esercizio 9.15. *Un oggetto viene appoggiato su un piano, inizialmente orizzontale; questo viene poi inclinato lentamente, fino al punto che l'oggetto comincia a scivolare. L'angolo-limite, sotto il quale non c'è scivolamento, è* $\theta_{lim} = 35°$. *A questo angolo, l'accelerazione osservata è* $a = 0.15$ m/s^2. *Quanto valgono i coefficienti di attrito statico e dinamico?*

Risposta. *Il coefficiente di attrito statico si ricava da* $\mu_s = \tan\theta_{lim} = \tan(35°) = 0.7$. *L'accelerazione è* $a = \dfrac{F_{tot}}{m} = g\,(\sin\theta - \mu_d \cos\theta)$, *pertanto* $\mu_d = \dfrac{g\sin\theta - a}{g\cos\theta}$, *quindi per* $\theta = \theta_{lim}$ *e* a *dato, si trova* $\mu_d = 0.68$.

Commento. *Si noti che tutti questi risultati sono indipendenti dalla massa dell'oggetto. La ragione è che sia la forza di gravità che la forza di attrito radente sono proporzionali a* m.

Esercizio 9.16. *Un oggetto è appoggiato su una piattaforma rotante orizzontale, che compie una rotazione completa in* $T = 5$ s. *La distanza dell'oggetto dall'asse di rotazione è* ρ: *si osserva che l'oggetto è solidale con la piattaforma fino a* $\rho^{max} = 50$ cm: *a distanze più grandi scivola via. Qual è il coefficiente di attrito statico,* μ_s?

Risposta. *L'oggetto è trascinato nella rotazione della piattaforma dalla forza di attrito statico, che produce la forza centripeta, pertanto, uguagliando i moduli,*

$m\omega^2\rho = F_{as}$, con $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Sappiamo poi che $F_{as} \leq \mu_s F_{vinc}$, e che su un piano orizzontale $F_{vinc} = mg$. Quindi:

$$\begin{aligned} m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \rho &= F_{as} \leq \mu_s mg \\ \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \rho^{max} &= \mu_s g \\ \mu_s &= \frac{4\pi^2 \rho^{max}}{T^2\, g} = 0.0805 \end{aligned}$$

Esercizio 9.17. *Un'auto è dotata di pneumatici che hanno, sull'asfalto asciutto, coefficienti di attrito statico e dinamico $\mu_s = 0.9$ e $\mu_d = 0.8$. Supponendo che il motore dell'auto sia estremamente potente:*

(a) *qual è la massima accelerazione possibile per l'auto, su una strada orizzontale?*

(b) *come si modifica la risposta, se le ruote perdono aderenza?*

(c) *qual è la massima pendenza affrontabile in salita?*

(d) *qual è la massima pendenza affrontabile in discesa?*

Risposta. *La forza che accelera l'auto viene dall'attrito fra pneumatici e strada. In generale, $|F_{as}| \leq \mu_s F_{vinc}$ e $|F_{ad}| = \mu_d F_{vinc}$. Poiché $\mu_s > \mu_d$, è evidente che la forza può raggiungere valori maggiori quando c'è aderenza dei pneumatici.*

In accelerazione, solo le ruote motrici entrano. Supponendo che l'auto abbia trazione su 2 delle 4 ruote, e che il peso sia uniformemente distribuito fra avantreno e retrotreno, per una strada orizzontale $F_{vinc}^{2ruote} = \dfrac{mg}{2}$. Invece in frenata tutte le ruote agiscono, quindi $F_{vinc}^{4ruote} = mg$.

(a) *L'accelerazione massima, con 2 ruote motrici in aderenza, è:*

$$\begin{aligned} a^{max} &= \frac{F_{as}^{max}}{m} = \frac{\mu_s F_{vinc}^{2ruote}}{2} \\ &= \frac{\mu_s g}{2} = 4.41 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

(b) *L'accelerazione, con ruote non in aderenza, è:*

$$\begin{aligned} a &= \frac{F_{ad}}{m} = \frac{\mu_d F_{vinc}^{2ruote}}{2} \\ &= \frac{\mu_d g}{2} = 3.92 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

(da cui si vede che è più vantaggioso non "sgommare" — e non solo per il conto del gommista!)

(c) *In una salita di pendenza* θ, $F_{vinc}^{2ruote} = \dfrac{mg\cos\theta}{2}$, *mentre (orientando il verso positivo in salita)* $F_{g\|} = -mg\sin\theta$, $0 < F_{as} \leq \mu_s F_{vinc}^{2ruote}$ *e* $F_{ad} = \mu_d F_{vinc}^{2ruote}$. *Nuovamente* $F_{as}^{max} > F_{ad}$, *quindi ragioniamo con l'attrito statico. Per la massima pendenza* $F_{as}^{max} + F_{g\|} = 0$, *ovvero:*

$$\begin{aligned} \mu_s \frac{mg\cos\theta}{2} &= mg\sin\theta \\ \tan\theta^{max} &= \frac{\mu_s}{2} \\ \theta^{max} &= \tan^{-1}\left(\frac{\mu_s}{2}\right) = 0.42 \text{ rad} = 24^\circ \end{aligned}$$

Attenzione però: se le ruote perdessero aderenza anche solo per un attimo, entrerebbe in gioco l'attrito dinamico, più basso, per il quale otterremmo

$$\theta^{max} = \tan^{-1}\left(\frac{\mu_d}{2}\right) = 0.38 \text{ rad} = 23^\circ$$

Osservazione*: per il punto* **(c)** *abbiamo mantenuto l'ipotesi che il peso sia ugualmente distribuito sui due assi dell'auto, la qual cosa in salita non è precisamente vera, perché il peso tende a sbilanciarsi più sull'asse posteriore. Se l'auto ha trazione anteriore, è quindi svantaggiata.*

Altra osservazione*: se l'auto avesse 4 ruote motrici, sarebbe avvantaggiata: i valori di* a^{max} *e* $\tan\theta^{max}$ *raddoppierebbero.*

(d) *La forza-peso lungo la pendenza è* $F_{g,\|} = mg\sin\theta$, *la forza vincolare è* $F_{vinc} = mg\cos\theta$. *Per scendere a velocità costante deve essere* $F_{g,\|} = F_{as} \leq \mu_s F_{vinc}$, *quindi* $mg\sin\theta \leq \mu_s mg\cos\theta$; *la massima pendenza è:*

$$\theta^{max} = \tan^{-1}(\mu_s) = 0.73 \text{ rad} = 42^\circ$$

Se solo per un attimo le ruote perdono aderenza, entra in funzione l'attrito dinamico, che è inferiore: a questo punto l'auto accelera in discesa con accelerazione $a = \dfrac{g\sin\theta^{max} - F_{ad}}{m} = g\cos\theta^{max}(\tan\theta^{max} - \mu_d) = g\cos\theta^{max}(\mu_s - \mu_d)$, *e non la fermate più! Quindi meglio considerare un più prudente:*

$$\theta^{max} = \tan^{-1}(\mu_d) = 0.67 \text{ rad} = 39^\circ$$

ATTENZIONE! *Questi calcoli sono comunque molto ottimistici. Infatti si assume che la forza dei freni sia illimitata, che le gomme siano nuove, che l'asfalto sia perfetto, senza sassolini, e che l'auto possa scendere a velocità costante, ovvero senza la necessità di rallentare fino in fondo alla discesa. Non sto consigliando a nessuno di affrontare in auto una lunga discesa a* 39° *di pendenza!* **Anzi, confido che nessuno sia così scriteriato da provarci!**

Per dare un'idea: le strade asfaltate più ripide del mondo hanno pendenze intorno al "35%": questa percentuale esprime $\sin\theta$*, quindi stiamo parlando di* $\theta \simeq 20°$

Esercizio 9.18. *Uno scatolone pesante, di massa complessiva* $m = 35$ kg*, è appoggiato sul pavimento. I coefficienti di attrito statico e dinamico sono rispettivamente* $\mu_s = 0.3$ *e* $\mu_s = 0.25$*. Lo scatolone viene tirato con una corda che forma un angolo* θ *rispetto al pavimento. La tensione applicata alla corda è* F_T*.*

Qual è il valore minimo, F_T^{min}*, che va applicato alla corda per smuovere lo scatolone, e a quale angolo ottimale* θ^{opt} *lo si realizza?*

Risposta. *Sullo scatolone agiscono la forza-peso* $\vec{\boldsymbol{F}}_g = -mg\hat{\boldsymbol{z}}$*, la forza vincolare* $\vec{\boldsymbol{F}}_{vinc} = F_{vinc}\hat{\boldsymbol{z}}$*, la tensione* $\vec{\boldsymbol{F}}_T$*, e l'attrito* $\vec{\boldsymbol{F}}_{attr} = F_{attr}\hat{\boldsymbol{x}}$*. Separando per componenti verticale e orizzontale abbiamo:*

$$\begin{aligned} F_{tot,z} &= -mg + F_{vinc} + F_T \sin\theta \\ F_{tot,x} &= F_T \cos\theta + F_{attr} \end{aligned}$$

Sia che lo scatolone sia fermo, sia che si muova sul pavimento, non c'è accelerazione verticale, per cui $F_{tot,z} = 0$*. Dalla 1ª equazione si deduce:*

$$F_{vinc} = mg - F_T \sin\theta$$

Finché lo scatolone è fermo, l'attrito è statico, e l'accelerazione è nulla, quindi

$$F_{as} = -F_T \cos\theta \qquad ; \qquad |F_{as}| \leq \mu_s F_{vinc} = \mu_s(mg - F_T \sin\theta)$$

Per smuovere lo scatolone occorre che $F_{tot,x} > 0$*, cioè* $F_T \cos\theta > -F_{as}$ *(ricordiamo che* $F_{as} < 0$*, quindi* $-F_{as} > 0$*). All'aumentare di* F_T*,* F_{as}*, che è adattiva, aumenta in modulo per mantenere la condizione* $F_{as} + F_T \cos\theta = 0$*, ma ad un certo punto raggiunge il suo valore limite* $F_{as}^{lim} = -\mu_s(mg - F_T \sin\theta)$*. Lo scatolone si smuove quindi se* $F_T \cos\theta > \mu_s(mg - F_T \sin\theta)$*. Il valore minimo di* F_T *è quindi tale che:*

$$\begin{aligned} F_T^{min} \cos\theta &= \mu_s(mg - F_T^{min} \sin\theta) \\ F_T^{min} &= \frac{\mu_s mg}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta} \end{aligned}$$

Il valore minimo di F_T *si ottiene per* θ *tale da massimizzare la funzione* $f(\theta) = \cos\theta + \mu_s \sin\theta$*. Ponendo a zero la derivata prima,* $0 = \dfrac{df(\theta)}{d\theta} = -\sin\theta + \mu_s \cos\theta$ *si ottiene l'estremale per* $\tan\theta = \mu_s$*. Poiché* $\dfrac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} = -(\cos\theta + \mu_s \sin\theta) < 0 \ \forall\theta$ *(nell'intervallo* $\theta \in [0; \pi/2]$*) l'estremale trovato è effettivamente un massimo di* $f(\theta)$*.*

Poi [5],

$$\begin{aligned} F_T^{min} &= \frac{\mu_s mg}{\cos\theta^{opt} + \mu_s \sin\theta^{opt}} \\ &= \frac{\mu_s}{\cos\theta^{opt}(1+\mu_s\tan\theta^{opt})} mg \\ &= \frac{\mu_s\sqrt{1+\mu_s^2}}{1+\mu_s^2} mg \;=\; \frac{\mu_s}{\sqrt{1+\mu_s^2}} mg \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \theta^{opt} &= \tan^{-1}(\mu_s) \;=\; 0.29 \text{ rad} \;=\; 16.7^\circ \\ F_T^{min} &= \frac{\mu_s}{\sqrt{1+\mu_s^2}} mg \;=\; 98.6 \text{ N} \end{aligned}$$

Esercizio 9.19. *Un paracadutista di massa $m_1 = 65$ kg indossa un paracadute di massa $m_0 = 8$ kg (compreso zaino e tutto); dopo aver aperto il paracadute, si stabilizza ad una velocità di discesa di $v_1 = 15$ km/h. Con che velocità scenderebbe un suo collega di massa $m_2 = 90$ kg, usando un modello di paracadute identico? Per risolvere l'esercizio occorre sapere che in questo caso l'attrito viscoso è proporzionale al quadrato della velocità.*

Risposta. *Facciamo uso direttamente dell'equazione della velocità-limite, Eq. (9.18). Per il primo paracadutista $v_1 = \sqrt{\frac{(m_0+m_1)g}{\eta'}}$, da cui potremmo ricavare η'. In realtà possiamo procedere evitando questo calcolo: scriviamo l'equazione per il secondo paracadutista, $v_2 = \sqrt{\frac{(m_0+m_2)g}{\eta'}}$, e dividiamole: $\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{(m_0+m_2)}{(m_0+m_1)}} = \sqrt{\frac{(90+8)\text{ kg}}{(65+8)\text{ kg}}} = 1.159$. Abbiamo supposto la stessa η', poiché i paracaduti sono identici. In conclusione: $v_2 = v_1 \cdot 1.159 = 17.4$ km/h.*

9.7 Esercizi sulle forze macroscopiche

Qui vediamo alcuni esempi di problemi in cui più oggetti subiscono forze esterne e forze mutue. In tutti i casi occorre fare l'"appello" di tutte le forze che agiscono su ciascun oggetto e poi applicare la 2^a legge della dinamica a ciascun oggetto:

$$m_i \vec{\boldsymbol{a}}_i \;=\; \vec{\boldsymbol{F}}_{tot}^{(i)}$$

[5] Ricorda che $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$.

Risolvere il problema significa determinare tutte le accelerazioni.

Per le forze mutue, possiamo indicare con $\vec{\boldsymbol{F}}^{(ij)}_{descr}$ una forza prodotta sull'oggetto (i) dall'oggetto (j), essendo *descr* un descrittore della natura della forza (per esempio forza vincolare, tensione, attrito, ...); ricordiamo che vale sempre la 3ª legge della dinamica:

$$\vec{\boldsymbol{F}}^{(ij)}_{descr} = -\vec{\boldsymbol{F}}^{(ji)}_{descr}$$

Per le forze esterne sull'oggetto (i) usiamo una notazione $\vec{\boldsymbol{F}}^{(i)}_{descr}$ — qui *descr* può indicare, per esempio, la forza-peso, o qualunque altra azione esterna.

Ricordiamo che alcune forze sono "adattive", nel senso che la loro intensità non è data a priori, ma si adatta per realizzare una particolare condizione: è il caso delle forze vincolari, delle tensioni, degli attriti statici. In tal caso i loro valori fanno parte delle incognite; d'altronde, proprio in questi casi, abbiamo oggetti a contatto fra loro, cosicché le loro accelerazioni non sono indipendenti, e questo abbassa il numero di incognite del problema. Per esempio:

- in caso di attrito statico fra 2 oggetti, le loro accelerazioni sono identiche: $\vec{\boldsymbol{a}}_i = \vec{\boldsymbol{a}}_j$;
- in caso di scivolamento fra superfici piane, le componenti delle accelerazioni ortogonali alla superficie sono identiche: $a_i^{\perp} = a_j^{\perp}$;
- in caso di tensione agente fra 2 oggetti, le componenti delle accelerazioni lungo la direzione della tensione sono identiche: $a_i^{\parallel} = a_j^{\parallel}$;

Infine ricordiamo alcune proprietà delle corde ideali e delle carrucole ideali:

- una carrucola ideale ha massa e attrito trascurabili;
- una corda ideale ha massa trascurabile;
- la tensione lungo una corda ideale ha modulo costante in tutti i suoi punti;
- l'effetto di una carrucola ideale su una corda ideale è di modificare la direzione della tensione, senza alterarne il modulo, a prescindere dal moto della corda o della stessa carrucola.

Osservazione: oggetti non puntiformi!

Nei problemi che seguiranno, gli oggetti non sono necessariamente puntiformi... Eppure verranno trattati come tali. Qui occorre anticipare alcuni concetti, anche intuitivi, che diverranno più chiari solo quando si affronterà il "corpo rigido" (Capitolo **??***).*

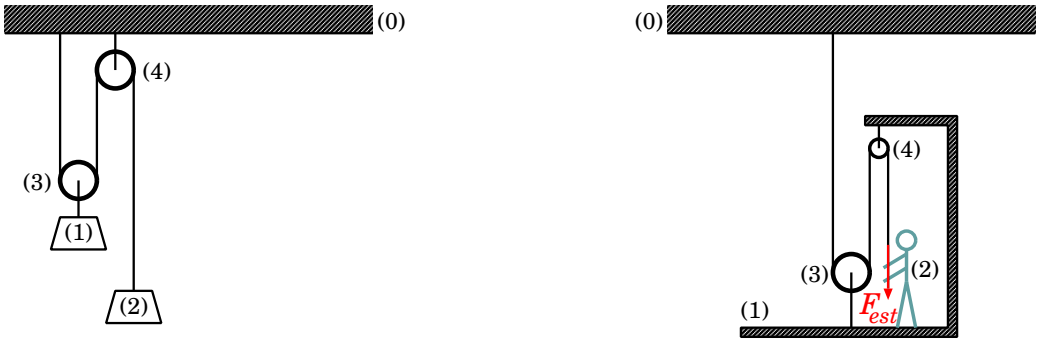


Figura 9.14: *Schemi per gli esercizi sulle carrucole.*

- *Un oggetto rigido esteso è idealmente formato da tante parti più piccole, al limite puntiformi: se il moto dell'oggetto è puramente traslatorio (cioè senza rotazioni) tutti i suoi punti materiali hanno la stessa velocità, e quindi la stessa accelerazione: queste verranno semplicemente chiamate velocità e accelerazione dell'oggetto esteso.*

- *Una forza applicata ad un punto di un oggetto esteso rigido va considerata come applicata a tutto l'oggetto; l'effetto, per l'accelerazione, è come se l'oggetto fosse puntiforme.*

- *Le forze mutue fra due oggetti estesi soddisfano la "prima parte" della legge di azione-reazione,* $\vec{\boldsymbol{F}}^{(ij)} = -\vec{\boldsymbol{F}}^{(ji)}$*; sulla "seconda parte", ovvero la linea di azione, non si può dire granché, visto che due oggetti estesi non hanno una linea congiungente ben definita.*

Esercizio 9.20. *Due oggetti* (1) *e* (2) *di masse* m_1, m_2 *sono appesi a un sistema di carrucole ideali* (3), (4) *mediante una corda ideale ancorata al soffitto, come in Fig. 9.14 (sinistra). Calcolare le accelerazioni* a_1, a_2 *dei due oggetti. Quale relazione ci deve essere fra* m_1 *e* m_2*, per mantenere in equilibrio il sistema?*

Soluzione. *Il sistema è composto da 4 oggetti: per ciascuno di questi occorre calcolare tutte le forze in gioco. Poiché tutte le forze sono verticali, le scriviamo in forma non vettoriale, scegliendo positivo l'orientamento verso l'alto. Chiamiamo* (0) *il soffitto. Pertanto:*

oggetto	*simbolo*	*descrizione*
(1)	$F_g^{(1)} = -m_1 g$	*forza peso*
	$F_{vinc}^{(13)}$	*forza vincolare*
(2)	$F_g^{(2)} = -m_2 g$	*forza peso*
	$F_T^{(24)}$	*tensione*
(3)	$F_{vinc}^{(31)}$	*forza vincolare*
	$F_T^{(30)}$	*tensione*
	$F_T^{(34)}$	*tensione*
(4)	$F_{vinc}^{(40)}$	*forza vincolare*
	$F_T^{(43)}$	*tensione*
	$F_T^{(42)}$	*tensione*

Ora scriviamo $F_{tot} = ma$ per ciascun oggetto, ricordando che le carrucole ideali hanno massa trascurabile:

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= F_{tot}^{(1)} &= -m_1 g + F_{vinc}^{(13)} \\ m_2 a_2 &= F_{tot}^{(2)} &= -m_2 g + F_T^{(24)} \\ 0 = m_3 a_3 &= F_{tot}^{(3)} &= F_{vinc}^{(31)} + F_T^{(30)} + F_T^{(34)} \\ 0 = m_4 a_4 &= F_{tot}^{(4)} &= F_{vinc}^{(40)} + F_T^{(43)} + F_T^{(42)} \end{aligned}$$

Abbiamo 4 equazioni. Contiamo le incognite: a_1, a_2, $F_{vinc}^{(13)}$, $F_T^{(24)}$, $F_{vinc}^{(31)}$, $F_T^{(30)}$, $F_T^{(34)}$, $F_{vinc}^{(40)}$, $F_T^{(43)}$, $F_T^{(42)}$, quindi 10 incognite! Però, per la legge di azione-reazione, $F_{vinc}^{(13)} = -F_{vinc}^{(31)}$; inoltre, per corde ideali su carrucole ideali, le tensioni sono tutte uguali in modulo, pertanto

$$F_T^{(30)} = F_T^{(34)} = -F_T^{(43)} = -F_T^{(42)} = F_T^{(24)} = F_T$$

Il sistema diventa quindi:

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= F_{tot}^{(1)} &= -m_1 g + F_{vinc}^{(13)} \\ m_2 a_2 &= F_{tot}^{(2)} &= -m_2 g + F_T \\ 0 = m_3 a_3 &= F_{tot}^{(3)} &= -F_{vinc}^{(13)} + 2\,F_T \\ 0 = m_4 a_4 &= F_{tot}^{(4)} &= F_{vinc}^{(40)} - 2\,F_T \end{aligned}$$

Ora le incognite sono: a_1, a_2, $F_{vinc}^{(13)}$, F_T, $F_{vinc}^{(40)}$, ovvero 5. Meglio, ma non basta! In realtà a_1, a_2 non sono indipendenti, a causa della corda inestensibile. Se (1) *compie uno spostamento ds_1 (per esempio verso l'alto), anche la carrucola* (3) *compie lo stesso spostamento, quindi ciascuno dei tratti di corda — quello fra* (3) *e il soffitto, e quello fra* (3) *e* (4)*, si accorciano di ds_1, ovvero la corda si allunga di $2\,ds_1$ oltre la carrucola* (4)*: questo produce un abbassamento di* (2) *pari*

a $ds_2 = -2ds_1$. *Dividendo per il tempo* dt *in cui ciò avviene, si ottiene* $v_2 = -2v_1$; *derivando rispetto al tempo,*

$$a_2 = -2\,a_1$$

Dalla 3ª equazione si ricava $F^{(13)}_{vinc} = 2\,F_T$, *quindi la 1ª e la 2ª diventano ora:*

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= -m_1 g + 2F_T \\ m_2 a_2 = -2m_2 a_1 &= -m_2 g + F_T \end{aligned}$$

Eliminando F_T *si trova:*

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2m_2 - m_1}{m_1 + 4m_2} g \\ a_2 &= -2a_1 \end{aligned}$$

In particolare, per equilibrare il sistema ($a_1 = 0$) *occorre che sia* $m_1 = 2m_2$.

Esercizio 9.21. *Una piattaforma* (1) *di massa* m_1 *sostiene una persona* (2) *di massa* m_2, *che cerca di sollevarsi (con tutta la piattaforma) tirando con forza* F_{est} *una corda ideale ancorata al soffitto* (0) *e passante per due carrucole ideali* (3), (4), *come in Fig. 9.14 (destra). Calcolare l'accelerazione* a *del sistema, assumendo che la persona rimanga solidale con la piattaforma. Qual è la condizione su* m_1, m_2 *affinché la persona non si sollevi dalla piattaforma?*

Soluzione. *Anche qui abbiamo 4 oggetti, per cui dobbiamo individuare tutte le forze. Anche qui tutte le forze sono verticali, per cui il problema è unidimensionale. Ricordiamo che le carrucole ideali non hanno massa.*

oggetto	*simbolo*	*descrizione*
(1)	$F^{(1)}_g = -m_1 g$	*forza peso piattaforma*
	$F^{(13)}_{vinc}$	*forza vincolare piattaforma-carrucola*
	$F^{(14)}_{vinc}$	*forza vincolare piattaforma-carrucola*
	$F^{(12)}_{vinc}$	*forza vincolare piattaforma-persona*
(2)	$F^{(2)}_g = -m_2 g$	*forza peso persona*
	$F^{(21)}_{vinc}$	*forza vincolare persona-piattaforma*
	$F^{(24)}_T$	*tensione applicata dalla corda sulla persona*
(3)	$F^{(31)}_{vinc}$	*forza vincolare carrucola-piattaforma*
	$F^{(30)}_T$	*tensione carrucola-soffitto*
	$F^{(34)}_T$	*tensione carrucola-carrucola*
(4)	$F^{(41)}_{vinc}$	*forza vincolare carrucola-piattaforma*
	$F^{(43)}_T$	*tensione carrucola-carrucola*
	$F^{(42)}_T = -F_{est}$	*tensione applicata dalla persona sulla corda*

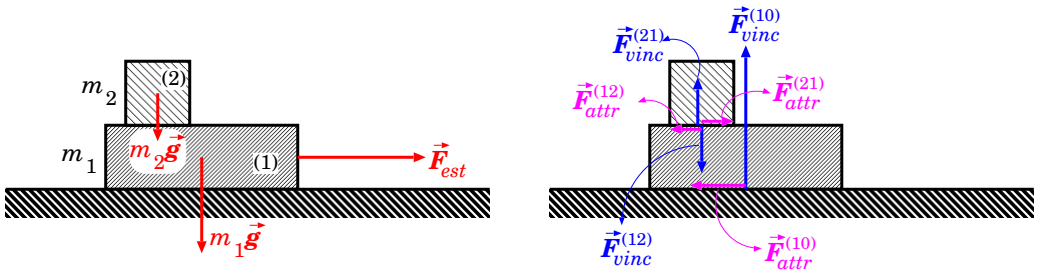


Figura 9.15: *Schema delle forze per l'esercizio sugli attriti: a sinistra le forze "esterne", a destra quelle mutue.*

Ricordando che le carrucole ideali hanno massa nulla, e che in questo problema piattaforma, persona e carrucole devono muoversi in modo solidale, troviamo:

$$\begin{aligned} m_1 a &= F^{(1)}_{tot} &= -m_1 g + F^{(12)}_{vinc} + F^{(13)}_{vinc} + F^{(14)}_{vinc} \\ m_2 a &= F^{(2)}_{tot} &= -m_2 g + F^{(21)}_{vinc} + F^{(24)}_{T} \\ 0 = m_3 a &= F^{(3)}_{tot} &= F^{(31)}_{vinc} + F^{(30)}_{T} + F^{(34)}_{T} \\ 0 = m_4 a &= F^{(4)}_{tot} &= F^{(41)}_{vinc} + F^{(43)}_{T} + F^{(42)}_{T} \end{aligned}$$

Sommando le 4 equazioni e applicando la legge di azione-reazione si trova subito $(m_1+m_2)a = -(m_1+m_2)g + F^{(30)}_T$. *Per una corda ideale, la tensione è uguale ovunque, pertanto* $F^{(30)}_T = F_{est}$, *quindi:*

$$a = \frac{F_{est} - (m_1+m_2)g}{m_1+m_2}$$

Tuttavia, perché persona e piattaforma siano solidali, occorre che $F^{(21)}_{vinc} > 0$. *Dalla* 2^a *equazione si trova*

$$\begin{aligned} F^{(21)}_{vinc} &= m_2(a+g) - F^{(24)}_T = m_2 \frac{F_{est}}{m_1+m_2} - F_{est} \\ &= F_{est}\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} \end{aligned}$$

Quindi occorre che $m_2 > m_1$: *la persona deve essere più massiva della piattaforma — risultato, tutto sommato, ragionevole!*

Esercizio 9.22. *Due oggetti piatti* (1) *e* (2), *di masse* m_1, m_2, *sono disposti in modo che* (1) *appoggia su un piano orizzontale,* (2) *appoggia su* (1). *I coefficienti di attrito, statico e dinamico, sono rispettivamente* μ^{01}_s, μ^{01}_d *fra piano e* (1), *e* μ^{12}_s, μ^{12}_d *fra* (1) *e* (2). *A* (1) *è attaccata una corda, tesa orizzontalmente, con una forza* F_{est} *— vd Fig. 9.15.*

(a) *Calcolare in valore limite* F'_{est} *che* F_{est} *può assumere, affinché non ci sia movimento.*

(b) *Esiste un intervallo* $F'_{est} < F_{est} \leq F''_{est}$ *tale che* (1) *e* (2) *si muovono in modo solidale? Se sì, qual è la loro accelerazione?*

(c) *Come sono le accelerazioni* a_1, a_2 *dei due corpi per* $F_{est} > F''_{est}$*?*

Soluzione. *Occorre anzitutto individuare tutte le forze, agenti su ciascun oggetto. Indicheremo con* $\vec{\boldsymbol{F}}^{(i)}_{tot}$ *la forza totale agente sull'i-esimo oggetto* ($i = 1, 2$) *e con* $\vec{\boldsymbol{F}}^{(ij)}_{descr}$ *la forza di natura "descr" agente sull'i-esimo oggetto causata dal j-esimo oggetto. Inoltre, ci dotiamo di assi cartesiani con* $\hat{\boldsymbol{x}}$ *orizzontale e allineato con* $\vec{\boldsymbol{F}}_{est}$ *e* $\hat{\boldsymbol{z}}$ *verso l'alto. Quindi:*

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{F}}^{(1)}_{tot} &= \left(F_{est} + F^{(10)}_{attr} + F^{(12)}_{attr}\right)\hat{\boldsymbol{x}} &+& \left(-m_1 g + F^{(10)}_{vinc} + F^{(12)}_{vinc}\right)\hat{\boldsymbol{z}} \\
\vec{\boldsymbol{F}}^{(2)}_{tot} &= \left(F^{(21)}_{attr}\right)\hat{\boldsymbol{x}} &+& \left(-m_2 g + F^{(21)}_{vinc}\right)\hat{\boldsymbol{z}}
\end{aligned}$$

Per la legge di azione-reazione, deve essere $F^{(21)}_{vinc} = -F^{(12)}_{vinc}$ *e* $F^{(21)}_{attr} = -F^{(12)}_{attr}$*, pertanto le equazioni diventano:*

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{F}}^{(1)}_{tot} &= \left(F_{est} + F^{(10)}_{attr} - F^{(21)}_{attr}\right)\hat{\boldsymbol{x}} &+& \left(-m_1 g + F^{(10)}_{vinc} - F^{(21)}_{vinc}\right)\hat{\boldsymbol{z}} \\
\vec{\boldsymbol{F}}^{(2)}_{tot} &= \left(F^{(21)}_{attr}\right)\hat{\boldsymbol{x}} &+& \left(-m_2 g + F^{(21)}_{vinc}\right)\hat{\boldsymbol{z}}
\end{aligned}$$

La descrizione delle forze di attrito dipende dalle condizioni dinamiche, a seconda delle quali possiamo avere attriti statici o dinamici.

Quindi iniziamo con le componenti verticali: qualunque cosa succeda, sicuramente non abbiamo accelerazione verticale, pertanto $F^{(1)}_{tot,z} = 0$ *e* $F^{(2)}_{tot,z} = 0$*. Da qui si deduce:*

$$\begin{aligned}
F^{(21)}_{vinc} &= m_2 g \\
F^{(10)}_{vinc} &= m_1 g + F^{(21)}_{vinc} = (m_1 + m_2) g
\end{aligned}$$

Poi esaminiamo le componenti orizzontali.

Caso (a). *Per avere assenza di moto, deve essere* $F^{(1)}_{tot,x} = 0$ *e* $F^{(2)}_{tot,x} = 0$*. In tal caso gli attriti sono statici:*

$$\begin{aligned}
0 &= F^{(2)}_{tot,x} = F^{(21)}_{as} \\
0 &= F^{(1)}_{tot,x} = F_{est} + F^{(10)}_{as} - F^{(21)}_{as}
\end{aligned}$$

con $|F^{(10)}_{as}| \leq \mu^{01}_s |F^{(10)}_{vinc}|$ *e* $|F^{(21)}_{as}| \leq \mu^{12}_s |F^{(21)}_{vinc}|$*. La seconda è sicuramente soddisfatta —* $F^{(21)}_{as} = 0$ *— mentre la prima implica che* $|F^{(10)}_{as}| = |-F_{est}| \leq \mu^{01}_s (m_1 + m_2) g$*, ovvero:*

(a) *il sistema resta fermo per*

$$F_{est} \leq \underbrace{\mu_s^{01}(m_1+m_2)g}_{F'_{est}}$$

Caso (b). *Ovviamente per $F_{est} > F'_{est}$ l'oggetto (1) si muove, con accelerazione $a_1 > 0$, e l'attrito $F_{attr}^{(10)}$ diventa dinamico, $F_{ad}^{(10)} = -\mu_d^{01} F_{vinc}^{(10)}$. Se gli oggetti (1) e (2) devono muoversi in modo solidale, occorre che l'attrito fra essi resti statico, e che anche (2) si muova con la stessa accelerazione $a_2 = a_1$. Pertanto le equazioni delle forze diventano:*

$$\begin{aligned} m_2 a_1 &= F_{tot,x}^{(2)} &= F_{as}^{(21)} \\ m_1 a_1 &= F_{tot,x}^{(1)} &= F_{est} - \mu_d^{01} F_{vinc}^{(10)} - F_{as}^{(21)} \\ & &= F_{est} - \mu_d^{01}(m_1+m_2)g - F_{as}^{(21)} \end{aligned}$$

Abbiamo 2 incognite: a_1 e $F_{as}^{(21)}$. Per trovare a_1 possiamo sommare le due equazioni, trovando

$$\begin{aligned} (m_1+m_2)a_1 &= F_{est} - \mu_d^{01}(m_1+m_2)g \\ a_1 &= \frac{F_{est}}{m_1+m_2} - \mu_d^{01} g \end{aligned}$$

Quindi $F_{as}^{(21)} = m_2\left(\frac{F_{est}}{m_1+m_2} - \mu_d^{01} g\right)$. Si noti che $F_{as}^{(21)} > 0$ — essendo nella condizione $F_{est} > \mu_s^{01}(m_1+m_2)g$ e $\mu_s^{01} > \mu_d^{01}$. La condizione di attrito statico per $F_{as}^{(21)}$ diventa

$$\begin{aligned} |F_{as}^{(21)}| &\leq \mu_s^{12}|F_{vinc}^{(21)}| \\ m_2\left(\frac{F_{est}}{m_1+m_2} - \mu_d^{01} g\right) &\leq \mu_s^{12} m_2 g \\ F_{est} &\leq (m_1+m_2)(\mu_s^{12} + \mu_d^{01}) \end{aligned}$$

Quindi:

(b) *il sistema accelera, con (1) e (2) solidali, se*

$$\underbrace{\mu_s^{01}(m_1+m_2)g}_{F'_{est}} < F_{est} \leq \underbrace{(\mu_d^{01} + \mu_s^{12})(m_1+m_2)g}_{F''_{est}}$$

Va notato che questa condizione potrebbe non essere sempre realizzata: per avere $F'_{est} < F''_{est}$ occorre che sia $\mu_s^{01} < \mu_d^{01} + \mu_s^{12}$ — cosa non sempre possibile, essendo $\mu_d^{01} < \mu_s^{01}$ — quindi:

$$\mu_s^{12} > \mu_s^{01} - \mu_d^{01}$$

Caso (c). *Per* $F_{est} > \max\{F''_{est}, F'_{est}\}$, *tutti gli attriti sono dinamici:*

$$\begin{aligned} F_{ad}^{(10)} &= -\mu_d^{01} F_{vinc}^{(10)} = -\mu_d^{01}(m_1+m_2)g \\ F_{ad}^{(21)} &= +\mu_d^{12} F_{vinc}^{(21)} = +\mu_d^{12} m_2 g \end{aligned}$$

Un commento sul segno di $F_{ad}^{(21)}$*: esso è* $+$*, poiché l'effetto dell'attrito è che* (1) *traina* (2)*. Quindi:*

$$\begin{aligned} m_2 a_2 &= F_{tot,x}^{(2)} = F_{ad}^{(21)} \\ &= \mu_d^{12} m_2 g \\ m_1 a_1 &= F_{tot,x}^{(1)} = F_{est} + F_{ad}^{(10)} - F_{ad}^{(21)} \\ &= F_{est} - \mu_d^{01}(m_1+m_2)g - \mu_d^{12} m_2 g \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} a_2 &= \mu_d^{12} g \\ a_1 &= \frac{F_{est} - \mu_d^{01}(m_1+m_2)g - \mu_d^{12} m_2 g}{m_1} \end{aligned}$$

Esercizio 9.23. *Due oggetti* (1) *e* (2)*, di masse* m_1*,* m_2*, sono appoggiati su un piano inclinato che forma un angolo* θ *rispetto all'orizzontale. L'oggetto* (1) *è "a monte" dell'oggetto* (2)*. Ciascun oggetto ha coefficienti di attrito statico e dinamico con il piano pari a* $\mu_s^{(i)}$*,* $\mu_d^{(i)}$ *(con* $i = 1, 2$*). I due oggetti sono collegati da una corda ideale. Quando si verificano le seguenti condizioni?*

(a) *La corda è tesa e i due oggetti sono in quiete;*

(b) *La corda è tesa e i due oggetti scivolano sul piano.*

Soluzione. *Come sempre, elenchiamo le forze. Scegliamo due direzioni:* $\hat{\boldsymbol{n}}$ *ortogonale al piano ed uscente da esso;* $\hat{\boldsymbol{t}}$ *parallela al piano, in discesa.*

$$\begin{aligned} m_1 \vec{\boldsymbol{a}}_1 &= \vec{\boldsymbol{F}}_{tot}^{(1)} = \left(-m_1 g\cos\theta + F_{vinc}^{(1)}\right)\hat{\boldsymbol{n}} + \left(m_1 g \sin\theta + F_{attr}^{(1)} + F_T^{(12)}\right)\hat{\boldsymbol{t}} \\ m_2 \vec{\boldsymbol{a}}_2 &= \vec{\boldsymbol{F}}_{tot}^{(2)} = \left(-m_2 g\cos\theta + F_{vinc}^{(2)}\right)\hat{\boldsymbol{n}} + \left(m_2 g \sin\theta + F_{attr}^{(2)} + F_T^{(21)}\right)\hat{\boldsymbol{t}} \end{aligned}$$

In direzione $\hat{\boldsymbol{n}}$ *non ci deve essere accelerazione, pertanto otteniamo subito*

$$F_{vinc}^{(1)} = m_1 g\cos\theta \quad ; \quad F_{vinc}^{(2)} = m_2 g\cos\theta$$

(niente di nuovo...)

Ora passiamo alla direzione $\hat{\boldsymbol{t}}$*. Anzitutto, per la legge di azione-reazione,* $F_T^{(12)} = -F_T^{(21)}$*; inoltre, affinché la corda sia tesa, deve essere* $F_T^{(12)} > 0$*.*

Per il resto, occorre separare il caso statico da quello dinamico.

Caso (a). *Le accelerazioni sono nulle. Gli attriti devono essere statici:* $F^{(i)}_{attr} \equiv F^{(i)}_{as}$, *con* $|F^{(i)}_{as}| \leq F^{(i)}_{vinc}$. *Quindi:*

$$\left.\begin{array}{rcl} 0 & = & m_1 g \sin\theta + F^{(1)}_{as} + F^{(12)}_T \\ 0 & = & m_2 g \sin\theta + F^{(2)}_{as} - F^{(12)}_T \end{array}\right\} \qquad (i)$$

In sistema ha 3 incognite: le 3 forze adattive $F^{(1)}_{as}$, $F^{(2)}_{as}$, $F^{(12)}_T$. *Esse devono soddisfare le 3 disequazioni:*

$$\left.\begin{array}{rcl} |F^{(1)}_{as}| & \leq & \mu^{(1)}_s m_1 g \cos\theta \\ |F^{(2)}_{as}| & \leq & \mu^{(2)}_s m_2 g \cos\theta \\ F^{(12)}_T & > & 0 \end{array}\right\} \qquad (ii)$$

che pongono limiti sui loro valori, ma non aiutano a completare il sistema.

Questo non deve stupirci: possiamo immaginarci diverse situazioni in cui il sistema resta statico: per esempio i coefficienti $\mu^{(i)}_s$ *sono molto elevati, consentendo agli attriti statici di raggiungere valori molto grandi, adatti a contrastare non solo le forze-peso, ma anche una forte tensione della corda.*

Mettiamoci invece in usa situazione meno estrema. Immaginiamo che (1) *venga appoggiato sul piano inclinato e resti fermo: siccome forza-peso e tensione lo tirano entrambi in discesa, l'unica forza che può tenerlo in equilibrio è l'attrito statico, che deve quindi tirare in salita. Dunque:*

$$F^{(1)}_{as} < 0 \qquad ; \qquad \tan\theta < \mu^{(1)}_s$$

Poi (2) *viene appoggiato sul piano a valle di* (1), *e collegato ad esso dalla corda. Se il suo attrito statico fosse sufficiente a contrastare la forza-peso, la corda non andrebbe in tensione. Quindi l'attrito statico, pur tirando in salita, non è sufficiente a contrastare interamente la forza-peso, e la tensione contribuisce a mantenere l'equilibrio:*

$$F^{(2)}_{as} = -\mu^{(2)}_s m_2 g \cos\theta \qquad ; \qquad \tan\theta > \mu^{(2)}_s$$

In particolare, la pendenza deve essere tale che

$$\mu^{(2)}_s \ < \ \tan\theta \ < \ \mu^{(1)}_s \qquad (iii)$$

Il fatto che $F^{(2)}_{as}$ *raggiunga il suo valore-limite (negativo) consente ora di risolvere il sistema. Anzitutto, dalla 2*^{a} *delle equazioni* (i):

$$\begin{array}{rcl} F^{(12)}_T & = & m_2 g \sin\theta - \mu^{(2)}_s m_2 g \cos\theta \\ & = & m_2(\tan\theta - \mu^{(2)}_s) g \cos\theta \end{array}$$

(che è manifestamente > 0*). Poi dalla 1*^{a} *delle equazioni* (i):

$$F^{(1)}_{as} \ = \ -m_1 g \sin\theta - m_2(\tan\theta - \mu^{(2)}_s) g \cos\theta$$

In sintesi abbiamo trovato:

$$\left.\begin{array}{rcl} F_{as}^{(1)} & = & -m_1 g \sin\theta - m_2(\tan\theta - \mu_s^{(2)}) g\cos\theta \\ F_{as}^{(2)} & = & -\mu_s^{(2)} m g \cos\theta \\ F_T^{(12)} & = & m_2 g \sin\theta - \mu_s^{(2)} m_2 g \cos\theta \end{array}\right\} \qquad (iv)$$

Occorre verificare che le soluzioni trovate soddisfino tutte le disequazioni (ii). In particolare, quella per $|F_{as}^{(1)}|$ dà:

$$|F_{as}^{(1)}| \;=\; \left((m_1+m_2)\tan\theta - \mu_s^{(2)} m_2\right) g\cos\theta \;\leq\; \mu_s^{(1)} m_1 g \cos\theta$$

che può essere risolta nei due modi equivalenti:

$$\begin{array}{rcl} \tan\theta & \leq & \dfrac{\mu_s^{(1)} m_1 + \mu_s^{(2)} m_2}{m_1+m_2} \\ \dfrac{m_1}{m_2} & \geq & \dfrac{\tan\theta - \mu_s^{(2)}}{\mu_s^{(1)} - \tan\theta} \end{array}$$

La prima forma pone un limite superiore alla pendenza — sempre compatibile con la condizione (iii), visto che $\dfrac{\mu_s^{(1)} m_1 + \mu_s^{(2)} m_2}{m_1+m_2} \in \left[\mu_s^{(2)}; \mu_s^{(1)}\right]$: se il piano è troppo ripido, l'attrito statico $F_{as}^{(1)}$, anche se sufficiente a trattenere la sola m_1, non basta a trattenere anche m_2. La seconda forma invece ci dice che m_1 non può essere troppo leggera, in caso contrario il suo attrito statico non riuscirebbe a trattenere m_2.

Caso (b). *Le accelerazioni sono identiche, pari ad a, e le equazioni del moto sono:*

$$\begin{array}{rcl} m_1 a & = & m_1 g \sin\theta + F_{ad}^{(1)} + F_T^{(12)} \\ m_2 a & = & m_2 g \sin\theta + F_{ad}^{(2)} - F_T^{(12)} \end{array}$$

con $F_{ad}^{(i)} = -\mu_d^{(i)} m_i g \cos\theta$ — assumiamo lo scivolamento in discesa, quindi $F_{ad}^{(i)} < 0$.

Abbiamo un sistema di 2 equazioni, nelle incognite a, $F_T^{(12)}$. Sommando le equazioni:

$$\begin{array}{rcl} (m_1+m_2)a & = & (m_1+m_2) g\sin\theta - (m_1\mu_d^{(1)} + m_2\mu_d^{(2)}) g\cos\theta \\ a & = & g\sin\theta - \dfrac{m_1\mu_d^{(1)} + m_2\mu_d^{(2)}}{m_1+m_2} g\cos\theta \end{array}$$

Ora si può ricavare $F_T^{(12)}$ da una qualunque delle 2 equazioni:

$$F_T^{(12)} \;=\; \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} g\cos\theta \left(\mu_d^{(1)} - \mu_d^{(2)}\right)$$

La condizione di corda tesa, $F_T^{(12)} > 0$*, è verificata se (e solo se)* $\mu_d^{(1)} > \mu_d^{(2)}$*. Il risultato è sensato: solo se* m_1 *(la massa "a monte") è più frenata di* m_2*, può trattenere quest'ultima con la tensione della corda.*

Capitolo 10

Moti oscillatori

Abbiamo introdotto le forze elastiche nella Sezione 9.5: ricordiamo che sono forze che entrano in azione quando un oggetto viene spostato da una posizione di equilibrio, ed agiscono in modo da riportarlo in tale posizione, con un'intensità direttamente proporzionale allo spostamento $\Delta\ell$. In formule:

$$F_{el} \;=\; -k\,\Delta\ell \tag{10.1}$$

L'effetto di tali forze è di creare dei moti di oscillazione intorno alla posizione di equilibrio, detti *moti armonici*.

L'esempio più semplice da trattare è quello di una massa attaccata ad una molla. In realtà, le forze elastiche si applicano ad una vasta categoria di sistemi fisici: in generale, ogni volta che si ha a che fare con un moto di un oggetto intorno ad un suo punto di equilibrio stabile, per piccoli spostamenti da esso il problema può essere trattato con buona approssimazione come un moto elastico. Riprenderemo questo argomento nella Sezione 14.3.

10.1 Oscillazioni di una molla

Consideriamo un oggetto di massa m attaccato ad una molla con costante di elasticità k. Supponiamo dapprima che sul sistema non agiscano altre forze. Per esempio, la molla sia disposta orizzontalmente lungo una rotaia, sulla quale la massa m può scorrere senza attrito, come in Fig. 10.1 (sinistra).

Il problema è unidimensionale. Definiamo l'origine O del sistema di riferimento nel punto in cui la molla è in equilibrio, e l'asse x orientato verso la direzione di allungamento della molla. Quindi

$$x \;=\; \ell - \ell_0 \;=\; \Delta\ell$$

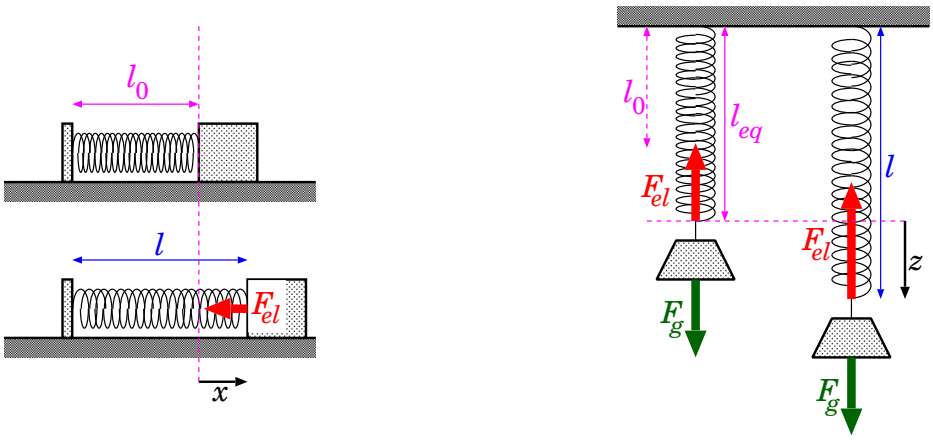


Figura 10.1: *Molla che oscilla in orizzontale (a sinistra) e in verticale (a destra).*

e la forza elastica dell'Eq. (10.1) diventa:

$$F_{el} = -k\,x \tag{10.2}$$

Applicando la legge di Newton, $F = ma$, otteniamo la seguente equazione del moto:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x \tag{10.3}$$

Come si muove la massa m? L'esperienza ci insegna che si tratta di un moto oscillatorio... ma qui vogliamo verificare che le equazioni della dinamica lo descrivano correttamente. Occorre trovare una funzione $x(t)$ tale che la sua derivata seconda sia proporzionale ad essa, con segno opposto:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \propto -x$$

Funzioni di questo genere esistono: sono le funzioni trigonometriche!

Consideriamo dunque una funzione

$$x(t) = A\cos(\Omega t + \phi)$$

e verifichiamo se può essere soluzione dell'Eq. (10.3).

Dalle regole di derivazione della Sezione 3.3 sappiamo che [1]:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[A\cos(\Omega t+\phi)\right] &= -A\Omega\sin(\Omega t+\phi) \\
\frac{d^2}{dt^2}\left[A\cos(\Omega t+\phi)\right] &= \frac{d}{dt}\left[-A\Omega\sin(\Omega t+\phi)\right] = -A\Omega^2\cos(\Omega t+\phi)
\end{aligned}$$

Pertanto:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[A\cos(\Omega t+\phi)\right] = -\Omega^2\left[A\cos(\Omega t+\phi)\right]$$

Quindi possiamo concludere che la funzione

$$x(t) = A\cos(\Omega t+\phi) \tag{10.4}$$

soddisfa un'equazione identica all'Eq. (10.3), purché sia

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{10.5}$$

Quindi, l'Eq. (10.4) descrive esattamente la legge oraria dell'oscillazione della molla.

Ora consideriamo il problema di una massa m appesa verticalmente ad una molla di costante di elasticità k, come in Fig. 10.1 (destra). Le forze in gioco sono due: la forza elastica $\vec{\boldsymbol{F}}_{el}$ e la forza-peso $\vec{\boldsymbol{F}}_g$. Entrambe sono verticali, quindi il problema è comunque unidimensionale, e possiamo trattare F_{el}, F_g come quantità numeriche con l'opportuno segno. Scegliendo come positivo l'orientamento verso il basso, $F_{el} = -k(\ell-\ell_0)$ e $F_g = mg$. La posizione del sistema è identificata univocamente dalla lunghezza ℓ

[1] Si può ragionare così:

$$\begin{aligned}
x &= A\,\cos(\underbrace{\Omega t+\phi}_{\alpha}) \\
\frac{dx}{dt} &= A\,\frac{d\cos(\Omega t+\phi)}{dt} = A\,\frac{d\cos(\alpha)}{dt} \\
&= A\,\frac{d\cos(\alpha)}{d\alpha}\,\frac{d\alpha}{dt} \\
&= A\,[-\sin(\alpha)]\,\frac{d(\Omega t+\phi)}{dt} \\
&= -A\,\sin(\Omega t+\phi)\,\Omega
\end{aligned}$$

della molla, e potremmo pensare di ricavare la legge oraria per $\ell = \ell(t)$. L'equazione del moto sarebbe:

$$\frac{d^2\ell}{dt^2} = \frac{F_{el} + F_g}{m} = -\frac{k}{m}(\ell - \ell_0) + g$$

Questa equazione è un po' meno comoda di quella trovata per il moto orizzontale, Eq. (10.3), a causa della presenza del termine g. Tuttavia sappiamo dalla Sezione 9.5.3 che l'effetto della forza-peso è di spostare il punto di equilibrio da ℓ_0 a

$$\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{gm}{k}$$

Pertanto scegliamo il sistema di riferimento con l'asse z orientato verso il basso (in modo che allungamenti della molla corrispondano a z crescenti) e con l'origine O nel punto di equilibrio, cosicché $z = \ell - \ell_{eq}$. Con questa scelta l'equazione del moto diventa:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{k}{m}z$$

del tutto identica all'Eq. (10.3). Pertanto anche la legge oraria deve essere la stessa.

10.1.1 Moto oscillatorio armonico

Riconsideriamo l'equazione del moto Eq. (10.3), trovata per una molla oscillante, e riportiamola qui:

$$F_x = -kx \qquad \left(\text{ovvero} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot x \right) \tag{10.6}$$

Dimenticandoci della natura specifica del sistema (la molla), possiamo astrarre l'analisi dinamica parlando semplicemente di un sistema con le seguenti caratteristiche:

- esiste un punto di equilibrio in cui la forza è nulla;
- uno spostamento x dal punto di equilibrio produce una forza F_x, direttamente proporzionale allo spostamento, ma diretta nel verso opposto;
- è caratterizzato da due parametri: la massa m e la costante elastica k.

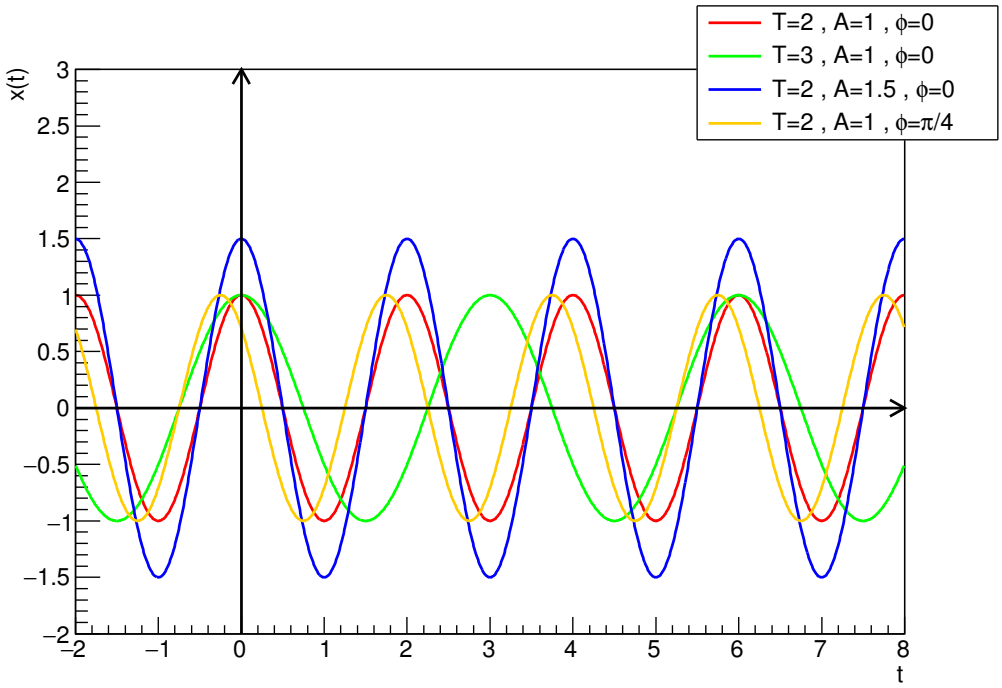


Figura 10.2: *Esempi di moto oscillatorio armonico, per diversi valori di periodo T, ampiezza A, fase ϕ.*

Abbiamo già visto che la legge oraria del moto del sistema è

$$x(t) = A\cos(\Omega t + \phi) \qquad ; \qquad \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{10.7}$$

Quindi la forza F_x (a causa del segno $-$) agisce da *forza di richiamo*, ovvero tende a riportare il sistema verso la posizione di equilibrio: in pratica, il sistema oscilla intorno ad essa.

Tale moto si chiama *moto oscillatorio armonico*. La sua rappresentazione grafica è mostrata in Fig. 10.2, per diversi valori di Ω, A, ϕ.

La quantità Ω si chiama *frequenza angolare* (o anche *pulsazione*) e si misura in "radianti al secondo" (rad/s). Essa dipende dai parametri fisici del sistema (m, k) e non dalle condizioni iniziali.

La velocità si ricava derivando l'Eq. (10.7):

$$v(t) = -A\Omega\sin(\Omega t + \phi) \qquad ; \qquad \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{10.8}$$

Le funzioni trigonometriche hanno una periodicità di 2π: $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2\pi)$ e $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2\pi)$. Nel nostro caso, ciò significa che

$$\begin{aligned} \cos(\Omega t + \phi) &= \cos(\Omega t + \phi + 2\pi) = \cos\left(\Omega\left(t + \frac{2\pi}{\Omega}\right) + \phi\right) \\ x(t) &= x\left(t + \frac{2\pi}{\Omega}\right) \end{aligned}$$

Analogamente si può verificare che

$$v(t) = v\left(t + \frac{2\pi}{\Omega}\right)$$

Il moto oscillatorio armonico è dunque un *moto periodico*, nel senso che esiste un intervallo di tempo T tale che la posizione e la velocità all'istante t sono sempre uguali a quelle all'istante $t + T$:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t+T) \\ v(t) &= v(t+T) \end{aligned} \qquad \text{per qualunque } t \tag{10.9}$$

In particolare, nel moto oscillatorio armonico il *periodo* è dato da

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \tag{10.10}$$

Si introduce anche la *frequenza* ν definita come il numero di oscillazioni effettuate in 1 secondo:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\Omega}{2\pi} \tag{10.11}$$

La frequenza, essendo reciproca del periodo, si misura in s^{-1}, chiamati anche Hertz: $1\ \mathrm{Hz} \equiv 1\ \mathrm{s}^{-1}$.

La legge oraria, Eq. (10.7), oltre alla frequenza angolare Ω, contiene anche i parametri A, ϕ.

Il parametro A si chiama *ampiezza* dell'oscillazione: poiché $|\cos(\alpha)| \leq 1$, A rappresenta effettivamente il massimo spostamento possibile dal punto di equilibrio.

A e ϕ si ricavano dalle condizioni iniziali x_0, v_0:

$$\begin{aligned} x_0 = x(0) &= A\cos(\phi) \\ v_0 = v(0) &= -A\Omega\sin(\phi) \end{aligned}$$

Moltiplicando la prima equazione per Ω, facendone il quadrato e sommandola al quadrato della seconda, si ottiene:

$$(x_0\Omega)^2 + v_0^2 = (A\Omega)^2\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right)$$

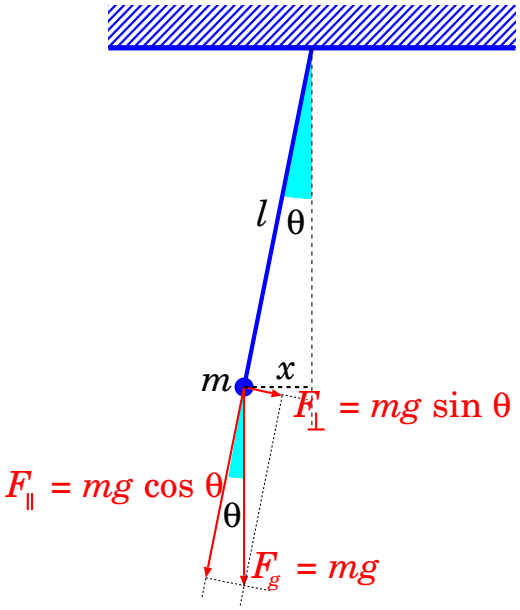


Figura 10.3: *Schema del pendolo.*

e sfruttando l'identità trigonometrica $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$ si ottiene:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\Omega^2}} \tag{10.12}$$

10.2 Moto di un pendolo ideale

Un pendolo ideale è costituito da un filo inestensibile di lunghezza ℓ e di massa trascurabile, fissato ad un ancoraggio immobile ad un estremo, e con una massa puntiforme m appesa all'altro estremo, il tutto in un campo gravitazionale g uniforme. La posizione del pendolo può essere descritta con l'angolo θ che il filo forma con la verticale, come in Fig. 10.3.

Sappiamo per esperienza che un pendolo in posizione verticale sta fermo, mentre se viene spostato prende ad oscillare avanti e indietro intorno alla posizione verticale. In questa sezione studiamo il meccanismo fisico che ne governa il moto.

Sulla massa m agiscono la forza di gravità, $F_g = mg$, diretta verticalmente verso il basso, e la tensione del filo, F_T, diretta lungo il filo. Chiamiamo θ l'angolo formato dal filo rispetto alla verticale, e scomponiamo il sistema di forze lungo due direzioni:

- lungo il filo agiscono la tensione F_T e la componente della forza-peso $F_{g\|} = mg\cos\theta$: il loro effetto combinato è quello di mantenere la traiettoria della massa m lungo la circonferenza [2]

- in direzione ortogonale al filo agisce solo la componente della forza-peso $F_{g\perp} = mg\sin\theta$, che produce sulla massa m un'accelerazione tangenziale

$$a_t = \frac{F_t}{m} = g\sin\theta \tag{10.13}$$

  che determina il moto del pendolo.

Studiamo l'equazione del moto, per la variabile angolare θ. Lo spostamento lineare del pendolo è $ds = \ell\, d\theta$, pertanto:

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} = \frac{d(\ell\theta)}{dt} = \ell\,\frac{d\theta}{dt} \\ a_t &= \frac{dv}{dt} = \ell\,\frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned}$$

Confrontando l'ultima equazione con l'Eq. (10.13) si trova:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{\ell}\sin\theta \qquad \text{(da perfezionare)}$$

dove le quantità sono per ora espresse tutte in modulo. Un'osservazione più attenta ci mostra che a_t ha sempre segno opposto rispetto allo spostamento angolare θ, pertanto una formulazione più corretta è:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta \tag{10.14}$$

Questa equazione differenziale non ammette una soluzione analitica. Tuttavia, se ci limitiamo ad oscillazioni piccole, possiamo assumere $\sin\theta \simeq \theta$ [3]. Con questa approssimazione, l'equazione del moto diventa

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\,\theta \tag{10.15}$$

---

[2] Si potrebbe anche impostare il calcolo della tensione del filo, partendo dalla forza centripeta:

$$m\,(\dot\theta)^2\ell \equiv F_n = F_T - mg\cos\theta \qquad ; \qquad \dot\theta \equiv \frac{d\theta}{dt}$$

ma per analizzare il moto del pendolo non ci serve...

[3] La funzione $\sin\theta$ può essere espansa nel polinomio di Taylor $\sin\theta \simeq \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!}\cdots$ Per θ molto piccoli, tutti i termini a potenze di ordine più alto diventano trascurabili.

Questa è un'equazione del moto molto peculiare, che ricorre spesso in molti problemi fisici, quando si abbia a che fare con moti di oscillazione.

La derivata seconda dello spostamento è direttamente proporzionale allo spostamento, e con segno opposto.

Ora, noi conosciamo funzioni che possiedono proprio la proprietà che ci serve: una derivata seconda proporzionale alla funzione stessa, ma di segno opposto. Si tratta delle funzioni trigonometriche *seno* e *coseno*. In effetti:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\cos(\Omega t+\phi)\right] &= -\Omega\sin(\Omega t+\phi) \\
\frac{d^2}{dt^2}\left[\cos(\Omega t+\phi)\right] &= -\Omega\frac{d}{dt}\left[\sin(\Omega t+\phi)\right] \;=\; -\Omega^2\cos(\Omega t+\phi)
\end{aligned}$$

pertanto la forma più generale della soluzione del moto, per l'Eq. (10.15), è:

$$\theta(t) \;=\; A\cos(\Omega t+\phi) \tag{10.16}$$

purché si assuma:

$$\Omega \;=\; \sqrt{\frac{g}{\ell}} \tag{10.17}$$

La quantità Ω si chiama *frequenza angolare* (o anche *pulsazione*) e si misura in "radianti al secondo" (rad/s). Essa dipende dai parametri fisici del sistema: la lunghezza del pendolo ℓ e l'accelerazione di gravità g.

Il moto del pendolo è *periodico*: questo significa che esiste una durata temporale T — il *periodo* — tale che per ciascun istante t valgono:

$$\begin{aligned}
\theta(t+T) &= \theta(t) \\
\dot\theta(t+T) &= \dot\theta(t) \qquad\qquad \left(\dot\theta \equiv \frac{d\theta(t)}{dt}\right)
\end{aligned}$$

In effetti le funzioni trigonometriche sono periodiche di 2π nel loro argomento: $\cos(\alpha)=\cos(\alpha+2\pi)$. Nel nostro caso, ciò si scrive

$$\begin{aligned}
\theta(t) &= A\cos(\Omega t+\phi) \;=\; A\cos(\Omega t+\phi+2\pi) \\
&= A\cos\left(\Omega\left(t+\frac{2\pi}{\Omega}\right)+\phi\right) \\
&= \theta\left(t+\frac{2\pi}{\Omega}\right)
\end{aligned}$$

ovvero il periodo è:

$$T \;=\; \frac{2\pi}{\Omega} \;=\; 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{10.18}$$

Questa è la famosa *legge del pendolo*, per piccole oscillazioni. Il periodo del pendolo è determinato unicamente dalla sua lunghezza ℓ, oltre che dall'accelerazione di gravità g. Questa legge permette di costruire un moto periodico con grande precisione: per questa ragione, per molto tempo gli orologi più precisi sono stati appunto quelli a pendolo.

Mentre Ω (e quindi T) sono collegati a grandezze fisiche del sistema (g, ℓ), i parametri A, ϕ invece sono determinati dalle condizioni iniziali: $\theta_0 = \theta(t = 0)$ e $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(t = 0)$. In effetti, dall'Eq. (10.16) e dalla sua derivata, per $t = 0$ si trova:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \theta(t=0) = A\cos(\phi) \\ \dot{\theta}_0 &= \dot{\theta}(t=0) = -A\Omega\sin(\phi) \end{aligned}$$

Moltiplicando la prima condizione per Ω si ottiene $\Omega\theta_0 = \Omega A\cos(\phi)$; facendone il quadrato, e sommandovi il quadrato della seconda condizione (ricordando l'identità trigonometrica $\cos^2 + \sin^2 = 1$) si ottiene $(\Omega\theta_0)^2 + \dot{\theta}_0^2 = \Omega^2 A^2$, ovvero

$$A = \sqrt{\theta_0^2 + \left(\frac{\dot{\theta}_0}{\Omega}\right)^2}$$

10.3 Oscillazioni forzate

Consideriamo un oggetto di massa m, sottoposto ad una forza elastica di costante k e contemporaneamente ad una forza esterna F_{est} che varia nel tempo, in modo armonico, con frequenza angolare Ω. Per descrivere il problema, limitiamoci ad un caso unidimensionale. Chiamando x lo spostamento dal punto di equilibrio, la forza elastica può essere scritta come:

$$F_{el} = -kx \tag{10.19}$$

Invece la forza esterna ha una forma del tipo:

$$F_{est} = F_0\cos(\Omega t) \tag{10.20}$$

L'equazione del moto del sistema è:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_0\cos(\Omega t) \tag{10.21}$$

Un'equazione del genere si chiama *equazione differenziale lineare non omogenea*. L'incognita è la funzione $x(t)$. La "non omogeneità" deriva dalla presenza del termine $F_0\cos(\Omega t)$ che non contiene la funzione incognita $x(t)$.

10.3.1 Soluzione generale del moto

La teoria delle equazioni differenziali insegna che la soluzione generale dell'Eq. (10.21) è data dalla soluzione generale $x_0(t)$ dell'equazione omogenea, $m\dfrac{d^2x_0}{dt^2} = -kx_0$, sommata ad una soluzione particolare $\overline{x}(t)$ dell'equazione non omogenea. La ragione è evidente: se

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x_0}{dt^2} &= -kx_0 \\ m\frac{d^2\overline{x}}{dt^2} &= -k\overline{x} + F_0\cos(\Omega t) \end{aligned}$$

sommando le due equazioni si ottiene

$$m\frac{d^2}{dt^2}\left(x_0(t) + \overline{x}(t)\right) = -k\left(x_0(t) + \overline{x}(t)\right) + F_0\cos(\Omega t)$$

ovvero $x_0(t) + \overline{x}(t)$ soddisfa l'Eq. (10.21).

La soluzione generale dell'equazione omogenea è nota: si tratta del moto oscillatorio armonico, pertanto

$$x_0(t) = A_0\cos(\Omega_0 t + \phi_0) \qquad \left(\Omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}\right) \tag{10.22}$$

dove Ω_0 dipende dalle caratteristiche del sistema (k, m), mentre A_0, ϕ_0 verranno fissate imponendo le condizioni iniziali per x, v.

Per la soluzione particolare, è facile verificare che l'Eq. (10.21) può essere soddisfatta da una funzione della forma

$$\overline{x}(t) = \overline{A}\cos(\Omega t + \overline{\phi}) \tag{10.23}$$

dove Ω è esattamente la frequenza angolare della forza esterna F_{est} — dunque, in generale diversa da Ω_0. Per sostituzione diretta, si ottiene $\dfrac{d^2\overline{x}}{dt^2} = -\Omega^2\overline{x}$, quindi:

$$(-m\Omega^2 + k)\overline{A}\cos(\Omega t + \overline{\phi}) = F_0\cos(\Omega t)$$

che è automaticamente soddisfatta se

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \frac{F_0}{k - m\Omega^2} = \frac{F_0}{m\left(\Omega_0^2 - \Omega^2\right)} \\ \overline{\phi} &= 0 \end{aligned}$$

Riassumendo, la soluzione generale dell'Eq. (10.21) è data da $x_0(t)+\overline{x}(t)$, ovvero:

$$x(t) = A_0 \cos(\Omega_0 t + \phi_0) + \frac{F_0}{m\,(\Omega_0^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t) \qquad \left(\Omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}\right) \tag{10.24}$$

È da notare che il moto si compone di due moti armonici, con frequenze angolari Ω_0 e Ω. Più la frequenza angolare forzante Ω si avvicina alla frequenza angolare propria Ω_0, maggiore risulta l'ampiezza della seconda componente del moto.

10.3.2 Condizioni iniziali

Consideriamo come condizione iniziale il sistema da fermo:

$$\begin{aligned} 0 = x(0) &= A_0 \cos(\phi_0) + \frac{F_0}{m\,(\Omega_0^2 - \Omega^2)} \\ 0 = v(0) &= \left[\frac{dx}{dt}\right]_{t=0} = -A_0 \Omega_0 \sin(\phi_0) \end{aligned}$$

Dalla 2^a equazione si deduce $\phi_0 = 0$, ovvero $\cos(\phi_0) = 1$, quindi la 1^a equazione dà $A_0 = -\dfrac{F_0}{m\,(\Omega_0^2 - \Omega^2)}$. In questo caso, la legge oraria è dunque:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m\,(\Omega_0^2 - \Omega^2)} \left[\cos(\Omega t) - \cos(\Omega_0 t)\right] \\ &= \frac{2F_0}{m(\Omega_0 + \Omega)(\Omega_0 - \Omega)} \sin\left(\frac{\Omega_0 + \Omega}{2} t\right) \sin\left(\frac{\Omega_0 - \Omega}{2} t\right) \end{aligned} \tag{10.25}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è sfruttata l'identità trigonometrica $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

La rappresentazione grafica del moto armonico forzato è mostrata in Fig. 10.4, per diversi valori della frequenza angolare forzante.

Dall'Eq. (10.25) possiamo notare alcune caratteristiche generali:

- La parte $\sin\left(\dfrac{\Omega_0 + \Omega}{2} t\right) \sin\left(\dfrac{\Omega_0 - \Omega}{2} t\right)$ oscilla fra -1 e $+1$, quindi l'ampiezza massima che il moto oscillatorio può raggiungere è

$$A_{max} = \left|\frac{2F_0}{m(\Omega_0 + \Omega)(\Omega_0 - \Omega)}\right| = \frac{2F_0}{m|\Omega_0^2 - \Omega^2|} \tag{10.26}$$

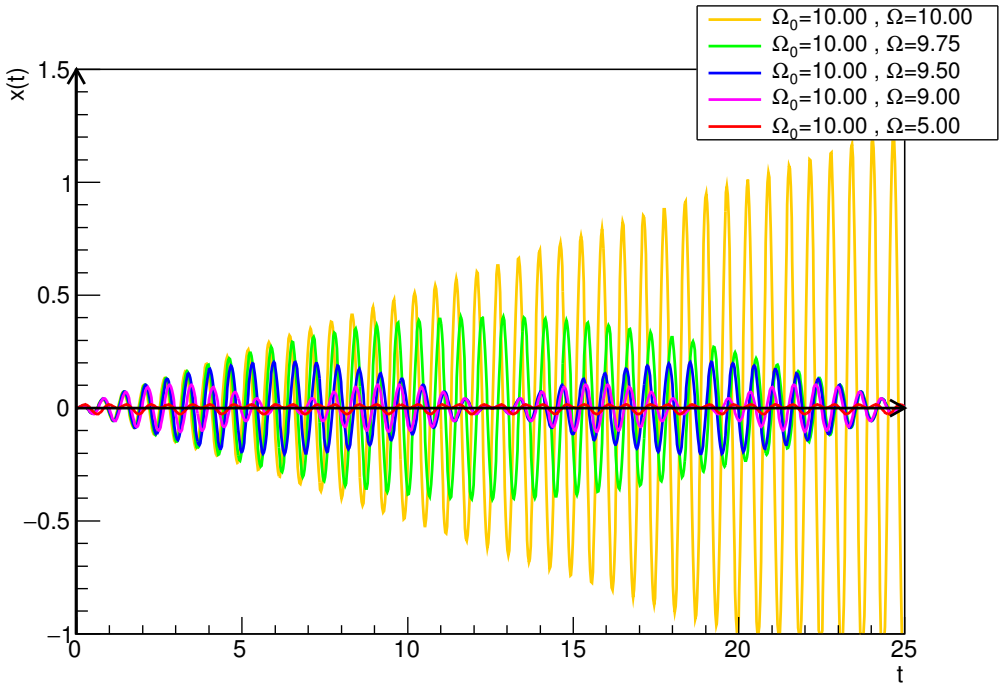


Figura 10.4: *Esempi di moto oscillatorio armonico forzato, con frequenza angolare propria* Ω_0*, per diversi valori della frequenza angolare forzante* Ω*. Si nota che per* Ω*,* Ω_0 *molto differenti (curva rossa) il moto appare disordinato e con ampiezza piccola. Più* Ω *si avvicina a* Ω_0*, più appare il fenomeno del "battimento" (curve magenta, blu, verde), e più cresce l'ampiezza massima. Quando* $\Omega = \Omega_0$*, l'ampiezza cresce indefinitamente, linearmente con il tempo.*

- L'ampiezza massima è direttamente proporzionale alla forza massima applicata, F_0 — il che è abbastanza intuitivo!

- L'ampiezza massima dipende dalla differenza $|\Omega_0^2 - \Omega^2|$: questa si trova al denominatore, quindi, più la frequenza angolare forzante Ω si avvicina alla frequenza propria Ω_0, maggiore diventa l'ampiezza dell'oscillazione.

- Il caso particolare $\Omega = \Omega_0$ si chiama "risonanza" e va trattato a parte, vedi sezione successiva.

10.3.3 Battimenti e risonanza

Consideriamo in particolare il caso in cui Ω sia vicino a Ω_0, cosicché l'espressione $(\Omega_0 - \Omega)$ al denominatore diventa "piccola" e l'ampiezza di oscillazione diventa "grande". Il moto può essere visto come un'oscillazione con frequenza angolare

$$\Omega_{osc} = \frac{\Omega_0 + \Omega}{2}$$

(cioè la media aritmetica delle frequenze angolari propria e forzante) la cui ampiezza di oscillazione è *modulata* dal termine $\sin\left(\frac{\Omega_0 - \Omega}{2}t\right)$. La frequenza angolare ed il periodo della modulazione sono dati da

$$\begin{aligned} \Omega_{mod} &= \frac{\Omega_0 - \Omega}{2} \\ T_{mod} &= \frac{2\pi}{\Omega_{mod}} = \frac{4\pi}{\Omega_0 - \Omega} \end{aligned}$$

Essendo Ω, Ω_0 "vicini", $\Omega_{mod} \ll \Omega_{osc}$, e il periodo di modulazione è $\gg$ del periodo di oscillazione.

Questo tipo di moto è chiamato *battimento*. L'effetto si può vedere il Fig. 10.4 (curve magenta, blu, verde).

Consideriamo ora il caso-limite in cui la frequenza angolare forzante si approssima sempre più alla frequenza angolare del moto libero: $\Omega \to \Omega_0$. In questo caso, possiamo approssimare

$$\sin\left(\frac{\Omega_0 - \Omega}{2}t\right) \xrightarrow[\Omega\to\Omega_0]{} \frac{\Omega_0 - \Omega}{2}t$$

e l'Eq. (10.25) diventa:

$$x(t) \xrightarrow[\Omega\to\Omega_0]{} \frac{F_0}{2m\Omega_0} \sin(\Omega_0 t)\ t \tag{10.27}$$

In questo caso, il moto è descritto da un'oscillazione di frequenza angolare Ω_0 e con ampiezza che *cresce linearmente con il tempo t*. L'effetto si può vedere il Fig. 10.4 (curva arancione). L'oscillazione diventa sempre più ampia... fino a che la forza elastica non ce la fa più e il sistema si rompe. Questo è il fenomeno della *risonanza*.

Applicazioni pratiche della risonanza

La risonanza ha diverse applicazioni pratiche.

Abbiamo visto che gli atomi o le molecole in un solido sono tenuti in posizione dalle interazioni microscopiche, che per piccoli spostamenti dalle posizioni di equilibrio possono essere approssimate con forze elastiche. Pertanto, gli atomi possiedono delle frequenze angolari "proprie" Ω_i (possono essere anche più di una), con cui oscillano intorno ai propri punti di equilibrio. Se il solido viene eccitato dall'esterno con una frequenza angolare Ω^{est} pari a una delle frequenze angolari Ω_i, si verifica il fenomeno della risonanza, e il solido si può spezzare. Questa è la spiegazione per cui i vetri possono essere infranti con dei suoni, oppure in campo medico, i calcoli renali possono essere frantumati con gli ultrasuoni. I suoni sono vibrazioni dell'aria, si tratta di trovare quindi la frequenza di vibrazione giusta.

Anche passando ai casi macroscopici, una costruzione civile, come un ponte o un palazzo, è dotata di una sua elasticità, pertanto possiede frequenze proprie di vibrazione. Se un agente esterno (per esempio un terremoto) agisce sulla struttura con una sollecitazione di frequenza pari a una delle frequenze proprie, può provocarne il crollo.

Quando una colonna di militari (che marciano sempre al passo!) deve attraversare un ponte, usano "rompere il passo", nel senso che ognuno cammina con il ritmo che vuole. La ragione è che si vuole evitare di avere tanti soldati che — accidentalmente — si trovino a marciare tutti con la frequenza di risonanza tipica del ponte.

10.4 Oscillatore armonico smorzato (*)

In questa sezione si farà ampio uso dell'*esponenziale complesso*, descritto in Sezione 3.6.

10.4.1 Oscillatore armonico smorzato libero

Un oscillatore semplice unidimensionale, con massa m, costante elastica k, coefficiente di attrito viscoso η, è soggetto a una forza elastica $F_{el} = -kx$ e una forza di attrito viscoso $F_{visc} = -\eta v$, pertanto obbedisce all'equazione del moto:

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \eta\frac{dx}{dt} \tag{10.28}$$

ossia

$$\begin{gathered} \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \Omega_0^2 x = 0 \\ \gamma = \frac{\eta}{2m} \qquad ; \qquad \Omega_0^2 = \frac{k}{m} \end{gathered} \tag{10.29}$$

La soluzione dell'Eq. (10.29) si trova con l'ansatz $x(t) = A\mathrm{e}^{st}$, essendo s una quantità complessa. Si ottiene quindi un'equazione algebrica in s:

$$s^2 + 2\gamma s + \Omega_0^2 = 0$$
$$s_\pm = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2}$$

La soluzione generale di $x(t)$ è dunque una combinazione lineare che coinvolge entrambi i coefficienti $s_\pm$:

$$\begin{aligned} x_\pm(t) &= \mathrm{e}^{-(\gamma \mp \sqrt{\gamma^2-\Omega_0^2})t} \\ x(t) &= A_+ x_+(t) + A_- x_-(t) \end{aligned} \tag{10.30}$$

Condizioni iniziali

I coefficienti $A_\pm$ sono complessi, e vanno fissati con le condizioni iniziali, $x(0)$ e $(dx/dt)_{(t=0)}$. Per esempio, assumiamo $x(0) = A_0$ e $(dx/dt)_{(t=0)} = 0$; allora:

$$A_+ + A_- = A_0 \qquad ; \qquad A_+ s_+ + A_- s_- = 0$$
$$A_\pm = \mp A_0 \frac{s_\mp}{s_+ - s_-}$$

quindi, con un po' di algebra:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_+ \mathrm{e}^{s_+ t} + A_- \mathrm{e}^{s_- t} \\ &= A_0 \mathrm{e}^{-\gamma t} \left[\cosh\left(\sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2}\, t\right) + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2}} \sinh\left(\sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2}\, t\right) \right] \end{aligned}$$

Moto completamente smorzato

Se l'attrito è molto forte, $\gamma > \Omega_0$, $s_\pm \in \mathbb{R}$ e $(\gamma \mp \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2}) > 0$, quindi si ottiene il moto completamente smorzato:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_+ \mathrm{e}^{-\left(\gamma - \sqrt{\gamma^2-\Omega_0^2}\right)t} + A_- \mathrm{e}^{-\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2-\Omega_0^2}\right)t} \\ &\qquad (\gamma > \Omega_0;\ \text{moto completamente smorzato}) \end{aligned} \tag{10.31}$$

I coefficienti $A_\pm$ sono reali. Il moto è la somma di due moti esponenziali, con tempi di smorzamento

$$\tau_\pm = \frac{1}{\gamma \mp \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2}}$$

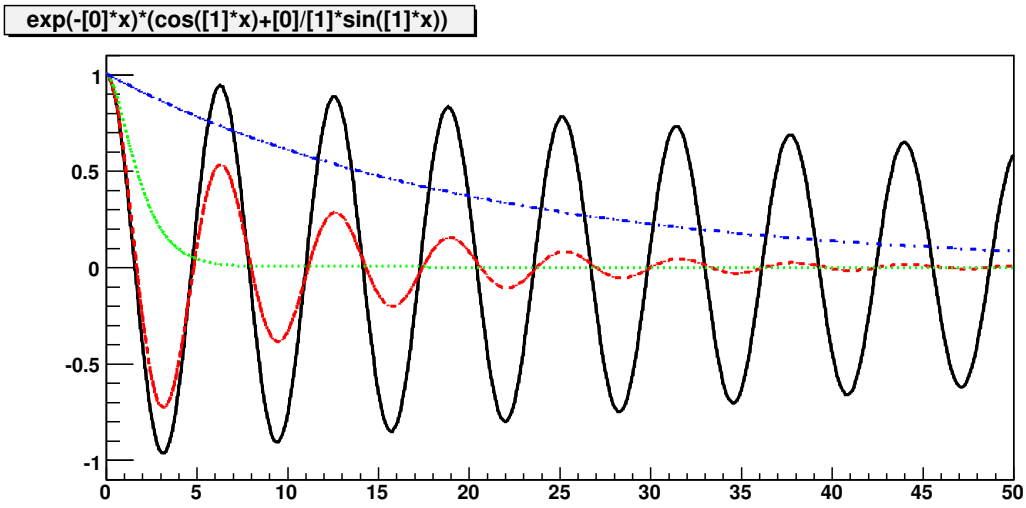


Figura 10.5: *Andamenti dell'oscillatore con attrito per $\Omega_0 = 1$ e diversi valori di γ: 0.01 (curva continua), 0.1 (curva tratteggiata), 1 (curva punteggiata, moto critico) e 10 (curva tratto-punto, moto smorzato).*

Moto oscillatorio smorzato

In caso di attrito debole, $\gamma < \Omega_0$, quindi $s_\pm$ sono complessi coniugati:

$$\begin{aligned} s_\pm &= -\gamma \pm i\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2} \\ x(t) &= \mathrm{e}^{-\gamma t}\left(A_+ \mathrm{e}^{i\sqrt{\Omega_0^2-\gamma^2}\,t} + A_- \mathrm{e}^{-i\sqrt{\Omega_0^2-\gamma^2}\,t}\right) \end{aligned}$$

Per avere $x(t) \in \mathbb{R}$ occorre che $A_+ = (A_-)^* = \frac{1}{2}A\mathrm{e}^{i\alpha}$, cioè:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{-\gamma t}\mathbf{Re}\left(A\mathrm{e}^{i(\Omega' t+\alpha)}\right) = A\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\Omega' t + \alpha) \\ &\left(\Omega' = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2};\ \text{moto oscillatorio smorzato}\right) \end{aligned} \tag{10.32}$$

Le costanti A, α si ottengono imponendo le condizioni iniziali $x(0) = A_0, (dx/dt)_{(t=0)} = 0$:

$$\alpha = -\tan^{-1}\left(\frac{\gamma}{\Omega'}\right) \qquad ; \qquad A = A_0\frac{\Omega_0}{\Omega'}$$

quindi:

$$x(t) = A_0\mathrm{e}^{-\gamma t}\left[\cos(\Omega' t) + \frac{\gamma}{\Omega'}\sin(\Omega' t)\right]$$

Moto critico

Un caso limite è quello di $\gamma = \Omega_0$; in tal caso le due soluzioni coincidono, $s_\pm = -\gamma$; allora l'equazione differenziale ammette due soluzioni $\mathrm{e}^{-\gamma t}$ e $t\mathrm{e}^{-\gamma t}$, quindi

$$x(t) = (A + Bt)\mathrm{e}^{-\gamma t} \qquad (\Omega_0 = \gamma;\ \text{moto critico}) \tag{10.33}$$

Le costanti A, B si ottengono imponendo le condizioni iniziali $x(0) = A_0, (dx/dt)_{(t=0)} = 0$, ottenendo:

$$x(t) = A_0(1 + \gamma t)\mathrm{e}^{-\gamma t}$$

10.4.2 Oscillatore armonico smorzato con forzante

Ora applichiamo una forza esterna

$$F^{\mathrm{est}}(t) = F_0\mathrm{e}^{i\Omega t} = m \cdot f\mathrm{e}^{i\Omega t}$$

L'equazione del moto, Eq. (10.29), diventa:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \Omega_0^2 x = f\mathrm{e}^{i\Omega t} \tag{10.34}$$

La soluzione generale è data da una soluzione particolare, $\bar{x}(t)$, dell'Eq. (10.34), più la soluzione generale del moto libero (Eq. (10.31), Eq. (10.32), Eq. (10.33) a seconda dei casi). Per la soluzione particolare proviamo l'ansatz:

$$\bar{x}(t) = \bar{A}\mathrm{e}^{i\Omega t} = \rho\mathrm{e}^{i(\Omega t + \phi)}$$

che, imposta nell'Eq. (10.34) dà:

$$(-\Omega^2 + 2i\Omega\gamma + \Omega_0^2)\bar{A}\mathrm{e}^{i\Omega t} = f\mathrm{e}^{i\Omega t}$$

da cui:

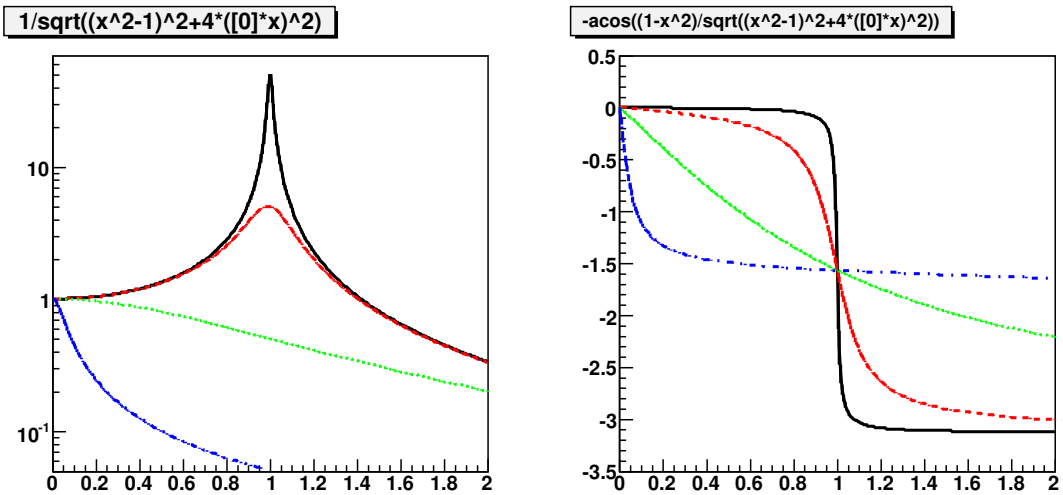


Figura 10.6: *Curva di risonanza (a sinistra) e di fase (a destra) per* $\Omega_0 = 1$ *e diversi valori di* γ*: 0.01, 0.1, 1, 10.*

$$
\begin{aligned}
\bar{A} &\equiv \rho e^{i\phi} \cdot f = \frac{f}{\Omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} \\
\rho &= \rho(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4(\gamma\Omega)^2}} \\
\phi &= \phi(\Omega) = -\cos^{-1}\left(\frac{\Omega_0^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4(\gamma\Omega)^2}}\right) \qquad (-\pi < \phi < 0)
\end{aligned}
\tag{10.35}
$$

(la scelta di ricavare ϕ attraverso il coseno è perché esso è invertibile con continuità nell'intervallo $|\phi| \in [0; \pi]$; l'ambiguità di segno è risolta con il $-$ davanti a $\cos^{-1}$, che deriva dal fatto che $(\Omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega)$ ha fase positiva, quindi il suo reciproco ha fase negativa).

Moto a regime, risonanza

Poiché le soluzioni del moto libero sono sempre di tipo smorzato, la soluzione particolare è anche quella che sopravvive dopo un tempo transitorio in cui quelle del moto libero vanno a zero.

A parità di forzante f, l'ampiezza del moto dipende dalla pulsazione della forzante, Ω; inoltre fra la forzante e il moto è presente una fase, ϕ. Per

studiare la dipendenza, osserviamo che

$$\frac{\partial}{\partial(\Omega^2)}\left[(\Omega_0^2-\Omega^2)^2+4(\gamma\Omega)^2\right]=2(\Omega^2-\Omega_0^2)+4\gamma^2$$

quindi $\rho(\Omega)$ è sempre decrescente per $\Omega^2>\Omega_0^2-2\gamma^2$. Se $\gamma<\frac{1}{2}\Omega_0$ (si noti che così siamo nel regime di moto oscillatorio smorzato) allora esiste un massimo di $\rho(\Omega)$ alla *pulsazione di risonanza*:

$$\begin{aligned}\Omega_{\rm ris} &= \sqrt{\Omega_0^2-2\gamma^2}\\ \rho_{\rm ris} &= \frac{1}{2\gamma\sqrt{\Omega_0^2-\gamma^2}}\end{aligned} \tag{10.36}$$

Quant'è largo questo massimo? Cerchiamo valori di Ω tali che $\rho(\Omega)=\rho_{\rm ris}/\alpha$, $\alpha>1$ (per es. $\alpha=2$, $\alpha=10^n\ldots$). È facile verificare che la soluzione è:

$$(\Omega_{1/\alpha})^2 = \Omega_{\rm ris}^2\pm 2\gamma\sqrt{(\alpha^2-1)(\Omega_0^2-\gamma^2)}$$

cioè la larghezza è proporzionale a γ.

Attrito debole, risonanza stretta

Un sistema fisico spesso si trova in una situazione di attrito debole, cioè $\gamma\ll\Omega_0$. In tal caso $\Omega_{\rm ris}\simeq\Omega_0$, e i valori di Ω^2 per cui ρ è significativamente >0 sono vicini a Ω_0^2, quindi possiamo porre $\Omega^2-\Omega_0^2=(\Omega+\Omega_0)(\Omega-\Omega_0)\simeq 2\Omega_0(\Omega-\Omega_0)$. Le formule per ρ,ϕ nell'Eq. (10.35) possono essere semplificate:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho(\Omega)=\frac{1}{2\Omega_0\sqrt{(\Omega-\Omega_0)^2+\gamma^2}}\\ \phi &= \phi(\Omega)=-\cos^{-1}\left(\frac{\Omega_0-\Omega}{\sqrt{(\Omega-\Omega_0)^2+\gamma^2}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\gamma}{\Omega-\Omega_0}\right)\\ &\quad(-\pi<\phi<0)\end{aligned} \tag{10.37}$$

e la formula della larghezza diventa:

$$\Omega_{1/\alpha}-\Omega_{\rm ris} = \pm\gamma\sqrt{\alpha^2-1}$$

In particolare la larghezza totale a metà altezza (FWHM) è:

$$\Delta\Omega=2\sqrt{3}\gamma \tag{10.38}$$

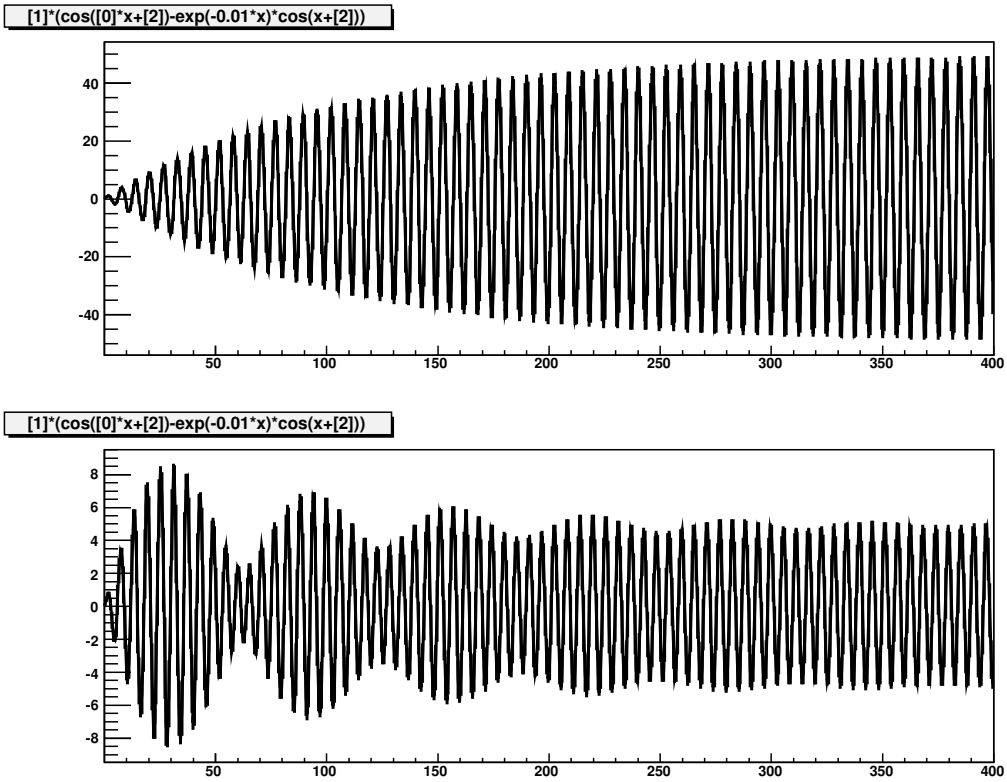


Figura 10.7: *Moto dell'oscillatore forzato con attrito, per* $\Omega_0 = 1$, $\gamma = 0.01$ *e diversi valori della pulsazione forzante:* $\Omega = 1$, 1.1.

Transiente

Nel transiente, la soluzione è data dalla somma della soluzione particolare, $f\,\rho e^{i(\Omega t+\phi)}$ e della soluzione generale omogenea, Eq. (10.32). Lavoriamo nel regime di piccoli attriti, $\gamma \ll \Omega_0$, cosicché poniamo $\Omega' = \Omega_0$:

$$x(t) \quad = \quad f\,\rho\cos(\Omega t + \phi) + Ae^{-\gamma t}\cos(\Omega_0 t + \alpha)$$

Le costanti A, α vanno fissate con le condizioni iniziali. Supponiamo di accendere la forzante a $t = 0$, e che per $t < 0$ il sistema fosse in quiete,

cioè $x(0) = 0$ e $(dx/dt)_{(t=0)} = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= f\rho\cos\phi + A\cos\alpha \\ 0 &= -f\rho\Omega\sin\phi - A(\gamma\cos\alpha + \Omega_0\sin\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\rho\Omega\sin\phi &= -A\cos\alpha(\gamma + \Omega_0\tan\alpha) = f\rho\cos\phi(\gamma + \Omega_0\tan\alpha) \\ \gamma + \Omega_0\tan\alpha &= \Omega\tan\phi = \frac{\Omega\gamma}{\Omega - \Omega_0} \\ \tan\alpha &= \frac{\gamma}{\Omega - \Omega_0} = \tan\phi \\ A &= -f\rho \end{aligned}$$

Quindi il moto nel regime transiente è:

$$x(t) = f\,\rho\,\left[\cos(\Omega t + \phi) - \mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\Omega_0 t + \phi)\right] \tag{10.39}$$

Capitolo 11

Interazioni a distanza, campi di forza

11.1 Campi di forza

La forza $\vec{\boldsymbol{F}}$ agente su un oggetto dipende dall'ambiente in cui l'oggetto si trova. Abbiamo più volte detto che la forza su un oggetto è causata dagli altri oggetti che stanno intorno ad esso. Nel caso delle forze "di contatto", trattate nel Capitolo 9, la situazione è relativamente semplice: la forza si manifesta solo al momento in cui c'è il contatto, altrimenti la forza non c'è.

Ora però consideriamo le forze che agiscono a distanza (per esempio, forza gravitazionale, forza elettrica, forza magnetica, ...). Il sistema di forze, che un oggetto sente, dipende dalla sua posizione e distanza relativa a tutto ciò che lo circonda. Non c'è da stupirsi, dunque, se ci si accorge, con diverse misure, che spostando il nostro oggetto nello spazio, la forza agente su di esso cambia. In generale, la forza dipende dunque dalla posizione:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \tag{11.1}$$

e si chiama per questo *forza posizionale*. In tal caso la funzione $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ si chiama *campo di forza*.

Per "esplorare" un campo di forze, il procedimento — applicato o concettuale che sia — è quello di porre un oggetto chiamato "sonda" in varie posizioni e misurare la forza che su di esso agisce, per esempio misurandone l'accelerazione.

Attribuiamo quindi al campo di forza un significato fisico. Siccome stiamo parlando di forze a distanza, non c'è contatto fra l'oggetto-sonda e gli oggetti che costituiscono l'ambiente circostante, quindi potremmo ingenuamente

chiederci: "come fa un oggetto-sonda a sapere che si trova in una certa posizione rispetto a tutti gli altri oggetti che lo circondano?" La meccanica classica non dà una risposta a questa domanda, però ne condensa la riflessione nel concetto di campo di forze: l'ambiente che circonda il nostro oggetto è influenzato da tanti altri oggetti, che contribuiscono a generare un campo di forze $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$, definito in ogni punto $\vec{\boldsymbol{r}}$ dello spazio. Questo campo è un attributo dello spazio, con proprietà fisiche ben precise, tali che l'oggetto-sonda, quando si trovi in una posizione $\vec{\boldsymbol{r}}$, "sa che deve subire" una forza $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ [1].

La nostra "sonda" in generale può subire azioni diverse, sia per ciò che le causa (i diversi oggetti circostanti) sia per la loro natura (effetti elettrici, magnetici, gravitazionali, ...). Ciascuna di queste è descrivibile con un campo di forza $\vec{\boldsymbol{F}}_k(\vec{\boldsymbol{r}})$. Ricordando che le forze si compongono secondo la somma vettoriale, anche il *campo di forze risultante* seguirà la stessa legge di composizione:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{tot}(\vec{\boldsymbol{r}}) \;=\; \sum_k \vec{\boldsymbol{F}}_k(\vec{\boldsymbol{r}}) \tag{11.2}$$

Qui di seguito introduciamo alcuni campi di forza notevoli, di cui faremo uso nel seguito.

11.2 Forze gravitazionali

La gravità è una forza che agisce su qualunque oggetto dotato di massa, ed è causata dalla presenza di altre masse. La gravità governa i moti dei pianeti nel Sistema Solare, il moto dei satelliti intorno al loro pianeta, il moto delle stelle in una galassia, ma anche il moto di un oggetto in prossimità della superficie di un pianeta: la forza-peso

$$\vec{\boldsymbol{F}}_g = -mg\hat{\boldsymbol{z}} \qquad \text{(forza-peso)}$$

[1] Se questo discorso vi sembra non spiegare niente, beh, non posso darvi torto. In effetti non fornisce una spiegazione più profonda della semplice presa d'atto che "esistono forze a distanza". Tuttavia il concetto di campo è estremamente utile. La meccanica quantistica fornisce una spiegazione più profonda delle interazioni a distanza. Il "campo" è formato da "particelle virtuali" — i "quanti" — che vengono emesse e assorbite dalle particelle fondamentali: per esempio, tutte le particelle cariche possono emettere fotoni virtuali, che non si propagano all'infinito, ma vengono assorbiti da altre particelle cariche. I "quanti" dunque fanno da messaggeri delle interazioni, e in modo suggestivo potremmo dire che comunicano alla particella-sonda la presenza di tutte le altre particelle dell'ambiente circostante.

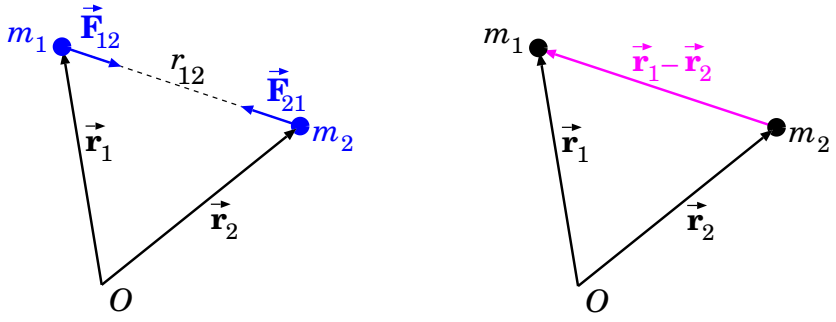


Figura 11.1: *Forza gravitazionale fra due masse m_1, m_2 separate da una distanza r_{12}.*

è un caso particolare di forza di gravità. Approfondiremo questi moti nel Capitolo 19: qui per ora ci limitiamo ad enunciare le principali proprietà della gravità.

11.2.1 Legge della gravitazione universale

Due oggetti di masse m_1, m_2, posti a distanza r_{12}, e di estensione molto minore rispetto alla loro distanza ("puntiformi"), subiscono un'attrazione reciproca descritta dalla *legge della gravitazione universale*:

$$F_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \tag{11.3}$$

essendo G la "costante di Newton", o "costante di gravitazione universale", il cui valore è:

$$G = 6.674 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}} \tag{11.4}$$

La forza $\vec{\boldsymbol{F}}_{12}$ applicata a m_1 da m_2, e la forza $\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$ applicata a m_2 da m_1, sono dirette come in Fig. 11.1(sinistra). Aiutandosi con la Fig. 11.1(destra), possiamo scrivere in forma vettoriale:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{F}}_{12} &= -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2|^3}\,(\vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2) \\ \vec{\boldsymbol{F}}_{21} &= -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2|^3}\,(\vec{\boldsymbol{r}}_2 - \vec{\boldsymbol{r}}_1) \end{aligned} \tag{11.5}$$

da cui è evidente che queste due forze rispettano il principio di azione-reazione: sono opposte ($\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$) e dirette lungo la linea congiungente le masse m_1, m_2 (linea definita dal vettore-differenza $\vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2$).

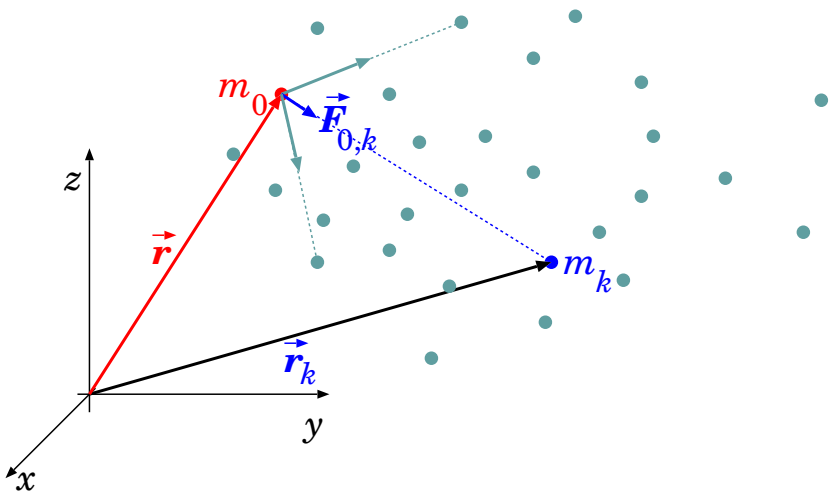


Figura 11.2: *Forze gravitazionali su una massa-sonda m_0, prodotte da masse circostanti $m_1, \ldots, m_N$. In evidenza, la k-esima massa m_k posta in posizione $\vec{r}_k$, che produce una forza $\vec{F}_{0,k}$ sulla massa-sonda m_0.*

11.2.2 Il campo gravitazionale

Una massa-sonda m_0 posta in $\vec{r}$, in presenza di una massa m_k posta in $\vec{r}_k$, "sente" una forza gravitazionale data da

$$\vec{F}_{0,k} = -G\frac{m_0 m_k}{r_{k,0}^2}\hat{r}_{k0} = -Gm_0 m_k \frac{\vec{r}-\vec{r}_k}{|\vec{r}-\vec{r}_k|^3} \tag{11.6}$$

La forza totale generata sulla sonda m_0 da un sistema di N masse "puntiformi" $m_1, m_2, \ldots, m_N$ poste nelle posizioni $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$ è:

$$\vec{F}_0 = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{0,k} = m_0 \left(-G \sum_k m_k \frac{\vec{r}-\vec{r}_k}{|\vec{r}-\vec{r}_k|^3} \right) \tag{11.7}$$

che ovviamente è funzione della posizione $\vec{r}$ della sonda: quindi è un campo di forza.

La fattorizzazione di m_0 fuori dalla sommatoria nell'Eq. (11.7), suggerisce di definire il *campo gravitazionale* in maniera indipendente dalla massa della sonda:

$$\vec{g}(\vec{r}) \;=\; -G \sum_k m_k \frac{\vec{r}-\vec{r}_k}{|\vec{r}-\vec{r}_k|^3} \tag{11.8}$$

e tale che la forza gravitazionale su un oggetto di massa m_0 nella posizione $\vec{r}$ sia:

$$\vec{F}_g = m_0\, \vec{g}(\vec{r}) \tag{11.9}$$

11.2.3 Gravità, massa e accelerazione

Abbiamo visto che $\vec{\boldsymbol{F}}_g = m\vec{\boldsymbol{g}}$, ovvero che la forza di gravità è sempre direttamente proporzionale alla massa che la subisce.

È importante sottolineare la differenza fra $\vec{\boldsymbol{F}} = m\vec{\boldsymbol{a}}$ e $\vec{\boldsymbol{F}}_g = m\vec{\boldsymbol{g}}$: nel primo caso, $\vec{\boldsymbol{a}}$ è conseguenza di $\vec{\boldsymbol{F}}$, nel secondo invece $\vec{\boldsymbol{g}}$ è la causa di $\vec{\boldsymbol{F}}_g$.

$$\text{agisce una forza generica} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{F}} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{m}$$

$$\text{agisce una forza gravitazionale} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{F}}_g = m\vec{\boldsymbol{g}} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}_g}{m} = \vec{\boldsymbol{g}}$$

Se l'unica forza agente sull'oggetto è quella gravitazionale, l'accelerazione dell'oggetto è indipendente dall'oggetto stesso:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}_g}{m} = \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \tag{11.10}$$

Questa è una proprietà molto peculiare: l'accelerazione prodotta da un campo gravitazionale è indipendente dalla massa dell'oggetto accelerato. Solo il campo gravitazionale possiede questa proprietà.

11.3 Forze elettromagnetiche (cenni)

L'elettromagnetismo è una vastissima branca della fisica classica: sarebbe fuori luogo affrontarlo qui. Tuttavia l'interazione elettromagnetica è una delle interazioni fondamentali, pertanto ci limitiamo ad introdurla qui, citando alcune sue proprietà — quelle più semplici!

Un oggetto dotato di carica elettrica q subisce una *forza elettrica* e una *forza magnetica*, descritte da:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{em} = q\left[\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) + \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\right] \tag{11.11}$$

dove i campi vettoriali $\vec{\boldsymbol{E}}$ e $\vec{\boldsymbol{B}}$ sono rispettivamente il *campo elettrico* e il *campo magnetico*. Queste forze sono schematizzate in Fig. 11.3.

Si noti che la componente elettrica della forza, $q\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$, dipende in generale dalla posizione dell'oggetto; invece la componente magnetica, $q\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})$, dipende sia dalla posizione (attraverso $\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})$) che dalla velocità $\vec{\boldsymbol{v}}$.

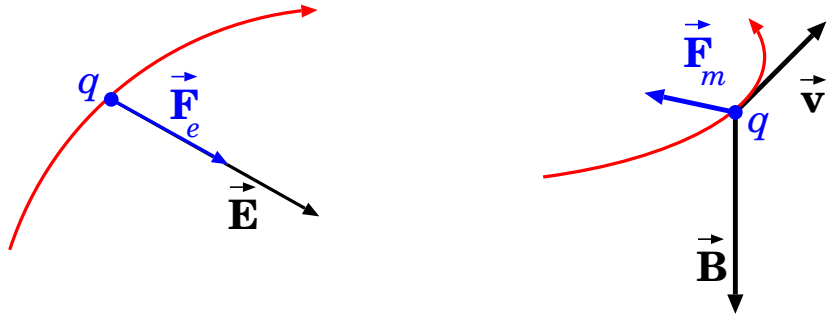


Figura 11.3: *Forza elettrica* $\vec{F}_e = q\vec{E}$ *e forza magnetica* $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$, *disegnate per* $q > 0$ *(per* $q < 0$ *occorre invertire gli orientamenti di* $\vec{F}_e$, $\vec{F}_m$*).*

Un'altra peculiarità della forza magnetica è che essa è sempre ortogonale alla velocità — come conseguenza del prodotto vettoriale $\vec{v} \times \vec{B}$. Quindi non produce mai accelerazione tangenziale. Quindi non può mai alterare il modulo della velocità $v = |\vec{v}|$, mentre in generale produce deflessioni nella traiettoria. Possiamo inoltre osservare che *la forza magnetica non rispetta il principio di azione-reazione*, almeno per quel che riguarda l'allineamento con la linea congiungente la sonda con la sorgente: infatti, è sempre ortogonale a $\vec{v}$, a prescindere da dove sia la sorgente del campo $\vec{B}$.

L'accelerazione di un oggetto di massa m dotato di carica q, in presenza di un campo elettromagnetico, è:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{em}}{m} = \frac{q}{m}\left[\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})\right] \tag{11.12}$$

11.3.1 Unità di misura elettromagnetiche

La carica elettrica si misura in Coulomb (C); il campo elettrico in "Newton su Coulomb" (N/C); il campo magnetico si misura in Tesla (T $\equiv$ NC^{-1}m^{-1}s).

11.3.2 Campo elettrico generato da cariche ferme

Due cariche elettriche "puntiformi" q_1, q_2 <u>*in quiete*</u>, a distanza r_{12}, si scambiano una *forza elettrostatica*

- *repulsiva* se le cariche q_1, q_2 hanno lo stesso segno (ovvero, entrambe positive, oppure entrambe negative);
- *attrattiva* se le cariche q_1, q_2 hanno segno opposto (ovvero, una positiva e una negativa).

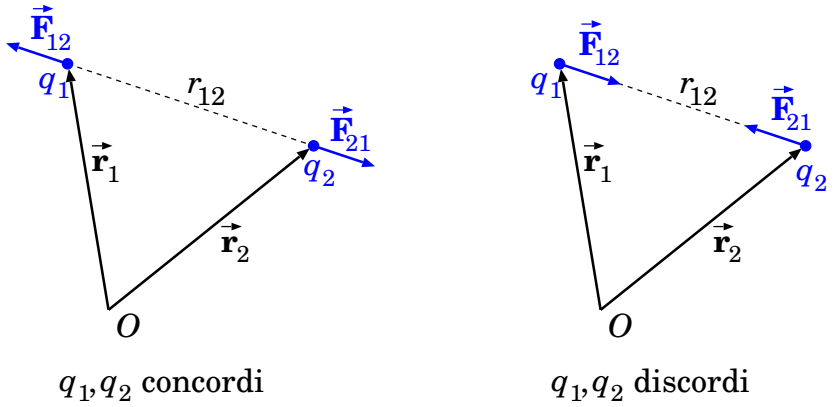


Figura 11.4: *Forza elettrica "coulombiana", fra due cariche elettriche* q_1, q_2 *separate da una distanza* r_{12}. *A sinistra: cariche dello stesso segno dànno una forza repulsiva. A destra: cariche di segno opposto dànno una forza repulsiva.*

L'intensità di tale forza è data dalla *legge di Coulomb*:

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \qquad (q_1, q_2 \text{ in quiete}) \tag{11.13}$$

essendo

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.98755179 \cdot 10^9 \ \mathrm{N\,m^2 C^{-2}} \simeq 9 \cdot 10^9 \ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}} \tag{11.14}$$

(il che significa che $\epsilon_0 = 8.85418782 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2\,N^{-1}\,m^{-2}}$ — ma l'Eq. (11.14) è più facile da ricordare, specialmente nella sua forma approssimata!)

Si noti la notevole similitudine fra forze elettriche e forze gravitazionali (vd Eq. (11.3)). Tuttavia vi è una differenza fondamentale: *la forza gravitazionale è sempre attrattiva.*

La forza $\vec{\boldsymbol{F}}_{12}$ applicata a q_1 da q_2, e la forza $\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$ applicata a q_2 da q_1, sono dirette come in Fig. 11.4. Ragionando come per le forze gravitazionali, possiamo scrivere in forma vettoriale:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{F}}_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2|^3}\,(\vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2) \\ \vec{\boldsymbol{F}}_{21} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2|^3}\,(\vec{\boldsymbol{r}}_2 - \vec{\boldsymbol{r}}_1) \end{aligned} \tag{11.15}$$

da cui è evidente che anche le forze coulombiane rispettano il principio di azione-reazione: sono opposte ($\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$) e dirette lungo la linea congiungente le cariche q_1, q_2 (linea definita dal vettore-differenza $\vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2$).

Una carica-sonda q_0 posta in $\vec{\boldsymbol{r}}$ "sente" la forza elettrica di una carica q_k posta in $\vec{\boldsymbol{r}}_k$:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{0,k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_0 q_k}{r_{k,0}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{k0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 q_k \frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k|^3} \tag{11.16}$$

pertanto la carica q_k genera nello spazio circostante un campo elettrico:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_k(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k|^3} \qquad (q_k \text{ in quiete}) \tag{11.17}$$

che si chiama *campo elettrostatico*, perché l'espressione è valida a rigore solo per q_k ferma. In realtà è valida con buona approssimazione anche se q_k si muove con velocità $v_k \ll c$ — essendo $c = 300\,000$ km/s $= 3 \cdot 10^8$ m/s la velocità della luce. Per cariche elettriche in moto rapido, le equazioni del campo diventano molto più complesse, e qui non vengono trattate: occorrerebbe fare uso delle *equazioni di Maxwell*.

11.3.3 Confronto fra forza di Coulomb e forza gravitazionale

La forza gravitazionale Eq. (11.3) è molto più debole della forza di Coulomb Eq. (11.13).

Come semplice esempio, consideriamo l'atomo di idrogeno. È formato da un protone (carica $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C e massa $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg) e da un elettrone (carica $-e$ e massa $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg). La distanza media dell'elettrone dal protone, nello stato più stabile dell'atomo di idrogeno, è il cosiddetto *raggio di Bohr*: $r_B = 5.29 \cdot 10^{-11}$ m.

Come sono le intensità delle due forze (chiamiamole F_C e F_G)? Quale delle due è dominante, e di quanto?

$$\begin{aligned} F_C &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_B^2} = 8.24 \cdot 10^{-8} \text{ N} \\ F_G &= G\frac{m_e m_p}{r_B^2} = 3.63 \cdot 10^{-47} \text{ N} \end{aligned} \tag{11.18}$$

Su scala atomica, la forza di Coulomb è 10^{39} volte (mille miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di volte) più forte di quella gravitazionale! Nessuna sorpresa, dunque, che nella fisica atomica la gravità non venga nemmeno considerata.

11.3.4 Sorgenti di campi elettromagnetici (cenni) (*)

Abbiamo visto che la forza elettromagnetica su una carica q_0, dotata di velocità $\vec{\boldsymbol{v}}$, in presenza di un campo elettrico $\vec{\boldsymbol{E}}$ e di un campo magnetico $\vec{\boldsymbol{B}}$ è

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{em} = q_0 \left(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}} \right) \tag{11.19}$$

Quindi:

- qualunque carica elettrica sente il campo elettrico;
- qualunque carica elettrica *in movimento* sente il campo magnetico.

In generale, in fisica vale una sorta di principio di reciprocità, per cui un oggetto che sente una interazione è anche in grado di produrla su altri oggetti. Nel caso elettromagnetico

- qualunque carica elettrica contribuisce a generare campo elettrico;
- qualunque carica elettrica *in movimento* contribuisce a generare campo magnetico.

Anche per i campi elettrico e magnetico vige la proprietà di composizione vettoriale. Il k-esimo oggetto carico produce nella posizione $\vec{\boldsymbol{r}}$ un campo elettrico $\vec{\boldsymbol{E}}_k(\vec{\boldsymbol{r}})$ e un campo magnetico $\vec{\boldsymbol{B}}_k(\vec{\boldsymbol{r}})$: questi producono, su una carica-sonda q_0 posta in $\vec{\boldsymbol{r}}$ e dotata di velocità $\vec{\boldsymbol{v}}$, una forza:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{0,k}(\vec{\boldsymbol{r}}) = q_0 \left[\vec{\boldsymbol{E}}_k(\vec{\boldsymbol{r}}) + \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}_k(\vec{\boldsymbol{r}}) \right]$$

Quindi la forza risultante sulla carica-sonda è:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{F}}_0(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \sum_k \vec{\boldsymbol{F}}_{0,k}(\vec{\boldsymbol{r}}) = q_0 \sum_k \left[\vec{\boldsymbol{E}}_k(\vec{\boldsymbol{r}}) + \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}_k(\vec{\boldsymbol{r}}) \right] \\ &= q_0 \left[\sum_k \vec{\boldsymbol{E}}_k(\vec{\boldsymbol{r}}) \right] + q_0 \, \vec{\boldsymbol{v}} \times \left[\sum_k \vec{\boldsymbol{B}}_k(\vec{\boldsymbol{r}}) \right] \end{aligned}$$

L'ultima scrittura è formalmente identica all'Eq. (11.19), purché si identifichino:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{E}}_{tot}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \sum_k \vec{\boldsymbol{E}}_k(\vec{\boldsymbol{r}}) \\ \vec{\boldsymbol{B}}_{tot}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \sum_k \vec{\boldsymbol{B}}_k(\vec{\boldsymbol{r}}) \end{aligned} \tag{11.20}$$

Abbiamo già visto nella Sezione 11.3.2 la forma del campo elettrico generato da cariche elettriche ferme

$$\vec{\boldsymbol{E}}_k(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_k}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_k|^3} \tag{11.21}$$

Quando le cariche sono in moto, la forma di $\vec{\boldsymbol{E}}_k$, $\vec{\boldsymbol{B}}_k$ diventa estremamente complicata, ed è decisamente fuori scopo trattarla qui. Ricordiamo solo che si ricava dalle *equazioni di Maxwell*.

Ci limitiamo al caso di una carica q_k dotata di *moto lento* e *non accelerato o poco accelerato* rispetto alle distanze in gioco:

$$v_k \ll c \quad ; \quad |\vec{\boldsymbol{a}}_k| \ll \frac{c^2}{\text{distanze}}$$

In tal caso, senza dimostrazioni, riportiamo che l'Eq. (11.21) è ancora valida, e il campo magnetico prende la forma:

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{B}}_k(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \frac{1}{c^2}\vec{\boldsymbol{v}}_k \times \vec{\boldsymbol{E}}_k(\vec{\boldsymbol{r}}) \\ &= \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_k \times (\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_k)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_k|^3} \\ &\qquad\qquad (v_k \ll c\ ;\ \left|\frac{d\vec{\boldsymbol{v}}_k}{dt}\right| \ll \frac{c^2}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_k|})\end{aligned} \tag{11.22}$$

La costante $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}$ vale *esattamente*

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} = 10^{-7}\ \mathrm{TC^{-1}ms} = 10^{-7}\ \mathrm{NC^{-2}s^2} \tag{11.23}$$

Esempio: moto dell'elettrone nell'atomo di idrogeno

Nel "modello di Bohr", l'atomo di idrogeno è costituito da un protone, con un elettrone che gli orbita intorno a distanza $r_B = 5.29 \cdot 10^{-11}$ m, *lungo una traiettoria circolare* [2]. *Vediamo se questo modello soddisfa le condizioni* $v \ll c$ *e*

[2] Una precisazione è doverosa: solo nell'ambito della meccanica quantistica è possibile dare una descrizione accurata dell'atomo di idrogeno. In essa, l'elettrone non segue una traiettoria nel senso classico, bensì è "delocalizzato", ovvero la sua posizione è aleatoria, e la probabilità di osservarlo in un determinato punto (oppure, ad una data distanza r dal protone) è calcolabile dalla funzione d'onda. Qui stiamo considerando invece un modello semi-classico, in cui l'elettrone descrive un'orbita circolare intorno al protone, ma solo alcune distanze r sono possibili, corrispondenti a precisi livelli energetici "quantizzati".

$\left|\frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt}\right| \ll \frac{c^2}{|\Delta\vec{\boldsymbol{r}}|}$.

La forza coulombiana fra protone ed elettrone è $F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_B^2}$. *Essa deve essere uguale alla forza centripeta sull'elettrone:* $F_n = \frac{m_e v_e^2}{r_B}$.

Uguagliando le due espressioni si ricava $v_e = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m_e r_B}} = \sqrt{9\cdot 10^9 \mathrm{NC}^{-2}\mathrm{m}^2 \frac{(1.602\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(9.11\cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg})(5.29\cdot 10^{-11}\ \mathrm{m})}} \simeq 2.2\cdot 10^6\ \mathrm{m/s}$. *Sicuramente una velocità elevata, ma piccola rispetto alla velocità della luce:* $\frac{v_e}{c} \simeq 7\cdot 10^{-3}$.

L'accelerazione centripeta è $a_n = \frac{v_e^2}{r_B}$. *Anche senza calcolarne il valore, vediamo già che all'interno dell'atomo, dunque per distanze* $\Delta r \approx r_B$, *abbiamo* $a_n = \frac{v_e^2}{r_B} \ll \frac{c^2}{\Delta r}$. *Quindi siamo nell'ambito di moto "poco accelerato".*

Giusto per completezza di esercizio, calcoliamo l'accelerazione: $a_n = \frac{(2.2\cdot 10^6\ \mathrm{m/s})^2}{5.29\cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}} \simeq 9\cdot 10^{22}\ \mathrm{m/s^2}$. *Decisamente grande! Ma "piccola" nell'ambito delle dimensioni dell'atomo.*

Violazione del principio di azione-reazione (*)

Consideriamo due cariche q_1, q_2, *poste nelle posizioni* $\vec{\boldsymbol{r}}_1, \vec{\boldsymbol{r}}_2$ *e dotate di velocità* $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2$. *Proviamo a calcolare le forze magnetiche che esercitano l'una sull'altra.*

La carica q_1 *produce nella posizione generica* $\vec{\boldsymbol{r}}$ *un campo magnetico:*

$$\vec{\boldsymbol{B}}_1(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_1\times(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_1)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_1|^3}$$

il quale esercita una forza $\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$ *su* q_2 *pari a*

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{21} = q_2\vec{\boldsymbol{v}}_2\times\vec{\boldsymbol{B}}_1(\vec{\boldsymbol{r}}_2)$$

Già qui possiamo notare qualcosa di inaspettato: per le proprietà del prodotto vettoriale, $\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$ *è sempre perpendicolare a* $\vec{\boldsymbol{v}}_2$, *quindi la direzione della forza magnetica dipende dal moto della carica che la subisce. Viceversa, dal principio di azione-reazione, la forza fra* q_1 *e* q_2 *dovrebbe essere sempre diretta lungo la linea che congiunge le due cariche,indipendentemente da come queste si muovono!*

Ma andiamo oltre e sviluppiamo ulteriormente i nostri calcoli. Ricordiamo a questo punto una identità vettoriale: $\vec{\boldsymbol{A}}\times(\vec{\boldsymbol{B}}\times\vec{\boldsymbol{C}}) = \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{C}}) - \vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}})$. *Allora otteniamo:*

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{F}}_{21} &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_2\times[\vec{\boldsymbol{v}}_1\times(\vec{\boldsymbol{r}}_2-\vec{\boldsymbol{r}}_1)]}{|\vec{\boldsymbol{r}}_2-\vec{\boldsymbol{r}}_1|^3} \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left[\vec{\boldsymbol{v}}_1\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_2\cdot(\vec{\boldsymbol{r}}_2-\vec{\boldsymbol{r}}_1)}{|\vec{\boldsymbol{r}}_2-\vec{\boldsymbol{r}}_1|^3} - (\vec{\boldsymbol{r}}_2-\vec{\boldsymbol{r}}_1)\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_1\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_2}{|\vec{\boldsymbol{r}}_2-\vec{\boldsymbol{r}}_1|^3}\right]\end{aligned}$$

Qui vediamo meglio quello che già abbiamo accennato: una componente della forza (la seconda) è allineata lungo la congiungente le due cariche (infatti è diretta come $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$); un'altra componente invece è parallela alla velocità $\vec{v}_1$ della sorgente del campo magnetico $\vec{B}_1$.

Non solo! Possiamo ripetere tutti i calcoli per ottenere $\vec{F}_{12}$, ovvero la forza che q_2 produce su q_1. In verità, è sufficiente scambiare gli indici $1 \leftrightarrow 2$ ovunque:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{12} &= q_1 \vec{v}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1) \\
&= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{v}_1 \times [\vec{v}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \\
&= -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{v}_1 \times [\vec{v}_2 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}
\end{aligned}$$

Ora sommiamo le due forze e usiamo ancora l'identità vettoriale di cui sopra:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{v}_2 \times [\vec{v}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] - \vec{v}_1 \times [\vec{v}_2 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \\
&= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}
\end{aligned}$$

A meno di condizioni molto particolari, abbiamo trovato che $\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} \neq 0$.

Le forze magnetiche violano il principio di azione-reazione, sia per i valori delle forze che per le loro direzioni. In altre parole, realizzano sia la situazione (c) che la situazione (d) della Fig. 8.2.

11.4 Campi di forza centrali

Un campo di forza si chiama *centrale* se la sua dipendenza dalla posizione è esprimibile nella forma:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{r} \qquad \left(\quad r \equiv |\vec{r}| \quad ; \quad \hat{r} \equiv \frac{\vec{r}}{r} \quad \right) \tag{11.24}$$

In un campo centrale, l'intensità della forza dipende solo dalla distanza r dalla sorgente della forza stessa. La direzione della forza è la stessa del raggio vettore, $\hat{r}$, inoltre il segno di $F(r)$ dice se la forza è repulsiva o attrattiva:

$$\begin{aligned}
F(r) > 0 &\iff \text{forza repulsiva} \\
F(r) < 0 &\iff \text{forza attrattiva}
\end{aligned}$$

11.4.1 Il "problema dei due corpi"

I campi di forza centrali sono comuni in molti problemi di fisica. Questa è una conseguenza del principio di azione-reazione, e dell'*isotropia dello spazio* — ovvero, *tutte le direzioni sono equivalenti.*

Consideriamo due oggetti puntiformi (1) e (2) posti in $\vec{\boldsymbol{r}}_1$ e $\vec{\boldsymbol{r}}_2$, che interagiscono scambiandosi forze secondo il principio di azione-reazione. Chiamiamo $\vec{\boldsymbol{F}}_{12}, \vec{\boldsymbol{F}}_{21}$ rispettivamente la forza che (2) produce su (1) e quella che (1) produce su (2). Queste forze devono essere fra loro opposte

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{12} \;=\; -\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$$

e dirette verso la linea congiungente i due oggetti:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{12}\ ,\ \vec{\boldsymbol{F}}_{21} \quad \text{parallele a} \quad (\vec{\boldsymbol{r}}_2 - \vec{\boldsymbol{r}}_1)$$

Inoltre, la loro intensità può dipendere (e in generale dipende!) dalla distanza fra i due oggetti, ma non deve dipendere dalla direzione di $(\vec{\boldsymbol{r}}_2 - \vec{\boldsymbol{r}}_1)$:

$$|\vec{\boldsymbol{F}}_{12}| \;=\; |\vec{\boldsymbol{F}}_{21}| \;=\; F(|\vec{\boldsymbol{r}}_2 - \vec{\boldsymbol{r}}_1|)$$

Se ci fosse una dipendenza dalla direzione, vorrebbe dire che gli stessi oggetti, ruotati nello spazio in modo da mantenere la distanza invariata, interagirebbero con diversa intensità, ovvero che lo spazio in cui si trovano avrebbe una "preferenza" intrinseca per certe direzioni piuttosto che altre, quindi non sarebbe isotropo.

Tutto ciò si può scrivere come:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{21} = F(|\vec{\boldsymbol{r}}_2 - \vec{\boldsymbol{r}}_1|)\frac{\vec{\boldsymbol{r}}_2 - \vec{\boldsymbol{r}}_1}{|\vec{\boldsymbol{r}}_2 - \vec{\boldsymbol{r}}_1|} \tag{11.25}$$

Analogamente, scambiando i ruoli dei due oggetti, ovvero invertendo gli indici $1, 2$, possiamo scrivere:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{12} = F(|\vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2|)\frac{\vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2}{|\vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2|} \tag{11.26}$$

Ovviamente, le forze gravitazionali (Eq. (11.5)) hanno questa forma [3]

[3] Vedremo più avanti (Sezione 11.3) che anche le forze coulombiane fra cariche elettriche in quiete (Eq. (11.15)) hanno la stessa forma. Le forze magnetiche invece no — anzi, non rispettano la legge di azione-reazione.

11.4.2 Caso-limite: $m_1 \gg m_2$

Ora, supponiamo che l'oggetto (1) sia molto più massivo dell'oggetto (2): $m_1 \gg m_2$. In tal caso l'accelerazione di (1) è molto più piccola dell'accelerazione di (2): chiamando $F = |\vec{\boldsymbol{F}}_{12}| = |\vec{\boldsymbol{F}}_{21}|$, $|\vec{\boldsymbol{a}}_1| = \dfrac{F}{m_1} = \dfrac{m_2}{m_1}\dfrac{F}{m_2} = \dfrac{m_2}{m_1}|\vec{\boldsymbol{a}}_2|$ quindi $|\vec{\boldsymbol{a}}_1| \ll |\vec{\boldsymbol{a}}_2|$. In questo caso, con buona approssimazione, possiamo considerare l'oggetto (1) come *fermo*, e scegliere la sua posizione come origine del nostro sistema di riferimento. Indicando con $\vec{\boldsymbol{r}}$ la generica posizione dell'oggetto (2), l'espressione della forza prodotta da (1) su (2) prende la forma: $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = F(r)\hat{\boldsymbol{r}}$ quindi il campo di forza prodotto da (1) è appunto centrale. L'approssimazione $m_1 \gg m_2$ si può incontrare in diversi casi. Per esempio, per satelliti artificiali ($m_2 \approx 10^3 \sim 10^5$ kg) che orbitano intorno alla Terra ($m_1 \simeq 6 \cdot 10^{24}$ kg), oppure per elettroni che si muovono intorno ad un nucleo atomico ($m_e/m_{nucleo} \approx 10^{-4}$).

11.4.3 Caso generale

Vediamo ora come affrontare il caso generale. Per fissare le idee, supponiamo $m_1 \geq m_2$ — anche se non è necessario. Definiamo per brevità la separazione fra i due oggetti:

$$\vec{\boldsymbol{r}} \equiv \vec{\boldsymbol{r}}_2 - \vec{\boldsymbol{r}}_1 \quad ; \quad r \equiv |\vec{\boldsymbol{r}}| = |\vec{\boldsymbol{r}}_2 - \vec{\boldsymbol{r}}_1|$$

Calcoliamo le accelerazioni dei due oggetti: dall'Eq. (11.25) e Eq. (11.26) otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}_2}{dt^2} &= \frac{\vec{\boldsymbol{F}}_{21}}{m_2} = \frac{F(r)}{m_2}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r} \\
\frac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}_1}{dt^2} &= \frac{\vec{\boldsymbol{F}}_{12}}{m_2} = -\frac{F(r)}{m_1}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r}
\end{aligned}$$

Sottraendo la seconda equazione alla prima abbiamo:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}}{dt^2} &= \frac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}_2}{dt^2} - \frac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}_1}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right) F(r)\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r} \\
&= \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} F(r)\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r}
\end{aligned}$$

Possiamo definire la "massa ridotta"

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

e ottenere

$$\mu \frac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}}{dt^2} = F(r)\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r}$$

Questo significa che, misurando la posizione di (2) rispetto a (1), questa evolve nel tempo secondo una legge fisica "efficace": è come se l'oggetto (2) avesse una massa μ e fosse soggetto ad un campo di forza centrale $\vec{\boldsymbol{F}} = F(r)\hat{\boldsymbol{r}}$.

Si noti che nel caso-limite $m_1 \gg m_2$, $\mu = \dfrac{m_2}{1 + m_2/m_1} \simeq m_2$, cioè la massa ridotta diventa pari alla massa m_2 e ci si riduce a quanto già ottenuto nella Sezione 11.4.2.

Esempi di masse ridotte

Calcoliamo la massa ridotta per alcuni sistemi tipici.

- *Sistema protone-elettrone:* $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg , $m_p = 1.673 \cdot 10^{-27}$ kg *; quindi* $\mu_{pe} = \dfrac{m_p m_e}{m_p + m_e} = 9.105 \cdot 10^{-31}$ kg $= (99.95\%)\ m_e$.

- *Sistema Sole-Terra:* $m_\oplus = 6 \cdot 10^{24}$ kg , $m_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg *; quindi* $\mu_{\odot\oplus} = \dfrac{m_\odot m_\oplus}{m_\odot + m_\oplus} = 5.99998 \cdot 10^{24}$ kg $= (99.9997\%)\ m_\oplus$.

- *Sistema Sole-Giove:* $m_{♃} = 2 \cdot 10^{27}$ kg , $m_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg *; quindi* $\mu_{\odot♃} = \dfrac{m_\odot m_{♃}}{m_\odot + m_{♃}} = 1.998 \cdot 10^{27}$ kg $= (99.9\%)\ m_{♃}$.

- *Sistema Terra-Luna:* $m_☾ = 7.35 \cdot 10^{22}$ kg , $m_\oplus = 6 \cdot 10^{24}$ kg *; quindi* $\mu_{\oplus☾} = \dfrac{m_\oplus m_☾}{m_\oplus + m_☾} = 7.28 \cdot 10^{22}$ kg $= (98.8\%)\ m_☾$.

11.5 Sull'integrazione del moto

Nella Sezione 8.4.1 la forza era stata espressa come funzione del tempo, $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}(t)$, ad indicare che in generale essa non è costante. Tuttavia, in molti problemi di fisica abbiamo a che fare con moti in campi di forza, dove la forza agente su un oggetto dipende dalla posizione in cui esso si trova: $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ — in tal caso la dipendenza dal tempo è in realtà dovuta allo spostamento dell'oggetto: $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t)$, quindi $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}\left(\vec{\boldsymbol{r}}(t)\right)$.

In alcuni casi, la forza dipende anche dalla velocità dell'oggetto — è il caso delle *forze magnetiche*. Quindi potremmo scrivere $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}, \vec{\boldsymbol{v}})$. Infine, la dipendenza funzionale di $\vec{\boldsymbol{F}}$ da $\vec{\boldsymbol{r}}, \vec{\boldsymbol{v}}$ potrebbe anche cambiare con il tempo: è il caso in cui l'ambiente esterno in cui l'oggetto si muove subisce variazioni

sostanzialmente indipendenti dal moto dell'oggetto stesso. Quindi, nella sua forma più generale, dovremmo scrivere

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}\left(\vec{\boldsymbol{r}}, \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}, t\right) \tag{11.27}$$

In presenza di campi di forza, la formulazione del problema della dinamica è la seguente:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}}{dt^2} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{F}}}{m} = \dfrac{1}{m}\vec{\boldsymbol{F}}\left(\vec{\boldsymbol{r}}, \dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}, t\right) \\ \\ \vec{\boldsymbol{r}}(t_0) = \vec{\boldsymbol{r}}_0 \\ \vec{\boldsymbol{v}}(t_0) = \vec{\boldsymbol{v}}_0 \end{cases} \tag{11.28}$$

La prima equazione è una *equazione differenziale del secondo ordine nella funzione incognita* $\vec{\boldsymbol{r}}(t)$. Ciò significa anzitutto che l'incognita non è una grandezza numerica (come nelle equazioni algebriche per esempio), ma è appunto una funzione. Essa compare nell'equazione sia direttamente, che attraverso le sue derivate (da cui il nome "equazione differenziale"). In questo caso l'ordine massimo della derivata è il secondo.

Come già detto, per risolvere il problema, è necessario conoscere le condizioni iniziali, cioè i valori di $\vec{\boldsymbol{r}}$ e di $\vec{\boldsymbol{v}} = \dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}$ all'istante iniziale t_0. Senza di queste non è possibile trovare la legge oraria.

L'analisi matematica fornisce teoremi che garantiscono l'esistenza e l'unicità della soluzione $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t)$ del sistema Eq. (11.28) [4], sotto condizioni molto generali, che nei problemi di fisica sono sempre soddisfatte.

In pratica, la capacità di trovare soluzioni esatte è limitata a poche categorie di problemi, che descriveremo nei prossimi capitoli.

11.5.1 Integrazione con il metodo iterativo (*)

Nel caso non fossimo capaci di integrare in maniera analitica il sistema Eq. (11.28), ecco come potremmo idealmente procedere al computer:

[0] Definiamo due quantità vettoriali per posizione e velocità, assegnando loro i valori iniziali: $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_0$ e $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}_0$. Definiamo inoltre la variabile-tempo assegnandole il suo valore iniziale: $t = t_0$

[4] In analisi differenziale, un sistema come quello dell'Eq. (11.28), con un'equazione differenziale di ordine n, e le condizioni iniziali per la funzione incognita e le sue $(n-1)$ derivate, si chiama *problema di Cauchy*.

[1] Dalla legge fisica della forza, $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}\left(\vec{\boldsymbol{r}}, \dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}, t\right)$, calcoliamo $\vec{\boldsymbol{F}}$ nella condizione attuale dell'oggetto, quindi calcoliamo l'accelerazione $\vec{\boldsymbol{a}} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{F}}}{m}$ cui l'oggetto è sottoposto.

[2] Calcoliamo i nuovi valori di $\vec{\boldsymbol{v}}$ e $\vec{\boldsymbol{r}}$ dopo un intervallino di tempo δt "molto piccolo" — idealmente dovrebbe essere infinitesimo, ma questo non è fattibile con il computer:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{r}} &\longleftarrow \vec{\boldsymbol{r}} + \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \delta t \\ \vec{\boldsymbol{v}} &\longleftarrow \vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{a}} \cdot \delta t \end{aligned}$$

[3] Aggiorniamo anche la variabile-tempo:

$$t \longleftarrow t + \delta t$$

e reiteriamo il processo dal punto [1].

In tal modo si può costruire una tabella di valori

t_0	$\vec{\boldsymbol{r}}(t_0)$	$\vec{\boldsymbol{v}}(t_0)$
$t_0 + \delta t$	$\vec{\boldsymbol{r}}(t_0 + \delta t)$	$\vec{\boldsymbol{v}}(t_0 + \delta t)$
$t_0 + 2\delta t$	$\vec{\boldsymbol{r}}(t_0 + 2\delta t)$	$\vec{\boldsymbol{v}}(t_0 + 2\delta t)$
$t_0 + 3\delta t$	$\vec{\boldsymbol{r}}(t_0 + 3\delta t)$	$\vec{\boldsymbol{v}}(t_0 + 3\delta t)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

per incrementi temporali δt arbitrariamente piccoli.

Questo approccio funzionerebbe bene solo se gli incrementi temporali δt fossero infinitesimi. In pratica ciò è irrealizzabile. L'effetto è che ad ogni iterazione la forza $\vec{\boldsymbol{F}}$ e la velocità $\vec{\boldsymbol{v}}$ calcolate all'istante t vengono utilizzate come se fossero costanti su un intervallino di tempo $[t; t + \delta t]$. L'errore che si commette ad ogni iterazione con questa approssimazione va ad accumularsi a quelli precedenti, ed il risultato spesso peggiora di precisione man mano che si procede nell'iterazione.

Quando si debba realizzare un simile approccio al computer, si ricorre a tecniche di calcolo che riducono gli errori. Qui non ne parliamo diffusamente, accenniamo solo l'idea che sta alla base. Essa consiste nel raffinare ciascuna delle iterazioni, calcolando dapprima i "nuovi" valori per $\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{r}}$ con il metodo del punto [2], e poi mediandoli con i valori precedenti. Così si usano dei valori che dovrebbero essere validi in un punto intermedio fra t e $t + \delta t$: con

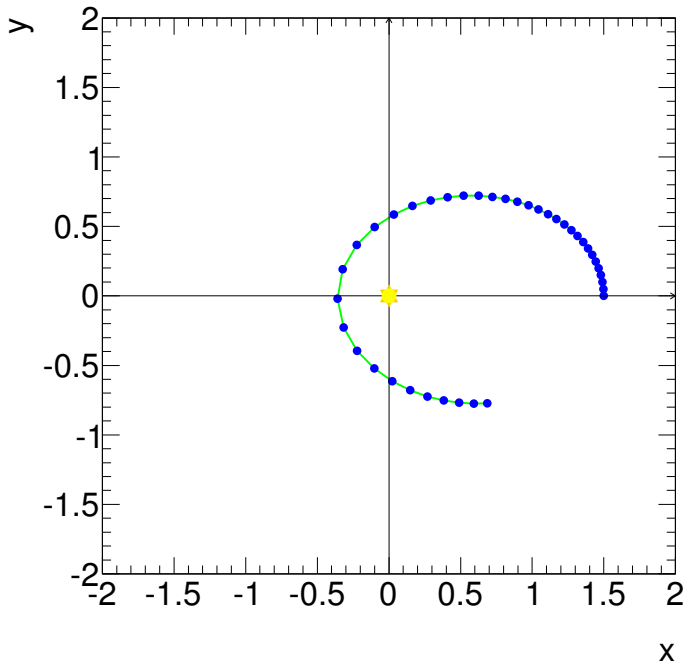


Figura 11.5: *Grafico ottenuto con l'integrazione numerica del moto.*

questi si ri-calcola la forza $\vec{\boldsymbol{F}}$ in un punto intermedio e si ripete il punto [2]. In generale i risultati sono molto più stabili.

Come esempio, consideriamo un campo di forza

$$F_x = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad ; \quad F_y = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

agente su una massa $m = 1$ con condizioni iniziali:

$$x_0 = 1.5 \;\; ; \;\; y_0 = 0 \quad ; \quad v_{x,0} = 0 \;\; ; \;\; v_{y,0} = 0.5$$

e incremento di tempo $\delta t = 0.1$. Le unità sono tutte arbitrarie.

Il risultato è mostrato nel grafico in Fig. 11.5. Come si può osservare, il risultato non è niente male! Questo è uno dei pochi moti in campi di forza che ammette una soluzione analitica: l'orbita è di forma ellittica, e quello che abbiamo ottenuto ha proprio la forma giusta. Poiché l'incremento temporale è tenuto fisso, si può intuire anche la velocità del moto: maggiore quando le posizioni successive sono più lontane fra loro.

Capitolo 12

Lavoro ed energia cinetica

L'energia è un concetto non facilmente definibile in fisica, perché essa prende molte forme... Nell'introduzione abbiamo parlato di energia di movimento (cinetica), di interazione (o potenziale), e poi di energia termica, chimica, radiante, etc.

In questa sezione introdurremo l'*energia cinetica*, che è strettamente legata al movimento. L'altro concetto che vedremo subito è il *lavoro di una forza*: anticipiamo subito che esso può essere visto come la capacità di una forza di modificare l'energia cinetica dell'oggetto su cui agisce.

E ora passiamo alle definizioni precise...

12.1 Lavoro di una forza

Consideriamo un oggetto puntiforme che si muove con una legge oraria

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t)$$

soggetto ad una forza $\vec{\boldsymbol{F}}$.

In un intervallo di tempo molto piccolo (al limite, infinitesimo) dt, esso percorre uno spostamento

$$d\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{v}}\, dt$$

Si definisce *lavoro elementare della forza* $\vec{\boldsymbol{F}}$ *lungo lo spostamento* $d\vec{\boldsymbol{r}}$ la quantità [1]:

$$\delta\mathcal{W} = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} \tag{12.1}$$

[1] La notazione $\delta\mathcal{W}$ è stata introdotta per ricordare che abbiamo a che fare con una quantità infinitesima (indicata con δ), ma che *non è una variazione di qualcosa*. Solitamente, data una qualunque quantità Q, una scrittura tipo ΔQ indica una variazione

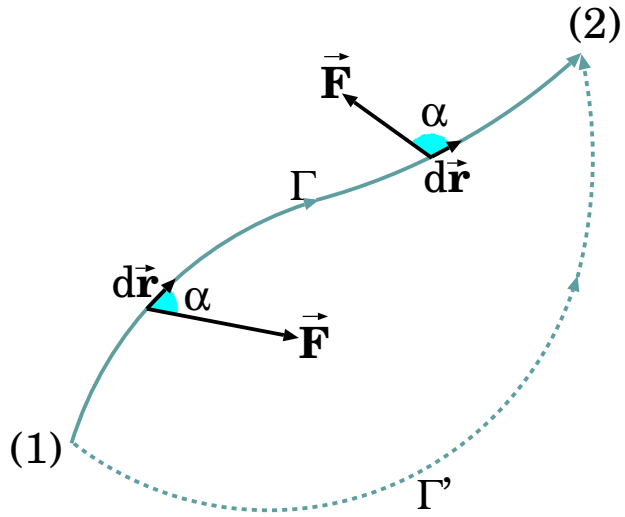


Figura 12.1: *Lavoro elementare* $\delta\mathcal{W} = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = F\, ds \cos\alpha$ *fatto dalla forza* $\vec{\boldsymbol{F}}$ *lungo uno spostamento* $d\vec{\boldsymbol{r}}$. *Il lavoro su un percorso* Γ *orientato, da (1) a (2), è calcolabile come* $\mathcal{W} = \int_\Gamma d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}$. *In generale il risultato dipende dal percorso, cioè* $\int_\Gamma d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} \neq \int_{\Gamma'} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}$.

(vd Fig. 12.1).

Per un oggetto puntiforme che si sposta da (1) a (2) lungo una linea Γ (Fig. 12.1), il lavoro della forza agente su di esso si scrive integrando l'Eq. (12.1):

$$\mathcal{W} = \int_\Gamma d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} \tag{12.2}$$

Nella formula gli estremi (1), (2) non sono indicati esplicitamente: sono impliciti nell'indicazione della linea Γ. Si noti che in generale il lavoro $\mathcal{W}$ lungo una linea dipende dalla scelta della linea, anche a parità di estremi (1) e (2), cioè considerata una linea Γ' che va da (1) a (2) con percorso diverso (Fig. 12.1), in generale può essere

$$\int_\Gamma d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} \neq \int_{\Gamma'} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}$$

Un esempio semplice: immaginate di dover spingere un grosso mobile, facendolo strisciare sul pavimento, da un punto A a un punto B. Secondo

finita di Q, mentre dQ indica una variazione infinitesima. Per esempio, $d\vec{\boldsymbol{r}}$ significa una variazione infinitesima della posizione $\vec{\boldsymbol{r}}$. Viceversa, il lavoro non è una quantità che subisce variazioni, pertanto qui si preferisce non indicarlo con $d\mathcal{W}$.

voi fate più lavoro spingendolo in linea retta (cioè lungo la strada più breve), oppure facendo un ampio giro?

Esempio: stessi estremi, ma cammini diversi

Consideriamo un campo di forza $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ dato da:

$$\vec{\boldsymbol{F}}(x, y, z) = \kappa z\, \hat{\boldsymbol{x}}$$

e un oggetto che si sposta dal punto $A \equiv (x_A, y_A, z_A)$ al punto $B \equiv (x_B, y_B, z_B)$. I percorsi possibili sono infiniti: consideriamo due possibilità.

(1) Lo spostamento avviene prima lungo $\hat{\boldsymbol{x}}$, poi lungo $\hat{\boldsymbol{y}}$, infine lungo $\hat{\boldsymbol{z}}$. Poiché la forza è parallela a $\hat{\boldsymbol{x}}$, solo il primo tratto di spostamento produce lavoro:

$$\mathcal{W} = \int_{x_A}^{x_B} dx\, \kappa z = \kappa z_A (x_B - x_A)$$

(la forza dipende solo dalla coordinata z, quindi è costante in questo tratto, $z = z_A$, e l'integrazione è banale).

(2) Lo spostamento avviene prima lungo $\hat{\boldsymbol{z}}$, poi lungo $\hat{\boldsymbol{x}}$, infine lungo $\hat{\boldsymbol{y}}$. Anche qui l'unico tratto in cui si compie lavoro è quello lungo $\hat{\boldsymbol{x}}$; questa volta però lo spostamento lungo $\hat{\boldsymbol{z}}$ è già avvenuto, quindi $z = z_B$, e si ottiene

$$\mathcal{W} = \int_{x_A}^{x_B} dx\, \kappa z = \kappa z_B (x_B - x_A)$$

Ovviamente nei due casi il lavoro è diverso, anche se gli estremi del percorso coincidono.

12.1.1 Alcune riflessioni sul lavoro elementare

Si noti che il lavoro elementare è definito come un *prodotto scalare*. Data la proprietà del prodotto scalare (Eq. (6.6)) il lavoro si può anche scrivere come:

$$\delta\mathcal{W} = F\, ds\, \cos\alpha \tag{12.3}$$

essendo $F = |\vec{\boldsymbol{F}}|$ il modulo della forza, $ds = |d\vec{\boldsymbol{r}}|$ lo spostamento lungo la traiettoria, e α l'angolo fra il vettore-forza $\vec{\boldsymbol{F}}$ e e il vettore-spostamento $d\vec{\boldsymbol{r}}$.

Ricordando la scomposizione di una forza in componenti tangenziale e centripeta — vd Eq. (8.11):

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}_t + \vec{\boldsymbol{F}}_n$$

notiamo che $\vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{F}}_t \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} + \vec{\boldsymbol{F}}_n \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$, dove $\vec{\boldsymbol{F}}_n \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = 0$ poiché $\vec{\boldsymbol{F}}_n \perp d\vec{\boldsymbol{r}}$. Quindi si può anche scrivere:

$$\delta\mathcal{W} = \vec{\boldsymbol{F}}_t \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = F_t\, ds \tag{12.4}$$

Le tre equazioni Eq. (12.1), Eq. (12.3), Eq. (12.4), sono del tutto equivalenti: a seconda dei casi si sceglie quella più utile. In particolare, l'Eq. (12.4) ci dice che solo la componente tangenziale della forza compie lavoro.

La componente centripeta di una forza non compie lavoro.

A seconda che l'angolo α sia acuto o ottuso (vd Fig. 12.1), $\cos\alpha$ è positivo o negativo. Abbiamo le seguenti possibilità:

$$\alpha < \frac{\pi}{2} \iff \cos\alpha > 0 \iff \delta\mathcal{W} > 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \iff \cos\alpha = 0 \iff \delta\mathcal{W} = 0$$

$$\alpha > \frac{\pi}{2} \iff \cos\alpha < 0 \iff \delta\mathcal{W} < 0$$

Alcuni esempi

Immaginiamo un operaio che deve trasportare materiale su un vagone:

- *inizialmente, l'operaio spinge il vagone in avanti su una rotaia: applica una forza $\vec{\boldsymbol{F}}$ che è parallela e concorde allo spostamento $d\vec{\boldsymbol{r}}$, pertanto $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$, e il lavoro è positivo: $\delta\mathcal{W} > 0$;*
- *l'operaio smette di spingere, il vagone continua ad avanzare; ovviamente qui $\vec{\boldsymbol{F}} = 0$ e $\delta\mathcal{W} = 0$;*
- *la rotaia compie una curva di raggio ρ, pertanto il vagone descrive una traiettoria curvilinea, cioè è soggetto ad una accelerazione centripeta $\vec{\boldsymbol{a}}_n$, di modulo $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$ e perpendicolare alla velocità (vd Eq. (7.36), Sezione 7.6). Quindi deve esistere una* forza centripeta $\vec{\boldsymbol{F}} = m\vec{\boldsymbol{a}}_n$, *che viene esercitata dalla rotaia sul carrello. Poiché $d\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{v}}dt$, allora $d\vec{\boldsymbol{r}} \perp \vec{\boldsymbol{F}}$, quindi $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\cos\alpha = 0$, e il lavoro è nullo: $\delta\mathcal{W} = 0$;*
- *l'operaio deve frenare il vagone in moto, pertanto lo trattiene da dietro, applicando una forza $\vec{\boldsymbol{F}}$ in direzione contraria allo spostamento $d\vec{\boldsymbol{r}}$; pertanto $\alpha = \pi$, $\cos\alpha = -1$, e il lavoro è negativo: $\delta\mathcal{W} < 0$.*

Vediamo altri esempi.

- *Una carica elettrica q, in presenza di un campo magnetico $\vec{\boldsymbol{B}}$, è soggetta ad una* forza magnetica, $\vec{\boldsymbol{F}}_m = q\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$; *dal prodotto vettoriale nella formula, si capisce che $\vec{\boldsymbol{F}}_m$ è sempre perpendicolare alla velocità $\vec{\boldsymbol{v}}$, dunque anche allo spostamento $d\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{v}}\,dt$; pertanto essa non compie mai lavoro — l'angolo α è sempre $\pi/2$.*

- *Le forze di attrito, in un ambiente statico, sono sempre dirette lungo il moto, ma con orientamento opposto:* $\vec{\boldsymbol{F}}_{attr} \propto -d\vec{\boldsymbol{r}}$*; dunque* $\alpha = \pi$ *e* $\delta\mathcal{W} = \vec{\boldsymbol{F}}_{attr} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} < 0$*, sempre.*

- *Consideriamo un attrito dinamico radente, su un piano orizzontale:* $\vec{\boldsymbol{F}}_{attr} = -\mu_d\, mg\, \hat{\boldsymbol{v}}$*. Il lavoro elementare è* $\delta\mathcal{W} = -\mu_d\, mg\, ds$*; il lavoro lungo una linea* Γ*, di lunghezza* L_Γ*, è in questo caso* $\mathcal{W} = \int_\Gamma \delta\mathcal{W} = -\mu_d\, mg \int_\Gamma ds = -\mu_d\, mg\, L_\Gamma$*. Questo semplice risultato deriva dal fatto che* $|\vec{\boldsymbol{F}}_{attr}|$ *è costante e che* $\cos\alpha = -1$ *ovunque lungo il percorso. In questo esempio appare evidente che il lavoro DIPENDE dalla scelta della linea* Γ *che congiunge i due estremi* (1) *e* (2)*.*

- *Un oggetto che si muove nel campo gravitazionale terrestre, con velocità* $\vec{\boldsymbol{v}} \equiv (v_x, v_y, v_z)$*, sente una forza verso il basso* $\vec{\boldsymbol{F}}_g = -mg\hat{\boldsymbol{z}}$*. Lo spostamento elementare è* $d\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{v}}\, dt$*. Il lavoro elementare è* $\delta\mathcal{W} = \vec{\boldsymbol{F}}_g \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = -mgv_z dt$*: può essere negativo, positivo, o nullo a seconda che l'oggetto stia salendo* ($v_z > 0$)*, stia scendendo* ($v_z < 0$)*, oppure sia nel punto di inversione (in cui istantaneamente* $v_z = 0$*).*

Sul lavoro muscolare

Un operaio deve sollevare un grosso carico, quindi trasportarlo a braccia e poi deporlo più avanti. Il pavimento è orizzontale, dunque il punto iniziale e quello finale del carico si trovano alla stessa altezza — diciamo ad altezza nulla.

A lavoro finito, il datore di lavoro dice all'operaio: "Tu non hai lavorato, quindi non ti pago!" All'operaio, stupito (e anche parecchio "nervoso") spiega: "Vedi, dovevi sollevare un carico di massa m *fino a un'altezza* h*, applicando una forza verticale* F *che contrasti la forza-peso, quindi* $F = +mg$*: in questa fase hai compiuto un lavoro* $\mathcal{W}_1 = mgh$*. Quindi l'hai trasportato in orizzontale, applicando sempre una forza verticale: forza e spostamento sono ortogonali, quindi in questa fase* $\mathcal{W}_2 = 0$*. Infine hai posato il carico, compiendo uno spostamento* $-h$ *verso il basso, e quindi facendo un lavoro* $\mathcal{W}_3 = -mgh$*. Come vedi,* $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3 = 0$*, quindi non ti pago, non hai fatto niente!"*

Chi ha ragione?

Risposta. *Ovviamente, ha ragione l'operaio. Ma dobbiamo dimostrarlo, evidenziando l'errore nel ragionamento del suo sfruttatore.*

Nella prima fase, il lavoro c'è: $\mathcal{W}_1 > 0$*, fuori di dubbio, l'operaio fa fatica! Nella terza fase,* $\mathcal{W}_3 < 0$*, ma questo non dà riposo all'operaio, né gli consente di "recuperare" la fatica fatta nel sollevamento. In effetti, per come funzionano i nostri muscoli, non recuperiamo dalla stanchezza quando applichiamo forze con orientamento opposto al movimento. In ogni caso, quando applichiamo una forza muscolare, le fibre dei nostri muscoli in generale si contraggono, ma in dettaglio alcune a turno si rilassano e si ricontraggono, lasciando che altre possano*

rilassarsi a loro volta, etc. Questo effetto è percepibile, per esempio quando lo sforzo è notevole, e i nostri muscoli "tremano". Mentre la contrazione delle fibre produce un lavoro positivo, il temporaneo rilassamento non consente di "recuperare pienamente le forze". Anche nel tratto di percorso orizzontale, l'operaio compie comunque uno sforzo, perché a rigore il moto del carico non sarà perfettamente orizzontale, ma piuttosto un susseguirsi di piccole oscillazioni in alto e in basso. Nuovamente, quelle in alto comportano lavoro, quelle in basso non dànno riposo.

12.1.2 Lavoro di un sistema di forze

Se sullo stesso punto materiale agiscono più forze $\vec{\boldsymbol{F}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{F}}_n$, per ciascuna di esse si può definire il lavoro elementare e quello lungo una linea Γ:

$$\delta\mathcal{W}_i \;=\; \vec{\boldsymbol{F}}_i \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} \qquad ; \qquad \mathcal{W}_i \;=\; \int_\Gamma \vec{\boldsymbol{F}}_i \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$$

Il lavoro totale fatto dal sistema di forze è ovviamente

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W}_{tot} &= \left(\sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i\right) \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} \;=\; \sum_i \delta\mathcal{W}_i \\ \mathcal{W}_{tot} &= \int_\Gamma \left(\sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i\right) \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} \;=\; \sum_i \mathcal{W}_i \end{aligned} \tag{12.5}$$

12.2 Energia cinetica

Ora consideriamo un punto materiale, su cui agisce un sistema di forze di risultante $\vec{\boldsymbol{F}}_{tot}$, che in un tempo dt si sposta di $d\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{v}}dt$. Scomponiamo la forza risultante in componenti tangenziale e centripeta:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{tot} \;=\; \vec{\boldsymbol{F}}_t + \vec{\boldsymbol{F}}_n \;=\; F_t\hat{\boldsymbol{t}} + F_n\hat{\boldsymbol{n}}$$

Abbiamo visto — Eq. (12.4) — che solo la componente tangenziale $\vec{\boldsymbol{F}}_t$ del sistema di forze produce lavoro:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W}_{tot} &= F_t\, ds \;=\; \left(m\frac{dv}{dt}\right)(v\, dt) \\ &= mv\, dv \end{aligned}$$

Ora osserviamo che $\dfrac{d(v^2)}{dv} = 2\,v$, quindi $v\,dv = \dfrac{d(v^2)}{2}$. Pertanto troviamo

$$\delta\mathcal{W}_{tot} = \frac{m}{2} d(v^2)$$

ovvero

$$\delta\mathcal{W}_{tot} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \tag{12.6}$$

Questo suggerisce di definire una nuova quantità: l'*energia cinetica* $\mathcal{E}$ di un oggetto puntiforme, come:

$$\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2} \tag{12.7}$$

Il risultato che abbiamo appena trovato è che un lavoro elementare produce una variazione elementare di energia cinetica:

$$\delta\mathcal{W}_{tot} = d\mathcal{E} \tag{12.8}$$

Integrando lungo un percorso Γ, si ottiene che il lavoro totale è pari alla variazione totale di energia cinetica:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{tot} &= \Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{finale}} - \mathcal{E}_{\text{iniziale}} \\ &= \frac{m}{2}\left(v^2_{\text{finale}} - v^2_{\text{iniziale}}\right) \end{aligned} \tag{12.9}$$

Insistiamo su due punti:

- nelle relazioni $\delta\mathcal{W}_{tot} = d\mathcal{E}$ o $\mathcal{W}_{tot} = \Delta\mathcal{E}$ il lavoro è inteso come quello della *totalità* delle forze agenti;
- osserviamo nuovamente le notazioni:

  $$\delta\mathcal{W}_{tot} = d\mathcal{E} \qquad ; \qquad \mathcal{W}_{tot} = \Delta\mathcal{E}$$

  $d\mathcal{E}$ e $\Delta\mathcal{E}$ indicano *variazioni* (infinitesima e finita) della quantità "energia cinetica" $\mathcal{E}$; viceversa, il lavoro *non è* variazione di qualcosa. L'energia cinetica $\mathcal{E}$ è una proprietà dell'oggetto, che può subire variazione, mentre il lavoro è piuttosto l'effetto che la forza produce sull'energia cinetica.

L'Eq. (12.9) è spesso citato come *teorema dell'energia cinetica*, oppure anche *teorema delle forze vive* (nome storico...)

12.2.1 Derivazione alternativa

La relazione $\delta\mathcal{W}_{tot} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ può essere trovata anche in un altro modo, che è istruttivo vedere. Ricordiamoci che per una qualunque grandezza A vale l'identità $A\,dA = d\left(\frac{A^2}{2}\right)$ — l'abbiamo ricavata per v, ma il ragionamento era del tutto generale. Allora:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{W}_{tot} &= \vec{\boldsymbol{F}}_{tot}\cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = m\frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt}\cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = m\,d\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = m\,d\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}} \\
&= m\,(dv_x v_x + dv_y v_y + dv_z v_z) = m\left(d\left(\frac{v_x^2}{2}\right) + d\left(\frac{v_y^2}{2}\right) + d\left(\frac{v_z^2}{2}\right)\right) \\
&= \frac{m}{2}\,d\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = \frac{m}{2}\,d(v^2)
\end{aligned}$$

12.3 Potenza di una forza

Consideriamo una forza $\vec{\boldsymbol{F}}$ che compie un lavoro elementare $\delta\mathcal{W}$ su uno spostamento infinitesimo $d\vec{\boldsymbol{r}}$, che ha luogo in un intervallino di tempo dt anch'esso infinitesimo.

Si definisce *potenza* il rapporto fra il lavoro elementare $\delta\mathcal{W}$ e il tempo dt impiegato per compierlo:

$$\mathcal{P} = \frac{\delta\mathcal{W}}{dt} \tag{12.10}$$

Sviluppando l'espressione del lavoro elementare, Eq. (12.1), troviamo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \frac{\vec{\boldsymbol{F}}\cdot d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \\
&= \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}
\end{aligned}$$

quindi

$$\mathcal{P} = \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}} \tag{12.11}$$

12.4 Unità di misura

L'unità di misura del lavoro è il Joule: 1 J = 1 N · m. Una forza di 1 N, applicata ad un oggetto che si sposta di 1 m nella stessa direzione della forza applicata, compie un lavoro di 1 J.

Siccome un lavoro produce una variazione di energia cinetica, $\mathcal{W} = \Delta\mathcal{E}$, anche l'energia cinetica si misura in Joule. Per esempio, una massa di 1 kg che si muove alla velocità di 1 m/s, possiede un'energia cinetica di 0.5 J.

L'unità di misura della potenza è il Watt: 1 W = 1 J/s. Una forza che compie un lavoro di 1 Joule in 1 secondo produce una potenza di 1 Watt.

12.5 Problemi su lavoro, energia, potenza

Esercizio 12.1. *Un oggetto di massa m, inizialmente fermo in una posizione x_A, soggetto ad una forza costante*

$$\vec{\boldsymbol{F}} = F\hat{\boldsymbol{x}}$$

comincia a muoversi fino a raggiungere la posizione x_B. Che velocità ha acquistato?

Soluzione 1. *Risolviamo l'equazione del moto. L'oggetto parte da fermo e la forza (e quindi anche l'accelerazione) è costante e diretta verso $\hat{\boldsymbol{x}}$. Quindi non c'è niente che produca movimento nelle direzioni $\hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$: possiamo trattare il problema come un moto uniformemente accelerato in una sola dimensione. L'accelerazione è:*

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m}$$

Pertanto la velocità in funzione del tempo è:

$$v(t) = v(0) + \int_0^t dt' \, \frac{F}{m} = \frac{F}{m}t$$

(a è costante e $v(t=0) = 0$). La posizione in funzione del tempo è

$$x(t) = x(0) + \int_0^t dt' \, v(t') = x_A + \frac{F}{2m}t^2$$

Quindi l'oggetto raggiunge la posizione x_B ad un tempo t tale che $x(t) = x_B$, ovvero

$$x_B - x_A = \frac{F}{2m}t^2 \qquad \Longrightarrow \qquad t_B = \sqrt{\frac{2m(x_B - x_A)}{F}}$$

La velocità in tale istante è:

$$v(t_B) = \frac{F}{m}t_B = \sqrt{\frac{2F(x_B - x_A)}{m}}$$

Soluzione 2. *La forza è diretta lungo $\hat{\boldsymbol{x}}$ ed è costante, quindi il lavoro sul tratto $A \to B$ è*

$$\mathcal{W} = \int_{x_A}^{x_B} dx \, F = F \cdot (x_B - x_A)$$

che è uguale alla variazione di energia cinetica $\Delta\mathcal{E}$. Poiché inizialmente l'oggetto è fermo, $\mathcal{E}_A = 0$, dunque

$$\frac{m}{2}v_B^2 = \mathcal{E}_B = \mathcal{W} = F(x_B - x_A) \qquad \Longrightarrow \qquad v_B = \sqrt{\frac{2F(x_B - x_A)}{m}}$$

Commento. *Ovviamente i due risultati sono identici. Però la soluzione 2 è più rapida. In problemi in cui non si debba risolvere la legge del moto, ma sia sufficiente ricavare le velocità, l'uso dell'energia cinetica può agevolare di molto i calcoli.*

Esercizio 12.2. *L'esempio precedente si complica, non appena si inserisca una forza che varia con la posizione:*

$$\vec{\boldsymbol{F}} = F(x)\,\hat{\boldsymbol{x}}$$

Se l'oggetto di massa m si trova inizialmente in una posizione x_A con velocità v_A, con quale velocità v_B raggiunge la posizione x_B?

Soluzione 1. *Il lavoro fatto dalla forza lungo il percorso è*

$$\mathcal{W} = \int_A^B \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int_{x_A}^{x_B} F(x)\,dx$$

La variazione di energia cinetica è $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{W}$. Quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_B - \mathcal{E}_A &= \mathcal{W} \\ \frac{m}{2}\left(v_B^2 - v_A^2\right) &= \int_{x_A}^{x_B} F(x)\,dx \end{aligned}$$

Se la forma analitica di $F(x)$ è nota, e se l'integrale si può risolvere in modo analitico, siamo a posto. Altrimenti si può comunque risolvere l'integrale con metodi numerici...

Soluzione 2. *Si cerca di risolvere l'equazione del moto, per date condizioni iniziali. Le soluzioni formali sarebbero:*

$$\begin{aligned} v(t) &= v_A + \int_0^t a(t')\,dt' = v_A + \frac{1}{m}\int_0^t F(x(t'))\,dt' \\ x(t) &= x_A + \int_0^t v(t')\,dt' \end{aligned}$$

dove appare chiara una difficoltà: ci servirebbe $F(t')$, ma il problema dà $F(x)$, e $x(t)$ è da ricavare...

Si dovrebbe quindi partire direttamente dall'equazione del moto:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F(x)}{m}$$

e conoscere dei metodi matematici per risolverla. In ogni caso il problema è molto più complesso!

Esercizio 12.3. *Riprendiamo l'esempio precedente, in un caso particolare:* $v_A = 0$ *e*

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \beta x \hat{\boldsymbol{x}} \qquad (\beta > 0)$$

Qual è la velocità v_B *nella posizione* x_B*?*

Soluzione 1. *Il lavoro fatto dalla forza lungo il percorso è*

$$\mathcal{W} = \int_A^B \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int_{x_A}^{x_B} \beta x \, dx = \frac{\beta}{2}(x_B^2 - x_A^2)$$

La variazione di energia cinetica è $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{W}$*. Essendo* $v_A = 0$ *deve essere* $\mathcal{E}_A = 0$*, quindi:*

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} v_B^2 &= \frac{\beta}{2}(x_B^2 - x_A^2) \\ v_B &= \sqrt{\frac{\beta}{m}(x_B^2 - x_A^2)} \end{aligned}$$

Soluzione 2. *Risolviamo l'equazione del moto. Il problema è unidimensionale, l'accelerazione è*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} = \frac{\beta}{m} x$$

La derivata seconda di x *è proporzionale a* x*. Ricordando che* $\frac{d}{dt}\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\right) = \alpha \mathrm{e}^{\alpha t}$*, e quindi che* $\frac{d^2}{dt^2}\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\right) = \alpha^2 \mathrm{e}^{\alpha t}$*, una possibile soluzione è proprio:*

$$x(t) = A_+ \mathrm{e}^{\alpha t} + A_- \mathrm{e}^{-\alpha t} \qquad \left(\alpha = \sqrt{\frac{\beta}{m}}\right)$$

Dunque α *è fissato dai parametri del problema (*β *della forza,* m *dell'oggetto) mentre* $A_\pm$ *dipendono dalle condizioni iniziali. A* $t = 0$ *deve essere* $x = x_A$*, dunque* $A_+ + A_- = x_A$*. Inoltre, a* $t = 0$*,* $v = 0$*. Poiché* $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \alpha\left[A_+ \mathrm{e}^{\alpha t} - A_- \mathrm{e}^{-\alpha t}\right]$ *deve essere* $\alpha(A_+ - A_-) = 0$*, ovvero* $A_+ = A_-$*. Con la condizione precedente troviamo* $A_+ = A_- = \frac{x_A}{2}$*, cosicché:*

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x_A}{2}\left(\mathrm{e}^{\alpha t} + \mathrm{e}^{-\alpha t}\right) \\ v(t) &= \frac{x_A}{2}\alpha\left(\mathrm{e}^{\alpha t} - \mathrm{e}^{-\alpha t}\right) \end{aligned}$$

Ora occorre ricavare t *(o meglio,* $\mathrm{e}^{\alpha t}$*) dalla prima equazione, imponendo* $x(t) = x_B$*, ed inserirlo nella seconda, per ricavare* v_B*. È possibile, anzi siete invitati a provare... Naturalmente il calcolo è molto più lungo che nella "Soluzione 1".*

Esercizio 12.4. *Un'automobile di massa* $m = 1.5$ ton *accelera da ferma, con accelerazione costante, fino a raggiungere la velocità di* 100 km/h *in* 5 s. *Qual è il lavoro totale sull'automobile? Quanto vale la potenza applicata, ad un generico istante?*

Risposta. *Anzitutto convertiamo le grandezze in SI:* 1 h = 3600 s *e* 1 km = 1000 m, *quindi* $v = 100\ \mathrm{km/h} = 100\dfrac{1000\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}} = 27.78\ \mathrm{m/s}$. *Inoltre* $m = 1.5$ ton = 1500 kg. *L'energia cinetica iniziale è ovviamente nulla:* $\mathcal{E}_{in} = 0$. *L'energia cinetica finale è* $\mathcal{E}_{fin} = \dfrac{m}{2}v_{fin}^2 = 5.788 \cdot 10^5$ J. *Quindi il lavoro è* $\mathcal{W} = \Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_{fin} = 5.788 \cdot 10^5$ J.

La potenza è $\mathcal{P} = Fv$, *essendo* $F = ma$ *e* $v = at$. *L'accelerazione è* $a = \dfrac{v_{fin}}{t_{fin}} = 5.556\ \mathrm{m/s^2}$. *La potenza istantanea quindi è* $\mathcal{P}(t) = ma^2t = (4.630 \cdot 10^4\ \mathrm{W/s})\,t$.

Commento 1. *Al contrario di quel che uno si aspetterebbe intuitivamente, ad una accelerazione costante non corrisponde una potenza costante. La stessa accelerazione richiede più potenza se avviene a velocità più elevata.*

Commento 2. *Non ci siamo preoccupati di separare la forza del motore dalle forze di attrito con la strada, l'aria, etc. Abbiamo trattato* F *semplicemente come la risultante di queste forze; l'unico dato importante è che, in qualche modo, queste forze concorrono a produrre un'accelerazione costante.*

Esercizio 12.5. *Un'automobile di massa* $m = 1.5$ ton *ha un motore di potenza* $\mathcal{P} = 50$ kW. *Supponiamo — anche se è abbastanza irrealistico — che durante l'accelerazione il motore eroghi potenza costante. Se l'auto parte da ferma, quanto tempo impiega a raggiungere la velocità di* $v = 100$ km/h? *Qual è la legge oraria della velocità e dello spazio percorso? Nel trattare il problema si trascuri l'attrito dell'aria — anche questo è abbastanza irrealistico...*

Risposta. *L'energia cinetica dell'auto ferma è zero, quando l'auto va a* 100 km/h *la sua energia cinetica è* $\mathcal{E} = 5.788 \cdot 10^5$ J. *Poiché la potenza è supposta costante, possiamo scrivere* $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{P} \cdot \Delta t$, *ovvero:*

$$\Delta t = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{P}} = \frac{5.788 \cdot 10^5\ \mathrm{J}}{5 \cdot 10^4\ \mathrm{W}} = 11.6\ \mathrm{s}$$

Poiché la potenza $\mathcal{P}$ *è costante, conviene ottenere la legge oraria della velocità da quella dell'energia cinetica. In un tempo* dt *il motore compie un lavoro* $\delta\mathcal{W} = W\,dt = d\mathcal{E}$, *quindi* $\mathcal{E}(t) = \mathcal{P}t$. *Allora,*

$$v(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}} = \sqrt{\frac{2\mathcal{P}t}{m}}$$

A dispetto di quello che si poteva pensare intuitivamente, la velocità non cresce linearmente con il tempo, dunque il moto NON è uniformemente accelerato. La ragione sta nell'espressione $\mathcal{P} = Fv$ *della potenza: a parità di potenza erogata, la*

forza F (e quindi l'accelerazione) è maggiore per velocità più basse. Per trovare lo spazio percorso in un tempo t, si deve integrare la velocità. Ricordando che $\int \sqrt{t}\,dt = \int dt\, t^{1/2} = \frac{1}{3/2} t^{3/2} = \frac{2}{3} t^{3/2}$, *otteniamo:*

$$\Delta s(t) = \int v(t)\,dt = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2\mathcal{P}}{m}}\, t^{3/2}$$

12.6 Lavoro di forze macroscopiche

12.6.1 Lavoro della forza-peso

Calcoliamo il lavoro fatto dalla forza-peso $\vec{\boldsymbol{F}}_g = -mg\hat{\boldsymbol{z}}$ lungo uno spostamento $d\vec{\boldsymbol{r}}$:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W}_g &= \vec{\boldsymbol{F}}_g \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = -mg\,\hat{\boldsymbol{z}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} \\ &= -mg\,dz \end{aligned}$$

Quindi in uno spostamento totale da un punto iniziale (1), di coordinate (x_1, y_1, z_1), ad un punto finale (2), di coordinate (x_2, y_2, z_2), il lavoro della forza-peso è

$$\mathcal{W}_g^{(1)\to(2)} = -mg(z_2 - z_1) = -mg\,\Delta z \tag{12.12}$$

Non importa qual è il percorso per andare da (1) *a* (2)*, conta solo il dislivello* Δz. Interessante, no?

Poiché la variazione di energia cinetica è $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{W}$, *se agisce solo la forza peso* abbiamo:

$$\Delta\mathcal{E} = -mg\,\Delta z \qquad \text{(solo forza-peso)} \tag{12.13}$$

La ragione di questo *notevole* risultato è che *la forza di gravità è conservativa*. Questo argomento sarà trattato estesamente nel Capitolo 13, ma valeva la pena anticipare qualcosa qui...

Alcune utili conseguenze

Se un oggetto puntiforme di massa m si muove, soggetto solo alla forza-peso, la sua variazione di velocità è ricavabile direttamente dal dislivello Δz effettuato. Infatti, dall'Eq. (12.13), si ricava:

$$\begin{aligned} \frac{m}{2}\left(v_{fin}^2 - v_{in}^2\right) &= -mg\left(z_{fin} - z_{in}\right) \\ \frac{v_{fin}^2}{2} + gz_{fin} &= \frac{v_{in}^2}{2} + gz_{in} \end{aligned}$$

ovvero

$$\frac{v^2}{2} + gz = \left(\frac{v^2}{2} + gz\right)_{in} \tag{12.14}$$

La quantità $\left(\frac{v^2}{2} + gz\right)$ è costante; quindi, se calcolata dalle condizioni iniziali, consente di ricavare v a qualunque z, o viceversa a quale z si ha una certa v, senza dover risolvere il moto.

Le stesse considerazioni valgono se, oltre alla forza-peso, agiscono altre forze che non compiono lavoro, perché sempre orientate perpendicolarmente al moto.

12.6.2 Lavoro delle forze vincolari — vincolo in quiete

Se il vincolo è fermo la reazione vincolare non compie lavoro. Questo perché $\vec{\boldsymbol{F}}_{vinc}$ esiste solo quando c'è contatto, d'altra parte per mantenere il contatto l'unico spostamento possibile è lungo il vincolo stesso, ovvero $d\vec{\boldsymbol{r}} \perp \vec{\boldsymbol{F}}_{vinc}$.

Forza-peso e vincolo in quiete

Se abbiamo un oggetto puntiforme che si muove, soggetto alla forza-peso e a vincoli *fermi*, l'unico lavoro viene compiuto dalla sola forza-peso. Pertanto possiamo utilizzare il risultato espresso nell'Eq. (12.14), che qui riportiamo:

$$\frac{v^2}{2} + gz = \left(\frac{v^2}{2} + gz\right)_{in}$$

È un risultato molto potente: immaginiamo di avere una pallina che scivola lungo una rotaia senza attriti, oppure un carrellino su una montagna russa. Il moto può essere estremamente complicato, dipende dalla forma della rotaia, che può salire o scendere in modo più o meno ripido, curvare, ... Tuttavia, conoscendo v, z a un certo punto, possiamo calcolare v ad ogni altra quota.

Un notevole risultato, in particolare: se un oggetto parte da fermo ad un'altezza h, indipendentemente dal percorso che segue, arriva al suolo con velocità $v_{fin} = \sqrt{2gh}$ — provate: basta mettere $v_{in} = 0$ e $z_{fin} - z_{in} = -h$.

Oppure: la velocità iniziale necessaria affinché l'oggetto arrivi ad un'altezza h e lì si fermi è $v_{in} = \sqrt{2gh}$ — questa volta, $v_{fin} = 0$ e $z_{fin} - z_{in} = h$.

12.6.3 Lavoro delle forze di attrito — ambiente statico

Nel caso di ambiente in quiete, il lavoro fatto dalle forze di attrito si discute abbastanza semplicemente.

L'attrito statico non compie mai lavoro — ovvio: il punto di contatto è fermo. Però vale la pena ricordarlo...

$$\mathcal{W}_{attr.statico} = 0 \qquad \text{(attrito statico)} \tag{12.15}$$

Invece, le forze degli attriti dinamici — sia radenti che viscosi — sono sempre orientate all'opposto degli spostamenti:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{attr} \propto -\hat{\boldsymbol{v}} \qquad \text{(attriti radenti e viscosi)}$$

pertanto compiono sempre lavoro negativo:

$$\mathcal{W}_{attr} < 0 \qquad \text{(attriti radenti e viscosi)} \tag{12.16}$$

Si dice che le forze di attrito sono *dissipative*: producono sempre una diminuzione di energia cinetica.

D'altra parte, sappiamo che l'attrito provoca sempre surriscaldamento: i freni delle automobili e dei treni possono diventare roventi; i meteoriti che cadono sulla Terra, per la frizione con l'atmosfera terrestre, si scaldano fino a diventare incandescenti (stelle cadenti) e spesso si disintegrano prima di raggiungere la superficie terrestre.

In effetti, l'attrito trasforma l'energia cinetica in *energia termica*, che si manifesta con un surriscaldamento.

12.6.4 Lavoro delle forze di attrito — ambiente in movimento

Quando l'ambiente è in movimento, il discorso è più elaborato.

Nel caso di attrito statico, con ambiente accelerato, l'oggetto si muove mantenendo il contatto con l'ambiente, quindi è soggetto alla stessa accelerazione $\vec{\boldsymbol{a}}_{amb}$ dell'ambiente. Chiamando $\vec{\boldsymbol{F}}_{est}$ la totalità delle forze agenti sull'oggetto — escluso l'attrito — deve essere quindi $m\vec{\boldsymbol{a}}_{amb} = \vec{\boldsymbol{F}}_{est} + \vec{\boldsymbol{F}}_{attr}$, cosicché:

$$\delta\mathcal{W}_{attr.statico} \;=\; \vec{\boldsymbol{F}}_{attr} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} \;=\; \left(m\vec{\boldsymbol{a}}_{amb} - \vec{\boldsymbol{F}}_{est}\right) \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_{amb}\, dt$$

può essere positivo o negativo, a seconda della presenza di forze esterne, e dell'orientamento di $\vec{\boldsymbol{a}}_{amb}$, $\vec{\boldsymbol{v}}_{amb}$.

Analogamente, per gli attriti dinamici (radenti o viscosi), va considerata la *velocità relativa* $\vec{\boldsymbol{v}}_{rel} = \vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{v}}_{amb}$ fra oggetto e ambiente. Poiché in tale caso $\vec{\boldsymbol{F}}_{attr} \propto -\hat{\boldsymbol{v}}_{rel}$, abbiamo:

$$\delta\mathcal{W}_{attr} \;=\; \vec{\boldsymbol{F}}_{attr} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} \;\propto\; -\hat{\boldsymbol{v}}_{rel} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\, dt$$

e anche qui il segno dipende dall'orientamento relativo di $\hat{\boldsymbol{v}}_{rel}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}$.

In altre parole, gli attriti possono rallentare o accelerare l'oggetto, a seconda del moto dell'ambiente.

Come si concilia un $\delta\mathcal{W}_{attr}$, che può essere negativo o positivo, con una forza sempre dissipativa? Occorre considerare *tutto* il lavoro fatto dalle forze di attrito, sia sull'oggetto:

$$\delta\mathcal{W}_{attr} = \vec{\boldsymbol{F}}_{attr} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$$

che sull'ambiente: quest'ultimo subisce una forza di attrito $\vec{\boldsymbol{F}}^{amb}_{attr} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{attr}$ — per il principio di azione-reazione — e uno spostamento $d\vec{\boldsymbol{r}}^{amb}$

$$\delta\mathcal{W}^{amb}_{attr} = \vec{\boldsymbol{F}}^{amb}_{attr} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}^{amb} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{attr} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}^{amb}$$

Finora abbiamo sempre omesso $\delta\mathcal{W}^{amb}_{attr}$, poiché in caso di ambiente statico $d\vec{\boldsymbol{r}}^{amb} = 0$. In generale però bisogna considerarlo.

$$\delta\mathcal{W}^{tot}_{attr} \;=\; \delta\mathcal{W}_{attr} + \delta\mathcal{W}^{amb}_{attr} \;=\; \vec{\boldsymbol{F}}_{attr} \cdot \left(d\vec{\boldsymbol{r}} - d\vec{\boldsymbol{r}}^{amb}\right)$$

Nel caso di attrito statico, $d\vec{\boldsymbol{r}} = d\vec{\boldsymbol{r}}^{amb}$, quindi $\delta\mathcal{W}^{tot}_{attr} = 0$. L'attrito statico in totale non compie lavoro, dunque non dissipa energia, anche nel caso di ambiente in moto.

Nei casi dinamici, $d\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{v}}dt$ e $d\vec{\boldsymbol{r}}^{amb} = \vec{\boldsymbol{v}}^{amb}dt$, quindi

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{W}^{tot}_{attr} \;&=\; \vec{\boldsymbol{F}}_{attr} \cdot \left(\vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{v}}^{amb}\right)\, dt \\ &\propto\; -\hat{\boldsymbol{v}}_{rel} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_{rel}\, dt \;=\; -|v_{rel}|\, dt \;<0\end{aligned}$$

L'attrito dinamico produce sempre un lavoro totale negativo, anche nel caso di ambiente in moto, e questo è consistente con il fatto che sia una forza dissipativa.

Attriti che aumentano l'energia cinetica?

Finora abbiamo detto che gli attriti dinamici producono lavoro negativo ($\mathcal{W}_{attr} < 0$) e dunque dissipano energia cinetica ($\Delta\mathcal{E} < 0$). Si può però immaginare un contro-esempio: una valigia di massa m, inizialmente ferma, viene depositata su un nastro trasportatore che si muove a velocità costante v. Le forze di attrito

dinamico fra nastro e valigia accelerano quest'ultima finché essa non raggiunge la stessa velocità v: a quel punto l'attrito diventa statico e non compie più lavoro. Il risultato netto è che la valigia ha acquisito energia cinetica: $\Delta\mathcal{E} = \frac{m}{2}v^2$. Quindi, abbiamo un attrito che produce energia cinetica... Eppure, fra valigia e nastro c'è anche sfregamento, quindi surriscaldamento, quindi anche energia dissipata... Dov'è l'inghippo?

Analizziamo il problema da diversi punti di vista.

- *Un osservatore che sta in piedi sul nastro trasportatore, inizialmente vede la valigia "andare all'indietro" con velocità v. Quando la valigia entra in contatto con il nastro, l'attrito radente la rallenta fino a fermarla, quindi l'energia cinetica subisce una variazione $\Delta\mathcal{E} = -\frac{m}{2}v^2$. Il lavoro della forza di attrito è*

  $$\mathcal{W}_{attr} = \Delta\mathcal{E} = -\frac{m}{2}v^2$$

  Chiamiamo l'energia dissipata $\Delta Q = -\Delta\mathcal{E} = \frac{m}{2}v^2$: questa è l'energia termica sviluppata dall'attrito, che in qualche modo produrrà un surriscaldamento delle superfici a contatto.

- *Un osservatore che sta fermo per terra, vede la valigia accelerare, quindi acquistare energia cinetica,*

  $$\Delta\mathcal{E} = +\frac{m}{2}v^2$$

  Nello stesso tempo, il surriscaldamento deve comunque esserci, in quantità indipendente dall'osservatore, quindi deve sempre esserci un'energia dissipata pari a quella calcolata nel caso precedente:

  $$\Delta Q = \frac{m}{2}v^2$$

  Quindi, in questo caso, il sistema riceve una quantità di energia

  $$\Delta\mathcal{E} + \Delta Q = mv^2$$

  Da dove viene?

Ovviamente, viene dal motore, che mantiene il nastro in movimento a velocità costante! Se il nastro trascina la valigia con forza F_{attr}, la valigia deve "frenare" il nastro con forza $F_{fr} = -F_{attr}$, ma siccome la velocità del nastro non cambia, il motore deve applicare una forza $F_m = -F_{fr} = F_{attr}$. Questa forza è parallela e concorde al movimento del nastro, dunque deve produrre un lavoro $\mathcal{W}_m > 0$, che ora andiamo a calcolare.

La valigia subisce un'accelerazione costante, $a = \frac{F_{attr}}{m}$*, per un tempo*

$$\Delta t = \frac{v}{a} = \frac{mv}{F_{attr}}$$

Questo è il tempo in cui valigia e nastro si scambiano forze. Il lavoro fatto dalla forza del motore sul nastro avviene a velocità v *costante, per cui è semplicemente*

$$\mathcal{W}_m \;=\; F_m \cdot v \cdot \Delta t \;=\; F_{attr} \cdot v \cdot \frac{mv}{F_{attr}} \;=\; mv^2$$

Quindi $\mathcal{W}_m > \Delta\mathcal{E}$*. Evidentemente, il lavoro del motore non è l'unico ad agire sulla valigia. D'altronde, se consideriamo anche il lavoro dell'attrito,* $\mathcal{W}_{attr} = -\frac{mv^2}{2}$*, calcolato precedentemente, i conti tornano:*

$$\mathcal{W}_m + \mathcal{W}_{attr} \;=\; \frac{mv^2}{2} \;=\; \Delta\mathcal{E}$$

In altre parole: l'energia fornita dal motore è maggiore di quella acquisita dalla valigia, quindi c'è una quantità di energia dissipata $\Delta Q = \mathcal{W}_m - \Delta\mathcal{E} = mv^2 - \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}v^2$*, come calcolata rispetto all'osservatore in piedi sul nastro trasportatore.*

Riassumendo*: il lavoro erogato dal motore,* $\mathcal{W}_m = mv^2$*, va in parte ad aumentare l'energia cinetica,* $\Delta\mathcal{E} = \frac{m}{2}v^2$*, e la parte rimanente viene dissipata in energia termica,* $\Delta Q = \mathcal{W}_m - \Delta E = \frac{m}{2}v^2$*. La parte* ΔQ *è dovuta agli attriti, che producono un lavoro* $\mathcal{W}_{attr} = -\frac{mv^2}{2}$*.*

12.6.5 Esercizi

Esercizio 12.6. *Un carrellino delle montagne russe, di massa* $m = 200$ kg*, partendo da fermo, scende da un'altezza* $h = 10$ m*, arrivando nel punto più basso, dove la rotaia compie un "giro della morte" con raggio di curvatura* $\rho = 5$ m*. Si calcolino: la velocità* v_1 *del carrello e la reazione vincolare della rotaia,* $F_{vinc,1}$ *nel punto più basso; la velocità* v_2 *e la reazione vincolare della rotaia,* $F_{vinc,2}$ *nel culmine del giro della morte. Qual è l'altezza iniziale minima,* h_{min}*, tale da consentire che il carrello completi il giro della morte?*

Risposta. *Sul carrello agiscono la forza-peso e la reazione vincolare. Quest'ultima non compie lavoro, perché il vincolo (rotaia) è fermo. Il lavoro della forza-peso, su un dislivello generico* Δz*, è pari a* $\mathcal{W}_g = -mg\Delta z$*. Poiché il carrello parte da fermo, la sua energia cinetica dopo una discesa* $-\Delta z$*, sarà* $\mathcal{E} = -mg\Delta z$

Nella prima discesa, $\Delta z = -h = -20$ m*, quindi l'energia cinetica nel punto più basso è* $\mathcal{E}_1 = \frac{m}{2}v_1^2 = mgh$*, da cui* $v_1 = \sqrt{2gh} = 19.81$ m/s*. In questo punto, la forza totale sul carrello è* $F_{tot,1} = -mg + F_{vinc,1}$*, che deve essere uguale alla*

forza centripeta $F_{tot,1} = m\frac{v_1^2}{\rho}$. *Quindi* $F_{vinc,1} = m\frac{v_1^2}{\rho} + mg = 17\,651$ N. *Abbiamo trovato* $F_{vinc,1} > mg$, *poiché la reazione vincolare, oltre a contrastare la forza-peso, deve imprimere un'accelerazione centripeta, diretta verso il centro di curvatura, cioè verso l'alto.*

Nel punto di culmine, il dislivello dal punto di partenza è $\Delta z = (2\rho) - h = -10$ m, *pertanto, con ragionamento analogo si trova che al culmine* $v_2 = \sqrt{2g(h-2\rho)} = 14.00$ m/s. *In questo punto, la forza totale è* $F_{tot,2} = -mg + F_{vinc,2}$. *Nota: qui la reazione vincolare deve spingere verso il basso, quindi ci aspettiamo di trovare* $F_{vinc,2} < 0$ *— ricordiamoci di verificarlo! La forza totale deve essere pari alla forza centripeta* $F_{tot,2} = -m\frac{v_2^2}{\rho}$ *— il segno* $-$ *indica che la forza centripeta è verso il basso. Quindi* $F_{vinc,2} = mg + F_{tot,2} = m\left(g - \frac{v_2^2}{\rho}\right) = -5884$ N. *Effettivamente,* $F_{vinc,2} < 0$.

Per rispondere all'ultima domanda, rivediamo il ragionamento: al culmine del giro della morte, la velocità v_2 *deve essere tale da richiedere una reazione vincolare che imprima la giusta accelerazione centripeta. Occorre che* $F_{vinc,2} = mg + F_{tot,2} = m\left(g - \frac{v_2^2}{\rho}\right) < 0$, *ovvero* $\frac{v_2^2}{\rho} > g$. *Ma* $v_2^2 = 2g(h-2\rho)$. *Quindi* $\frac{2g(h-2\rho)}{\rho} > g$, *ovvero* $h > \frac{5}{2}\rho$. *Con i dati del problema,* $h_{min} = 12.5$ m.

Esercizio 12.7. *Un'automobile con potenza* $\mathcal{P} = 50$ kW *accelera sull'autostrada, fino a raggiungere una velocità limite* $v_1 = 170$ km/h*: non riesce ad andare più veloce perché l'attrito con l'aria contrasta la forza del motore. A queste velocità è ragionevole parametrizzare l'attrito come* $F_{attr} = -\eta' v^2$, *diretto in direzione opposta al movimento. Quanto vale* η'*? Quanta energia impiega l'auto per percorrere 100 km alla velocità* v_1*? Quanta energia impiegherebbe a percorrere la stessa distanza se viaggiasse a velocità* $v_2 = 130$ km/h*?*

Risposta. *La potenza dissipata dalla forza di attrito è* $\mathcal{P}_{attr} = F_{attr}v = -\eta' v^3$. *Se l'auto non riesce ad aumentare la sua velocità vuol dire che la potenza del motore è esattamente contrastata dalla potenza dissipata per attrito:* $\mathcal{P} + \mathcal{P}_{attr} = 0$, *ovvero* $\eta' = \frac{\mathcal{P}}{v_1^3}$. *Convertiamo la velocità in SI:* $v_1 = 170$ km/h $= 170\frac{1000}{3600}$ m/s $= 47.22$ m/s. *Otteniamo* $\eta' = \frac{5 \cdot 10^4\ W}{(47.22\ \text{m/s})^3} = 0.475\ \text{Ns}^2\text{m}^{-2}$.

Per viaggiare a velocità costante, il motore deve erogare una forza che contrasti la forza di attrito: $F_1 = +\eta' v_1^2 = (0.475\ \text{Ns}^2\text{m}^{-2})(47.22\ \text{m/s})^2 = 1059$ N. *Il lavoro della forza (e quindi l'energia necessaria) su* $\Delta\ell = 100$ km $= 10^5$ m *è* $\mathcal{W}_1 = F_1\Delta\ell = 1.059 \cdot 10^8$ J *— circa 100 milioni di Joule.*

Se la velocità viene ridotta a $v_2 = 130$ km/h $= 36.11$ m/s, *la forza del motore deve essere* $F_2 = +\eta' v_2^2 = 619$ N. *Anche il lavoro si riduce:*

$\mathcal{W}_2 = F_2 \Delta\ell = 6.19 \cdot 10^7$ J, *cioè circa 60 milioni di Joule ... e si risparmia circa il 40% di carburante!*

Esercizio 12.8. *Su un piano inclinato di angolo $\theta = 15°$, viene lanciato un oggetto in salita, con velocità iniziale $v_0 = 1.35$ m/s. L'oggetto decelera fino ad arrestarsi istantaneamente, dopo una distanza $\Delta\ell = 34$ cm. Quanto vale il coefficiente di attrito radente μ_d? Per quali valori del coefficiente di attrito statico, μ_s, l'oggetto riprende a scivolare in discesa? Con quale velocità v_f ritorna al punto di partenza?*

Risposta. *Orientiamo per convenzione il segno positivo in salita. Le forze agenti sono la componente parallela della gravità, $F_{g\|} = -mg\sin\theta$, e la forza di attrito radente, $F_{attr} = -\mu_d mg\cos\theta$ (entrambe con segno $-$ poiché dirette in discesa). L'accelerazione totale è $a = \dfrac{F_{g\|} + F_{attr}}{m} = -g(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)$. Pertanto, $\mu_d = -\dfrac{g\sin\theta + a}{g\cos\theta}$. Ora, nel moto uniformemente decelerato (cioè con $a < 0$), sappiamo che la distanza di arresto è $\Delta\ell = -\dfrac{v_0^2}{2a}$, da cui $a = -\dfrac{v_0^2}{2\ell} = -2.680$ m/s^2. Quindi, $\mu_d = 0.0150$.*

Nel punto in cui l'oggetto si arresta, entra in gioco l'attrito statico: se esso è sufficiente a contrastare $F_{g\|}$, l'oggetto resta fermo. Ciò avviene per $\mu_s \geq \tan\theta = 0.268$. Invece, per $0.0150 \equiv \mu_d < \mu_s < 0.268$ l'oggetto scivola di nuovo in basso.

Il lavoro totale fatto dall'attrito radente è $\mathcal{W}_{attr} = -2\,\Delta\ell\,(\mu_d mg\cos\theta)$, ma $\dfrac{m}{2}(v_f^2 - v_0^2) = \mathcal{W}_{attr}$, pertanto $v_f^2 = v_0^2 - 4\,\Delta\ell\,(\mu_d mg\cos\theta) = 1.6293$ m^2/s^2, ovvero $v_f = 1.276$ m/s.

Capitolo 13

Forze conservative, energia potenziale

Abbiamo visto nella Sezione 12.2 che il lavoro $\mathcal{W}$, fatto su un oggetto da un sistema di forze di risultante $\vec{\boldsymbol{F}}$, produce una variazione di energia cinetica $\Delta\mathcal{E}$:

$$\mathcal{W} = \int \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \Delta\mathcal{E}$$

Ora immaginiamo di applicare dall'esterno una forza $\vec{\boldsymbol{F}}^{est}$ su un sistema, contrastando una forza interna $\vec{\boldsymbol{F}}^{int}$ del sistema, e producendo un lavoro $\mathcal{W}^{est}$. Facciamo alcuni esempi, per visualizzare la situazione:

[1] una pallina si trova su una rotaia orizzontale, ferma, a contatto con una molla distesa orizzontalmente; applichiamo la forza $\vec{\boldsymbol{F}}^{est}$ per spingere la pallina contro la molla, che quindi si comprime, e "resiste" alla nostra spinta con una forza elastica $\vec{\boldsymbol{F}}^{int}$;

[2] un'incudine si trova appoggiata sul pavimento, ferma; applichiamo una forza $\vec{\boldsymbol{F}}^{est}$ per sollevarla ad una certa altezza, contrastando la forza $\vec{\boldsymbol{F}}^{int}$ del sistema, che in questo caso è la forza di gravità;

[3] uno scatolone di libri è appoggiato sul pavimento; lo spostiamo applicando una forza $\vec{\boldsymbol{F}}^{est}$, facendolo strisciare, e vincendo quindi la forza di attrito radente $\vec{\boldsymbol{F}}^{int}$.

In tutti e 3 i casi, la forza applicata $\vec{\boldsymbol{F}}^{est}$ è associata ad uno spostamento, dunque compie un lavoro $\mathcal{W}^{est}$. Però, in tutti i casi, l'oggetto era fermo prima, ed è fermo dopo, dunque $\Delta\mathcal{E} = 0$: il lavoro esterno $\mathcal{W}^{est}$ non ha prodotto variazione di energia cinetica. Ovviamente perché c'è anche il

lavoro $\mathcal{W}^{int}$ della forza interna $\vec{\boldsymbol{F}}^{int}$: se $\Delta\mathcal{E} = 0$, deve in qualche modo essere $\mathcal{W}^{est} = -\mathcal{W}^{int}$.

La domanda è: dov'è andata l'energia spesa per compiere il lavoro esterno $\mathcal{W}^{est}$? È andata persa? O è stata immagazzinata, e può essere in qualche modo recuperata?

Nei casi [1] e [2], possiamo intuire che, non appena la forza esterna cessa di agire, quella interna non è più contrastata e quindi può mettere in moto l'oggetto. La molla si estende e spara la pallina; la gravità fa cadere l'incudine. In entrambi i casi, l'oggetto acquisisce energia cinetica $\mathcal{E}$. Se osservassimo che l'energia cinetica finale fosse pari al lavoro fatto dall'esterno ($\mathcal{E} = \mathcal{W}^{est}$?) potremmo dire che l'energia spesa per fare il lavoro esterno, che non si manifestava subito in modo "visibile", era in realtà immagazzinata nel sistema in una forma diversa, e si è poi manifestata non appena le condizioni lo hanno reso possibile. Questa forma di energia "immagazzinata" si chiama *energia potenziale*. L'energia dunque non è andata persa, *si è conservata*.

Nel caso [3] la situazione è molto diversa: sappiamo per esperienza che quando smettiamo di spingere, lo scatolone non comincia a muoversi da solo: rimane lì fermo. Dunque l'energia spesa per compiere il lavoro esterno non è più recuperabile. Non è stata immagazzinata da nessuna parte. Un esame attento mostrerebbe che per attrito le superfici a contatto dello scatolone e del pavimento si sono scaldate, e che l'aumento di temperatura è proporzionale al lavoro fatto dall'esterno. Dunque l'energia si è trasformata in un'altra forma, che chiameremmo energia termica. Ma questa non è più recuperabile in forma di energia cinetica [1].

Questi esempi ci consentono di trarre alcune conclusioni. Non tutte le forze interne si comportano allo stesso modo. Alcune forze (nei nostri esempi, la gravità e la forza elastica di una molla) consentono di accumulare *energia potenziale*, e si chiamano dunque *forze conservative*. Altre forze (come l'attrito) non hanno questa proprietà e si chiamano *forze dissipative*.

E ora, formalizziamo il problema in maniera generale e quantitativa.

---

[1] Almeno non lo è completamente. Uno potrebbe immaginare di sfruttare l'aumento di temperatura per mettere in moto una qualche macchina termica da cui ricavare un lavoro che rimette in moto lo scatolone. Qui ci stiamo addentrando nella *Termodinamica*, che è un vasto capitolo della Fisica che non possiamo approfondire qui. A questo livello vale la pena solo anticipare che esiste una legge fisica, nota come *Secondo Principio della Termodinamica*, che può essere enunciata in varie forme equivalenti, una delle quali dice in sostanza che, mentre è possibile convertire completamente un lavoro meccanico in energia termica, il processo inverso è possibile solo in parte: ci sarà sempre una parte di energia termica che non verrà riconvertita in lavoro.

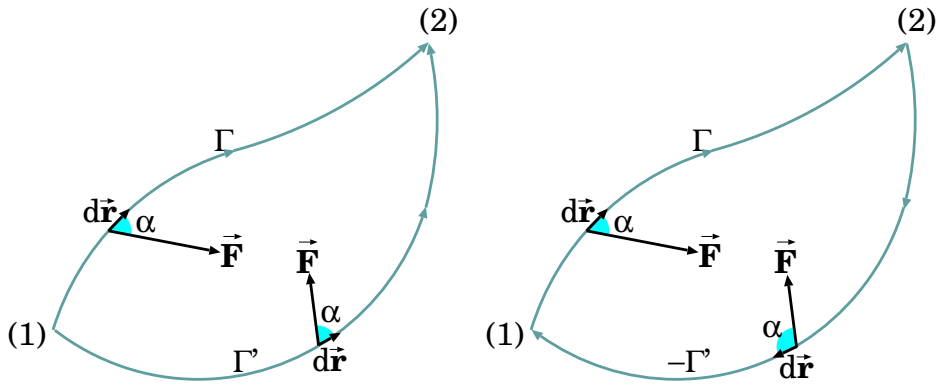


Figura 13.1: *Il lavoro di una forza conservativa dipende dagli estremi (1) e (2) ma non dal percorso:* $\int_\Gamma d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} = \int_{\Gamma'} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}$. *Invertendo l'orientamento di* Γ' *Otteniamo una linea chiusa* $\Gamma \cup (-\Gamma')$ *lungo la quale il lavoro è nullo:* $\oint d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} = 0$.

13.1 Forze conservative

Consideriamo un *campo di forza*

$$\vec{\boldsymbol{F}} \quad = \quad \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$$

e calcoliamo il lavoro $\mathcal{W} = \displaystyle\int d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}$ lungo un percorso da una posizione (1) a una posizione (2). Abbiamo già discusso (Sezione 12.1) che in generale il lavoro dipende dal percorso, ovvero $\displaystyle\int_\Gamma d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} \neq \int_{\Gamma'} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}$.

Ci sono tuttavia importanti casi di campi di forze in cui il lavoro calcolato dalla posizione (1) alla posizione (2) non dipende dal cammino percorso Γ. In tal caso si parla di *forze conservative* — la ragione di questo nome sarà chiara a breve. In tal caso quindi

$$\int_\Gamma d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} = \int_{\Gamma'} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} = \int_{(1)}^{(2)} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} \qquad \text{(forze conservative)} \tag{13.1}$$

(vd Fig. 13.1). Nell'ultimo membro dell'equazione il segno di integrale non viene scritto con la curva (Γ o Γ') bensì con gli estremi ($\int_{(1)}^{(2)}$), ad indicare che sono l'unica informazione rilevante ai fini del calcolo.

Sempre con riferimento alla Fig. 13.1, notiamo che invertendo l'orientamento della curva Γ' lo spostamento $d\vec{\boldsymbol{r}}$ lungo di essa cambia segno,

per cui la stessa cosa succede anche al lavoro elementare: $\delta\mathcal{W} \to -\delta\mathcal{W}$ [2]. Integrando su tutto il percorso:

$$\int_{-\Gamma'} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} = -\int_{\Gamma'} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}$$

Ora l'unione delle due curve Γ e $-\Gamma'$ forma un percorso chiuso $\Gamma \cup (-\Gamma')$: dall'Eq. (13.1) troviamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} - \int_{\Gamma'} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} = \int_{\Gamma} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} + \int_{-\Gamma'} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} \\ &= \int_{\Gamma \cup (-\Gamma')} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} \end{aligned}$$

Il lavoro di una forza conservativa lungo un percorso chiuso è sempre nullo.

L'integrale di un vettore lungo un percorso chiuso si chiama *circuitazione*, e si indica con $\oint$. Pertanto il risultato trovato si può scrivere come:

$$\oint d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} = 0 \qquad \text{(forze conservative)} \tag{13.2}$$

L'argomento può essere anche rovesciato. Se una forza è tale che per ogni percorso chiuso $\oint d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} = 0$, allora lungo un qualunque percorso aperto Γ il suo lavoro $\int_{\Gamma} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}$ non dipende dal percorso, ma solo dagli estremi, dunque la forza è conservativa.

13.2 Definizione dell'energia potenziale

Dato un campo di forza $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ <u>*conservativo*</u>, e scelto un punto di riferimento Q, si definisce l'energia potenziale $\mathcal{U}(A)$ di un generico punto A come "meno" il lavoro fatto da $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ lungo un percorso da Q ad A [3]:

$$\mathcal{U}(A) = -\int_{Q}^{A} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} \qquad \text{(forze conservative)} \tag{13.3}$$

---

[2] Questo discorso funziona solo se $\vec{\boldsymbol{F}}$ non dipende dal movimento. Per i campi di forze, $\vec{\boldsymbol{F}} \equiv \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$, che non dipende dall'orientamento di $d\vec{\boldsymbol{r}}$. Per le forze magnetiche $\vec{\boldsymbol{F}}_L = q\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$, pertanto invertire il movimento produce un'inversione di $\vec{\boldsymbol{F}}_L$, ma "fortunatamente" $\vec{\boldsymbol{F}}_L \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = 0$ sempre, quindi il problema non si pone. Un altro contro-esempio: le forze di attrito sono sempre $\vec{\boldsymbol{F}}_{attr} \propto -d\vec{\boldsymbol{r}}$; anche in questo caso, invertire il moto significa invertire la forza, e $\vec{\boldsymbol{F}}_{attr} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} < 0$ sempre. Quindi in questo caso $\int_{-\Gamma'} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} \neq -\int_{\Gamma'} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}$, e tutto il ragionamento salta!

[3] L'introduzione del segno "$-$" può apparire bizzarra, ma è lì per ottimi motivi, come vedremo...

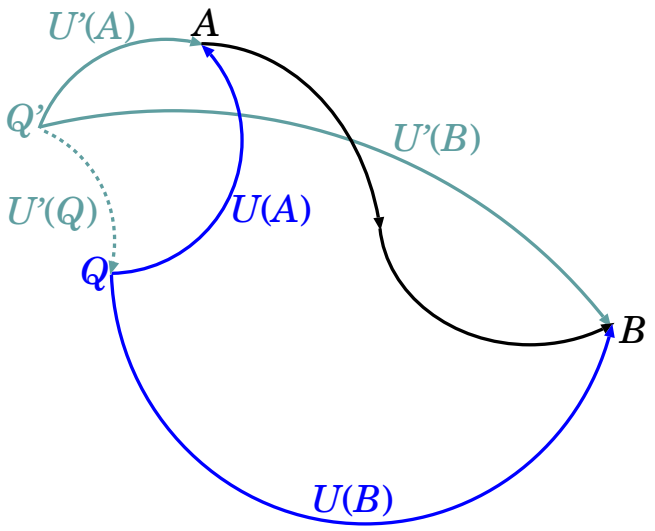


Figura 13.2: *Definizione di energia potenziale: dato un punto di riferimento Q si definisce $\mathcal{U}(A) = -\int_Q^A d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}$. Cambiando riferimento in Q', si ottiene una nuova definizione $\mathcal{U}'(A) = -\int_{Q'}^A d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}$, legata alla precedente da $\mathcal{U}'(A) = \mathcal{U}(A) + \mathcal{U}'(Q)$. Il lavoro da A a B si può scrivere come $\mathcal{W}(A \to B) = \mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(B)$.*

Nell'integrale solo gli estremi Q, A sono specificati, poiché il percorso è indifferente.

Il punto Q ha per convenzione energia potenziale nulla.

Date due generiche posizioni A, B nello spazio, il lavoro da A a B può essere calcolato lungo un qualunque percorso, poiché la forza $\vec{\boldsymbol{F}}$ è conservativa. Pertanto si può scegliere un percorso che passi per Q (vd Fig. 13.2):

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(A \to B) &= \int_A^Q d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} + \int_Q^B d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} \\
&= -\int_Q^A d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} + \int_Q^B d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} \\
&= \mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(B)
\end{aligned}$$

ovvero:

$$\mathcal{W}(A \to B) = \mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(B) = -\Delta\mathcal{U} \qquad \text{(forze conservative)} \tag{13.4}$$

13.2.1 Riferimento — o "zero" — dell'energia potenziale

La scelta del riferimento Q è arbitraria [4]. Modificando il punto di riferimento da Q a Q' (vd Fig. 13.2), ovviamente anche la definizione di energia potenziale cambia:

$$\mathcal{U}'(A) = -\int_{Q'}^{A} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} \tag{13.5}$$

La relazione fra le due definizioni $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}'$ è però semplice: se consideriamo infatti un percorso da Q' a A che passi per Q troviamo:

$$\mathcal{U}'(A) = -\int_{Q'}^{A} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} = -\int_{Q'}^{Q} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} - \int_{Q}^{A} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} = \mathcal{U}'(Q) + \mathcal{U}(A)$$

quindi una ridefinizione del riferimento modifica l'energia potenziale per una costante additiva:

$$\mathcal{U}'(A) = \mathcal{U}(A) + \mathcal{U}'(Q) \tag{13.6}$$

L'energia potenziale è sempre definita a meno di una costante additiva arbitraria.

Si noti che l'Eq. (13.4):

$$\mathcal{W}(A \to B) = \mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(B)$$

è valida per qualunque scelta del riferimento: se usiamo un riferimento Q' e quindi una definizione $\mathcal{U}'$ di energia potenziale, come in Eq. (13.5), i termini aggiuntivi $\mathcal{U}'(Q)$ che compaiono in Eq. (13.6) si elidono per differenza. Questo risultato non è inatteso: il lavoro da A a B non deve dipendere dalla scelta di Q.

13.3 Energia meccanica

Per un oggetto che si muove soggetto a forze conservative si definisce l'*energia meccanica* come la *somma di energia cinetica ed energia potenziale*:

$$E = \mathcal{E} + \mathcal{U} = \frac{m}{2}v^2 + \mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}) \tag{13.7}$$

dove l'ultima forma ci ricorda che l'energia cinetica $\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv^2$ dipende solo dal moto dell'oggetto, mentre l'energia potenziale $\mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}})$ dipende solo dalla sua posizione.

[4] Una consuetudine, quando possibile, è di scegliere il riferimento Q in un punto dove la forza conservativa sia nulla. Non sempre ciò è fattibile...

Unendo i risultati di Eq. (12.9) e Eq. (13.4), che qui riportiamo insieme:

$$\mathcal{W} = \Delta\mathcal{E} \quad ; \quad \mathcal{W} = -\Delta\mathcal{U}$$

otteniamo la *legge di conservazione dell'energia meccanica*:

$$\Delta E = \Delta\left(\mathcal{E} + \mathcal{U}\right) = 0 \tag{13.8}$$

Il moto di un oggetto su cui agiscono solo forze conservative è tale da conservare l'energia meccanica, pari alla somma di energia cinetica ed energia potenziale. (Ora finalmente è chiaro il motivo del nome "forze conservative").

13.4 Regione cinematicamente accessibile

Per campi di forze conservative l'energia meccanica E è una costante del moto. Inoltre sappiamo che $\mathcal{E} \geq 0$ sempre, e $\mathcal{E} = E - \mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}})$. Quindi possiamo scrivere la seguente disuguaglianza:

$$\mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}) \;\leq\; E \tag{13.9}$$

Questa disequazione, oltre che esprimere una relazione fra energia potenziale ed energia meccanica, può essere letta come una condizione che definisce la *regione accessibile cinematicamente*.

La situazione è illustrata in Fig. 13.3: tutti i punti $\vec{\boldsymbol{r}}$ in cui $\mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}) > E$ sono proibiti. Le regioni in cui $\mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}) \leq E$ sono tutte cinematicamente permesse. Nel caso a sinistra, solo una regione è effettivamente percorsa (quella con colore uniforme): se l'oggetto vi si trova all'istante iniziale, resta confinato lì per sempre. Altre regioni con $\mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}) \leq E$ (come quella tratteggiata) restano inaccessibili, perché separate da una "barriera di energia potenziale". Nel caso a destra, si vede che il moto è confinato per valori bassi di energia meccanica, ma può deconfinarsi per valori più alti.

13.5 Lavoro di forze "esterne"

Ora consideriamo la nostra "sonda", soggetta ad un campo di forze conservative $\vec{\boldsymbol{F}}^{cons}$, e supponiamo di applicare anche una forza "esterna" $\vec{\boldsymbol{F}}^{est}$. Quando la sonda si sposta da un punto A a un punto B, la sua energia potenziale subisce una variazione pari a:

$$\Delta\mathcal{U} = \mathcal{U}(B) - \mathcal{U}(A) = -\mathcal{W}^{cons}(A \to B) = -\int_A^B d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}^{cons}$$

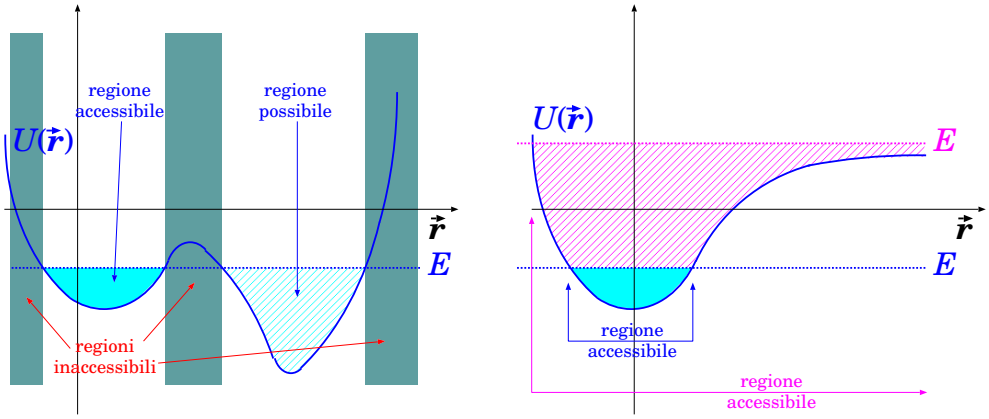


Figura 13.3: *Regione cinematicamente accessibile al moto: solo i valori di $\vec{r}$ tali che $\mathcal{U}(\vec{r}) \leq E$ sono ammessi (in figura l'asse orizzontale rappresenta tutto lo spazio tri-dimensionale, anche se per esigenze grafiche appare come uni-dimensionale). A sinistra: due regioni sono cinematicamente permesse, ma non si può passare dall'una all'altra. A destra: per valori bassi dell'energia meccanica il moto è confinato (sistema legato); per valori più alti il moto può raggiungere distanze infinite (sistema non legato).*

(vd Eq. (13.4)). Invece, la variazione dell'energia cinetica è data dal lavoro *totale*, delle forze conservative e di quelle esterne:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E} &= \mathcal{W} \\ &= \int \left(\vec{\boldsymbol{F}}^{cons} + \vec{\boldsymbol{F}}^{est}\right) \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int \vec{\boldsymbol{F}}^{cons} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} + \int \vec{\boldsymbol{F}}^{est} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} \\ &= \mathcal{W}^{cons} + \mathcal{W}^{est} \end{aligned} \tag{13.10}$$

Per cominciare, possiamo pensare di regolare $\vec{\boldsymbol{F}}^{est}$ in modo che la sonda in A sia ferma, e che arrivata in B sia di nuovo ferma. Pertanto la sua energia cinetica alla fine non è cambiata: $\Delta\mathcal{E} = 0$. Il lavoro totale di tutte le forze ($\vec{\boldsymbol{F}}^{cons}$ e $\vec{\boldsymbol{F}}^{est}$) deve quindi essere nullo, ovvero

$$\mathcal{W}^{est}(A \to B) \;=\; -\mathcal{W}^{cons}(A \to B) \qquad (\text{se } \Delta\mathcal{E} = 0) \tag{13.11}$$

Dov'è andato il lavoro $\mathcal{W}^{est}$ fatto dalle forze esterne? È stato "speso" per contrastare le forze conservative, ok... Può essere "recuperato"?

L'Eq. (13.11) ci fornisce la risposta. Infatti essa dà:

$$\mathcal{W}^{est}(A \to B) \;=\; \Delta\mathcal{U} \;=\; \mathcal{U}(B) - \mathcal{U}(A) \qquad (\text{se } \Delta\mathcal{E} = 0) \tag{13.12}$$

Quindi il lavoro delle forze esterne è stato "immagazzinato nel campo di forze" in forma di energia potenziale, $\Delta\mathcal{U}$. Successivamente questa può essere restituita in forma di energia cinetica, dalle forze conservative, $\Delta\mathcal{E} = -\Delta\mathcal{U}$.

Analizziamo ora il caso generale, di una sonda su cui agiscano sia forze conservative, con risultante $\vec{\boldsymbol{F}}^{cons}$, sia altre forze "esterne", con risultante $\vec{\boldsymbol{F}}^{est}$, non necessariamente conservative. Per le forze conservative possiamo scrivere il lavoro come variazione di energia potenziale: $\mathcal{W}^{cons} = -\Delta\mathcal{U}$. Pertanto:

$$\mathcal{W} = -\Delta\mathcal{U} + \mathcal{W}^{est} \tag{13.13}$$

L'energia cinetica subisce una variazione

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{W} = -\Delta\mathcal{U} + \mathcal{W}^{est} \tag{13.14}$$

La variazione di energia meccanica $E = \mathcal{E} + \mathcal{U}$ è quindi esprimibile come $\Delta E = \Delta\mathcal{E} + \Delta\mathcal{U}$, ovvero:

$$\Delta E = \mathcal{W}^{est} = \int \vec{\boldsymbol{F}}^{est} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} \tag{13.15}$$

Riassumendo: *il lavoro di forze "esterne" — ovvero non associabili all'energia potenziale — produce una variazione dell'energia meccanica.*

13.6 Energia potenziale di un campo di forza uniforme

L'esempio più semplice di campo di forza conservativo è il campo di forza uniforme: $\vec{\boldsymbol{F}}$ è uguale in direzione ed intensità in tutti i punti dello spazio.

In questo caso, il lavoro da un punto A a un punto B è semplicemente

$$\mathcal{W}(A \to B) \quad = \quad \int_A^B \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \left(\int_A^B d\vec{\boldsymbol{r}} \right) = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot (\vec{\boldsymbol{r}}_B - \vec{\boldsymbol{r}}_A)$$

(spiegazione: essendo $\vec{\boldsymbol{F}}$ indipendente da $\vec{\boldsymbol{r}}$, può essere fattorizzato al di fuori dell'integrale; poi, $\int_A^B d\vec{\boldsymbol{r}}$ è semplicemente una successione di spostamenti infinitesimi contigui $d\vec{\boldsymbol{r}}$ da A fino a B, il cui effetto totale è lo spostamento da A a B, descritto dal vettore $\vec{\boldsymbol{r}}_B - \vec{\boldsymbol{r}}_A$).

Una possibile scelta di energia potenziale può semplicemente essere:

$$\mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{r}} \qquad \text{(campo di forza uniforme)} \tag{13.16}$$

che soddisfa la relazione $\mathcal{W}(A \to B) = \mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}_A) - \mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}_B)$.

13.6.1 Energia potenziale della forza-peso

In prossimità della superficie terrestre, una massa m sente un'attrazione gravitazionale

$$\vec{\boldsymbol{F}}_g = -mg\hat{\boldsymbol{z}} \qquad \text{(forza-peso)}$$

uniforme, con buona approssimazione. Applicando quanto detto nella sezione precedente (Eq. (13.16)), possiamo quindi introdurre l'*energia gravitazionale*: $\mathcal{U}_g = -\vec{\boldsymbol{F}}_g \cdot \vec{\boldsymbol{r}} = mg\hat{\boldsymbol{z}} \cdot \vec{\boldsymbol{r}} = mgz$, quindi

$$\mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}) = mgz \qquad \text{(forza-peso)} \tag{13.17}$$

Spesso si indica con h la quota (altezza) rispetto ad un dato riferimento, per cui la stessa formula si trova in molti testi nella forma

$$\mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}) = mgh \qquad \text{(forza-peso)} \tag{13.18}$$

13.7 Campi di forza centrali

Un campo di forza $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ si dice *centrale* se la sua dipendenza dalla posizione spaziale ha la forma:

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \;=\; F(r)\hat{\boldsymbol{r}} \qquad \left(r \equiv |\vec{\boldsymbol{r}}| \;\; ; \;\; \hat{\boldsymbol{r}} \equiv \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r} \right) \tag{13.19}$$

I campi di forza centrali sono sempre conservativi.

Dimostriamolo. Anzitutto, cominciamo con il calcolo del lavoro elementare $\delta\mathcal{W}$ per uno spostamento da $\vec{\boldsymbol{r}}$ a $\vec{\boldsymbol{r}} + d\vec{\boldsymbol{r}}$:

$$\delta\mathcal{W} \;=\; \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = F(r)\hat{\boldsymbol{r}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \frac{F(r)}{r}\vec{\boldsymbol{r}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$$

Trattiamo il termine $\vec{\boldsymbol{r}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$:

$$\vec{\boldsymbol{r}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} \;=\; x\,dx \;+\; y\,dy \;+\; z\,dz$$

Nella Sezione 12.2 abbiamo già visto come trattare forme differenziali del tipo $A\,dA$: sappiamo che $A\,dA = \frac{1}{2}d(A^2)$ [5]. Quindi

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{r}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} \;&=\; \frac{1}{2}\left(d(x^2) + d(y^2) + d(z^2)\right) \\ &=\; \frac{1}{2}\,d\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \;=\; \frac{1}{2}\,d(r^2) \;=\; r\,dr \end{aligned}$$

[5] Ricordiamo: $\dfrac{d(A^2)}{dA} = 2\,A \quad\Longrightarrow\quad A\,dA = \dfrac{1}{2}d(A^2)$

Pertanto si trova:

$$\delta\mathcal{W} \;=\; F(r)dr$$

È un risultato notevole! Il lavoro elementare dipende solo dalla distanza radiale r e dalla sua variazione dr, *non dalla direzione di* $d\vec{\boldsymbol{r}}$. La ragione sta proprio nella forma radiale del campo di forza. In effetti, il prodotto scalare $\hat{\boldsymbol{r}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$ ha come effetto quello di proiettare lo spostamento vettoriale $d\vec{\boldsymbol{r}}$ sulla direzione radiale $\hat{\boldsymbol{r}}$: la componente radiale di $d\vec{\boldsymbol{r}}$ è precisamente dr.

Pertanto, il calcolo del lavoro da (1) a (2) è:

$$\mathcal{W} \;=\; \int_\Gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr$$

che ovviamente non dipende dalla linea Γ ma solo dagli estremi (1) e (2) — anzi, solo dalle loro distanze radiali r_1, r_2 dal centro.

Pertanto il campo di forza centrale è conservativo. L'energia potenziale può essere descritta partendo da una distanza di riferimento r_0 dal centro, alla quale essa è convenzionalmente nulla. Allora, alla generica distanza r dal centro, essa deve valere:

$$\mathcal{U}(r) = -\int_{r_0}^{r} F(r')dr' \tag{13.20}$$

Si tratta di un integrale in una sola variabile: che sia calcolabile con una formula analitica o in maniera numerica dipende dalla forma di $F(r)$, poco importa: l'importante è che sia ben definito in modo non ambiguo.

13.7.1 Campi centrali $\propto \dfrac{1}{r^2}$

Un campo di forza gravitazionale generato da una massa puntiforme, oppure un campo di forza coulombiano generato da una carica puntiforme ferma, sono ottimi e notevoli esempi di campi di forza centrali: la loro forma è:

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \;=\; \frac{K}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{13.21}$$

(se si tratta di forza gravitazionale fra due masse m_1, m_2, allora $K \equiv -Gm_1m_2$; se invece si tratta di forza elettrica coulombiana fra due cariche q_1, q_2, allora $K \equiv \dfrac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}$).

Per campi centrali $\propto \dfrac{1}{r^2}$, come quelli dell'Eq. (13.21), il riferimento dove $\mathcal{U}(r_0) = 0$ viene scelto per $r_0 \to +\infty$. Allora

$$\mathcal{U}(r) = \int_r^{+\infty} \frac{K}{(r')^2}dr' = \left[-\frac{K}{r'}\right]_r^{+\infty} = \frac{K}{r}$$

quindi:

$$\mathcal{U}(r) \;=\; \frac{K}{r} \qquad \text{(campo centrale con } F(r) = \frac{K}{r^2} \text{)} \tag{13.22}$$

In particolare, l'energia potenziale fra due masse $m_1,\ m_2$ che si attraggono per gravità è:

$$\mathcal{U}_g(r) \;=\; -\frac{Gm_1m_2}{r} \qquad \text{(energia gravitazionale fra } m_1,\ m_2 \text{)} \tag{13.23}$$

13.8 Combinazione di campi di forze conservative

Supponiamo che su un oggetto agiscano molti campi di forze conservative, $\vec{\boldsymbol{F}}_1(\vec{\boldsymbol{r}}), \ldots \vec{\boldsymbol{F}}_n(\vec{\boldsymbol{r}})$. La risultante delle forze sull'oggetto è $\vec{\boldsymbol{F}} = \sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i$. Vogliamo mostrare che

- anche il campo di forza risultante è conservativo;
- l'energia potenziale del campo di forza risultante è la somma delle energie potenziali dei singoli campi.

Infatti: essendo tutti i campi $\vec{\boldsymbol{F}}_i$ conservativi, $\oint d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}_i = 0$ per qualunque i, pertanto:

$$\oint d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} = \oint d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \left(\sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i \right) = \sum_i \oint d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}_i = 0$$

Quindi anche $\vec{\boldsymbol{F}}$ è conservativo. Questo ci consente di definire in modo non ambiguo la sua energia potenziale rispetto a un riferimento Q:

$$\mathcal{U}(A) \;=\; -\int_Q^A \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$$

Espandendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(A) \;&=\; -\int_Q^A \left(\sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i(\vec{\boldsymbol{r}}) \right) \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} \\ &=\; \sum_i \left(-\int_Q^A \vec{\boldsymbol{F}}_i(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} \right) \;=\; \sum_i \mathcal{U}_i(A) \end{aligned}$$

(come volevasi dimostrare) [6].

13.8.1 Energia potenziale gravitazionale

Abbiamo visto in Sezione 11.2.2 che una configurazione di N masse $m_1, m_2, \ldots, m_N$ poste in posizioni $\vec{\boldsymbol{r}}_1, \vec{\boldsymbol{r}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{r}}_N$ produce nello spazio un campo gravitazionale

$$\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \;=\; -G \sum_k m_k \frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k|^3}$$

Per quanto detto finora, una massa-sonda m_0 in posizione $\vec{\boldsymbol{r}}$ sente una forza gravitazionale

$$\vec{\boldsymbol{F}}_0 \;=\; m_0 \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \;=\; \sum_{k=1}^{N} \left[-\frac{G m_0 m_k}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k|^3} (\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k) \right]$$

che deve essere conservativa, in quanto somma di forze conservative. L'energia potenziale è la somma di tutte le energie potenziali associate a ciascuna delle masse m_k. Ciascuna di queste vale:

$$\mathcal{U}_{0,k}(\vec{\boldsymbol{r}}) \;=\; -G \frac{m_0 m_k}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k|}$$

(vedi Eq. (13.23)), quindi

$$\mathcal{U}_0(\vec{\boldsymbol{r}}) \;=\; -G\, m_0 \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k|} \tag{13.24}$$

L'energia potenziale gravitazionale della massa-sonda è sempre proporzionale a m_0. Questo suggerisce di definire il *potenziale gravitazionale* $\Phi_g(\vec{\boldsymbol{r}})$

$$\Phi_g(\vec{\boldsymbol{r}}) \;=\; -G \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k|} \tag{13.25}$$

---

[6] Si poteva anche assumere che ciascun campo $\vec{\boldsymbol{F}}_i$ avesse un proprio riferimento Q_i per l'energia potenziale associata, cioè $\mathcal{U}_i(A) = -\int_{Q_i}^{A} \vec{\boldsymbol{F}}_i(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$. Il calcolo sarebbe stato solo leggermente più lungo, e sarebbe risultato in un'espressione:

$$\mathcal{U}(A) = \sum_i \mathcal{U}_i(A) - \underbrace{\sum_i \mathcal{U}_i(Q)}_{\text{costante}}$$

equivalente a quella trovata, a meno di una costante additiva.

in modo che per una qualunque massa-sonda m_0 si abbia:

$$\mathcal{U}_0(\vec{\boldsymbol{r}}) \;=\; m_0\,\Phi_g(\vec{\boldsymbol{r}}) \tag{13.26}$$

13.8.2 Energia potenziale elettrostatica

Possiamo ripetere il ragionamento tale e quale per le forze elettrostatiche. Una configurazione di N cariche $q_1, q_2, \ldots, q_N$, ferme o in moto lento, poste in posizioni $\vec{\boldsymbol{r}}_1, \vec{\boldsymbol{r}}_2, \ldots, \vec{\boldsymbol{r}}_N$, produce nello spazio un campo elettrostatico

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_k q_k \frac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_k}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_k|^3}$$

Una carica-sonda q_0 in posizione $\vec{\boldsymbol{r}}$ sente una forza elettrostatica

$$\vec{\boldsymbol{F}}_0 \;=\; q_0\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \;=\; \sum_{k=1}^{N}\left[\;\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_0 q_k}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_k|^3}\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_k)\;\right]$$

che deve essere conservativa, in quanto somma di forze conservative. L'energia potenziale è la somma di tutte le energie potenziali associate a ciascuna delle cariche q_k. Ciascuna di queste vale:

$$\mathcal{U}_{0,k}(\vec{\boldsymbol{r}}) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_0 q_k}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_k|}$$

quindi

$$\mathcal{U}_0(\vec{\boldsymbol{r}}) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,q_0\sum_{k=1}^{N}\frac{q_k}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_k|} \tag{13.27}$$

L'energia potenziale elettrostatica della carica-sonda è sempre proporzionale a q_0. Questo suggerisce di definire il *potenziale elettrostatico* $\Phi_e(\vec{\boldsymbol{r}})$

$$\Phi_e(\vec{\boldsymbol{r}}) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{q_k}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_k|} \tag{13.28}$$

in modo che per una qualunque carica-sonda q_0 si abbia:

$$\mathcal{U}_0(\vec{\boldsymbol{r}}) \;=\; q_0\,\Phi_e(\vec{\boldsymbol{r}}) \tag{13.29}$$

13.9 Forza come "meno" gradiente dell'energia potenziale

Consideriamo un campo di forza conservativo $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ e due posizioni molto vicine, $\vec{\boldsymbol{r}}$ e $\vec{\boldsymbol{r}} + d\vec{\boldsymbol{r}}$. Il lavoro elementare fatto dalla forza nel percorso da $\vec{\boldsymbol{r}}$ a $\vec{\boldsymbol{r}} + d\vec{\boldsymbol{r}}$ è

$$\delta\mathcal{W} = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}) - \mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}} + d\vec{\boldsymbol{r}})$$

Lavoriamo su $\mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}+d\vec{\boldsymbol{r}})-\mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}})$, scomponendo $\vec{\boldsymbol{r}}$ e $d\vec{\boldsymbol{r}}$ in componenti cartesiane:

$$\mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}} + d\vec{\boldsymbol{r}}) - \mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}) \quad = \quad \mathcal{U}(x + dx, y + dy, z + dz) - \mathcal{U}(x, y, z)$$

Ora sottraiamo e ri-aggiungiamo termini uguali, in modo da non modificare il valore dell'espressione:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}} + d\vec{\boldsymbol{r}}) - \mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}) \quad = \quad & [\mathcal{U}(x + dx, y + dy, z + dz) - \mathcal{U}(x + dx, y + dy, z)] \\ & + [\mathcal{U}(x + dx, y + dy, z) - \mathcal{U}(x + dx, y, z)] \\ & + [\mathcal{U}(x + dx, y, z) - \mathcal{U}(x, y, z)]\end{aligned}$$

Infine sfruttiamo la definizione di derivata: $\dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$ applicata rispettivamente alle tre coordinate x, y, z. Poiché la funzione $\mathcal{U}$ dipende da più variabili, si introduce il simbolo di *derivata parziale* ∂, per indicare che la variazione di $\mathcal{U}$ avviene variando una sola delle coordinate alla volta:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x} &\equiv \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\mathcal{U}(x + \Delta x, y, z) - \mathcal{U}(x, y, z)}{\Delta x} \\ \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial y} &\equiv \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\mathcal{U}(x, y + \Delta y, z) - \mathcal{U}(x, y, z)}{\Delta y} \\ \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial z} &\equiv \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\mathcal{U}(x, y, z + \Delta z) - \mathcal{U}(x, y, z)}{\Delta z}\end{aligned} \tag{13.30}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(x + dx, y, z) - \mathcal{U}(x, y, z) \quad &= \quad \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x}\, dx \\ \mathcal{U}(x + dx, y + dy, z) - \mathcal{U}(x + dx, y, z) \quad &= \quad \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial y}\, dy \\ \mathcal{U}(x + dx, y + dy, z + dz) - \mathcal{U}(x + dx, y + dy, z) \quad &= \quad \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial z}\, dz\end{aligned}$$

e quindi

$$\mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}} + d\vec{\boldsymbol{r}}) - \mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} dz$$

Le tre derivate parziali appena introdotte possono essere combinate in una quantità vettoriale, che si chiama *gradiente*:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\mathcal{U} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{13.31}$$

Ricapitolando quanto abbiamo trovato:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W} &= \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} \\ -\delta\mathcal{W} &= \mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}} + d\vec{\boldsymbol{r}}) - \mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}) \\ &= \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} dz \\ &= \vec{\boldsymbol{\nabla}}\mathcal{U} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} \end{aligned}$$

e per confronto:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\mathcal{U} \tag{13.32}$$

Riassumendo: *se la forza $\vec{\boldsymbol{F}}$ è conservativa, si può definire un'energia potenziale $\mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}})$, che è funzione della posizione. Il gradiente dell'energia potenziale, cambiato di segno, è pari alla forza.*

Un esempio della relazione fra forza e energia potenziale è illustrato in Fig. 13.4 — per esigenza grafica lo spazio è supposto bidimensionale, e le coordinate sono x, y. Come si vede, la forza è sempre orientata verso energie potenziali decrescenti, lungo la massima pendenza; maggiore è la pendenza, più fitte sono le curve di livello dell'energia potenziale, più grande è l'intensità della forza.

Esercizio 13.1. *Calcolare il campo di forza per ciascuna delle seguenti energie potenziali:*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1(x,y,z) &= \alpha x + \beta y + \gamma z \\ \mathcal{U}_2(x,y,z) &= Ax^2 + Bxy + Cy^2 \\ \mathcal{U}_3(x,y,z) &= \frac{K}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{aligned}$$

Soluzione. *Usiamo le formule* $F_x = -\dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}$; $F_y = -\dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}$; $F_z = -\dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial z}$. *Il primo caso è immediato:*

$$F_{1,x} = -\alpha \quad ; \quad F_{1,y} = -\beta \quad ; \quad F_{1,z} = -\gamma \qquad (\textit{campo di forza uniforme})$$

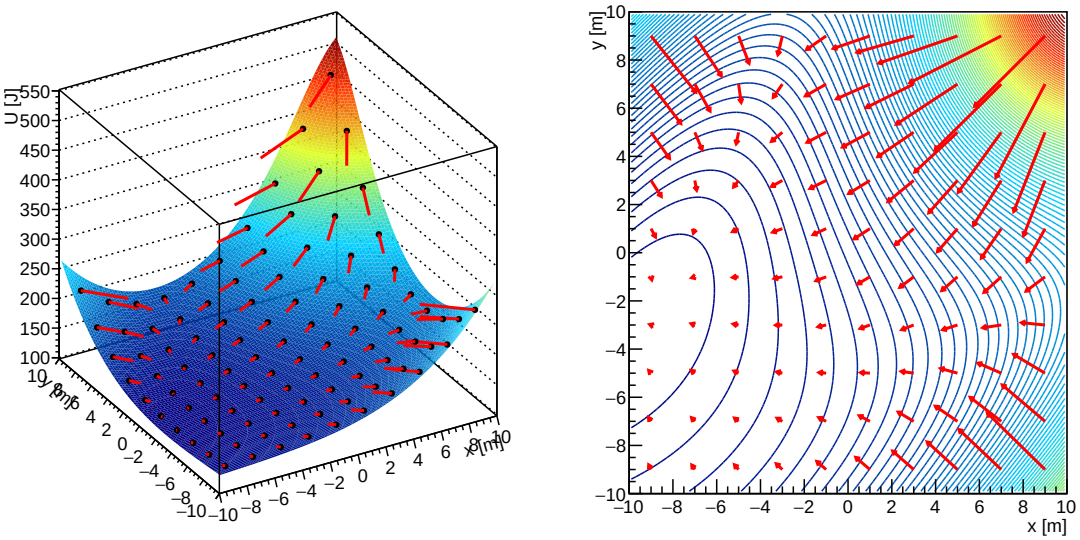


Figura 13.4: *Esempio di grafico di un'energia potenziale $\mathcal{U}(x, y)$ e del campo di forza $\vec{\boldsymbol{F}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\mathcal{U}$. L'energia potenziale è una quantità numerica, pertanto può essere rappresentata come "quota" in un grafico 3-dimensionale (a sinistra), o come mappa con curve di livello e "colori geografici" (a destra). Le curve di livello sono linee equipotenziali. La forza è un vettore, quindi ha un'intensità e una direzione, che vengono rappresentate in ogni punto da segmenti rossi.*

Anche il secondo è semplice

$$F_{2,x} \;=\; -(2Ax + By) \quad ; \quad F_{2,y} \;=\; -(Bx + 2Cy) \quad ; \quad F_{2,z} \;=\; 0$$

Per calcolare il terzo inseriamo la variabile ausiliaria $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — *che altro non è se non la distanza dall'origine — cosicché* $\mathcal{U}_3 = \dfrac{K}{r}$. *Ora calcoliamo* $F_{3,x} = -\dfrac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial x} = -\dfrac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x}$. *Poi,* $\dfrac{\partial \mathcal{U}_3}{\partial r} = -\dfrac{K}{r^2}$; *inoltre* $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} 2x = \dfrac{x}{r}$. *Per le altre due coordinate si procede in modo analogo. Il risultato è*

$$F_{3,x} \;=\; K\frac{x}{r^3} \quad ; \quad F_{3,y} \;=\; K\frac{y}{r^3} \quad ; \quad F_{3,z} \;=\; K\frac{z}{r^3}$$

Questa forma di campo di forza è MOLTO IMPORTANTE: è quella dei campi gravitazionali e dei campi elettrostatici.

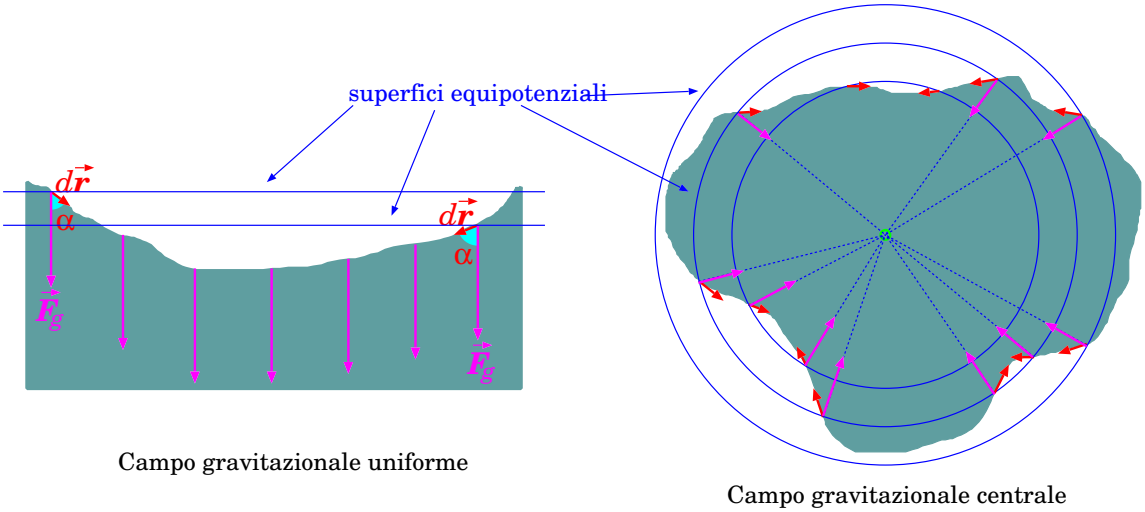


Figura 13.5: *Linee di forza e superfici equipotenziali per un campo gravitazionale uniforme (a sinistra) e centrale (a destra).*

13.10 Superfici equipotenziali

La condizione

$$\mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}) = K \qquad \text{(costante)}$$

individua una superficie nello spazio, detta *superficie equipotenziale*. In Fig. 13.4 (destra), le superfici equipotenziali sono rappresentate dalle curve di livello — la figura rappresenta uno spazio 2-D, pertanto le equipotenziali sono curve; in 3-D ovviamente sono superfici.

Alcune caratteristiche delle superfici equipotenziali:

- il lavoro fra due punti di una stessa superficie equipotenziale è nullo;
- il lavoro fra due punti appartenenti a due superfici equipotenziali distinte dipende solo da tali superfici — non dai punti specifici;
- la forza $\vec{\boldsymbol{F}}$ è sempre ortogonale a tutte le superfici equipotenziali — infatti qualunque spostamento $d\vec{\boldsymbol{r}}$ che giace su una superficie equipotenziale deve essere tale che $0 = \delta\mathcal{W} = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$.

Forma degli oggetti astrofisici

Perché gli oggetti astrofisici sono (approssimativamente) sferici? In breve: per la stessa ragione per cui i rilievi sulla Terra tendono ad appiattirsi.

Se la forza dominante è quella gravitazionale, il suo effetto tende a far diminuire l'energia potenziale. Infatti, $d\mathcal{U} = -\vec{\boldsymbol{F}}_g \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$. *Un qualunque oggetto, posto in quiete su una superficie, tende a franare tirato dalla gravità. Detto* $d\vec{\boldsymbol{r}}$ *il suo spostamento,* $\vec{\boldsymbol{F}}_g \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = F_g\, ds\, \cos\alpha$. *Nella frana,* $\alpha < \pi/2$ *(vd Fig. 13.5), quindi* $\cos\alpha > 0$. *Ne segue che* $d\mathcal{U} < 0$ *per qualunque oggetto che frani. La condizione più stabile è quella in cui la superficie è ovunque ortogonale alle linee di forza, per cui* $\alpha = \pi/2$, $d\mathcal{U} = 0$, *e non è più possibile franare ulteriormente. Una superficie ovunque ortogonale alle linee di forza è una superficie equipotenziale.*

In prossimità della superficie terrestre, $\vec{\boldsymbol{F}}_g$ *è verticale e diretto verso il basso, mentre le superfici equipotenziali sono piani orizzontali, come in Fig. 13.5 (sinistra). Pertanto, le "frane" tendono a livellare il terreno, rendendolo orizzontale.*

Un oggetto astrofisico, per fissare le idee di dimensioni planetarie o maggiori, genera un campo gravitazionale sostanzialmente centrale, quindi le superfici equipotenziali sono sostanzialmente sferiche, come in Fig. 13.5 (destra). In questo caso le "frane" tendono ad abbassare le parti più prominenti (montagne), trasferendo materiale negli avvallamenti. Il processo si stabilizza quando l'oggetto astrofisico ha assunto una forma approssimativamente sferica.

In oggetti di dimensioni sub-planetarie, le forze di coesione sono competitive con la gravità. Se la massa dell'oggetto non è sufficientemente grande, e i materiali sono molto coesi, la gravità risulta troppo debole per sfericizzare l'oggetto — è quello che succede per esempio per gli asteroidi. Tipicamente, un oggetto celeste assume forma sferica quando il suo diametro è alcune centinaia di km. L'oggetto celeste sferico più piccolo, osservato nel Sistema Solare, è Mimas, un satellite di Saturno, con un diametro di 396 km. *Esistono tuttavia oggetti più grandi ma non sferici: per esempio Vesta, nella fascia di asteroidi, ha una forma irregolare, con l'asse massimo di* 580 km *e quello minimo di* 460 km. *Cerere, l'oggetto più grande della fascia di asteroidi, è l'unico di forma sferica, con un diametro di* 946 km. *Altri oggetti sferici relativamente "piccoli" nel Sistema Solare sono Plutone (diametro* 2376 km*), il suo satellite principale Caronte (diametro* 1212 km*), la nostra Luna (diametro* 3474 km*).*

13.10.1 Un criterio per stabilire se una forza è conservativa (*)

Per concludere questo argomento, diamo infine un criterio per verificare se un campo di forza $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ è conservativo.

Se lo è, allora è possibile definire un'energia potenziale $\mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}})$ tale che

$$\vec{\boldsymbol{F}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\mathcal{U}$$

Se ciò è vero, allora, sfruttando la proprietà di commutazione delle derivate parziali:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{U} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{U} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}F_y = \frac{\partial}{\partial y}F_x \\
\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{U} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{U} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}F_z = \frac{\partial}{\partial z}F_y \\
\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{U} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{U} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z}F_x = \frac{\partial}{\partial x}F_z
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\vec{\boldsymbol{F}} \text{ conservativa} \quad \underset{(\Longleftarrow)}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = \dfrac{\partial F_x}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial F_z}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial F_x}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial x} \end{cases} \tag{13.33}$$

Nota: l'implicazione $\Longrightarrow$ è sempre valida. A rigore, l'implicazione logica inversa $\Longleftarrow$ non è vera in generale: occorre che lo spazio 3-dimensionale ("dominio") in cui è definito $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ sia *semplicemente connesso* (vd Fig. 13.6), ovvero tale che:

- ogni coppia di punti del dominio deve potersi connettere con una linea continua interamente contenuta nel dominio;
- qualunque linea chiusa contenuta nel dominio, e passante per un punto fissato, deve potersi ridurre con continuità ad un punto, rimanendo sempre contenuta nel dominio.

(Per esempio, lo spazio 3-dimensionale è semplicemente connesso; lo spazio 3-dimensionale privato di alcuni punti isolati è semplicemente connesso; lo spazio 3-dimensionale privato di una o più linee rette *non è* semplicemente connesso, perché qualunque linea chiusa che circonda la linea retta esclusa non può essere ridotta ad un punto senza "attraversare" la retta esclusa.)

Esercizio 13.2. *Consideriamo un campo di forze della forma $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{A}}$, dove $\vec{\boldsymbol{A}}$ è una quantità vettoriale che non dipende da $\vec{\boldsymbol{r}}$. È un campo di forza conservativo?*

Risposta. *Scegliamo un riferimento cartesiano con l'asse $\hat{\boldsymbol{z}}$ parallelo ad $\vec{\boldsymbol{A}}$. Così facendo, in coordinate cartesiane $\vec{\boldsymbol{A}} \equiv (0, 0, A)$. Le componenti cartesiane di*

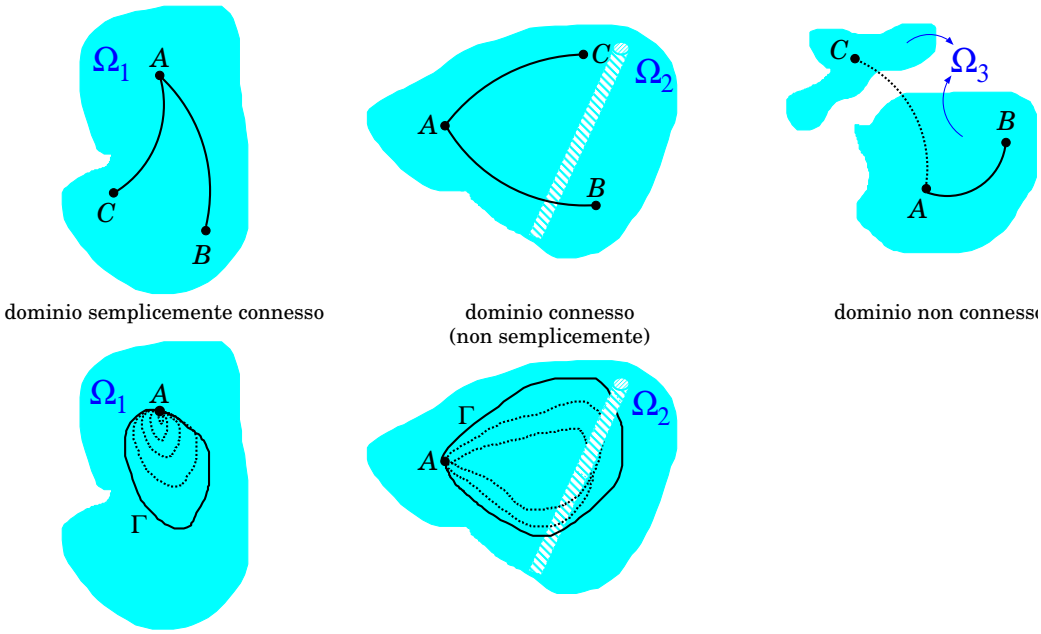


Figura 13.6: *Esempi di domini connessi e semplicemente connessi. I domini* Ω_1, Ω_2 *sono* connessi, *mentre* Ω_3 non è connesso. *Inoltre,* Ω_1 *è* semplicemente connesso, *mentre* Ω_2 *non lo è (a causa del "carotaggio" che impedisce di ridurre la linea chiusa* Γ *a un punto senza uscire dal dominio stesso).*

$\vec{\boldsymbol{F}}$ *sono*

$$\begin{aligned} F_x &= A_y z - A_z y = -Ay \\ F_y &= A_z x - A_x z = Ax \\ F_z &= A_x y - A_y x = 0 \end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_y}{\partial x} &= A \quad ; \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = -A \\ \frac{\partial F_z}{\partial y} &= 0 \quad ; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} &= 0 \quad ; \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

quindi una delle tre condizioni dell'Eq. (13.33) (la prima) non è soddisfatta: il campo pertanto non è conservativo.

Esercizio 13.3. *Un campo di forza*

$$\begin{aligned} F_x &= -A\,\frac{y}{\rho^2} \\ F_y &= A\,\frac{x}{\rho^2} \qquad ; \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ F_z &= B \end{aligned}$$

è conservativo?

Risposta. *La risposta è NO. Vediamo perché. Anzitutto,* $\dfrac{\partial F_x}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial x} = 0$ *e* $\dfrac{\partial F_y}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial y} = 0$. *Poi:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial y} &= -A\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{y}{\rho^4}\frac{\partial \rho^2}{\partial y}\right) = -A\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{y}{\rho^4}2y\right) = -A\,\frac{x^2-y^2}{\rho^4} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} &= A\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{x}{\rho^4}\frac{\partial \rho^2}{\partial x}\right) = A\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{x}{\rho^4}2x\right) = A\,\frac{y^2-x^2}{\rho^4} \end{aligned}$$

Quindi anche $\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x}$.

Però, il dominio NON è semplicemente connesso: infatti la retta $x = 0; y = 0$ *(cioè l'asse* z*) è esclusa dal dominio, essendo* $\vec{\boldsymbol{F}}$ *non definibile su di essa.*

Per mostrare in modo diverso che $\vec{\boldsymbol{F}}$ *non è conservativa si può procedere calcolando* $\oint \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$ *su una circonferenza di raggio* ρ *intorno all'asse* z. *Allora* $\vec{\boldsymbol{r}} \equiv (x, y) \equiv \rho(\cos\phi, \sin\phi)$; *facendo la variazione infinitesima,* $d\vec{\boldsymbol{r}} \equiv \rho(-\sin\phi, \cos\phi)d\phi$. *Quindi*

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} &= F_x dx + F_y dy = \left(-A\frac{y}{\rho^2}\right)(-\rho\sin\phi\, d\phi) + \left(A\frac{x}{\rho^2}\right)(\rho\cos\phi\, d\phi) \\ &= A(\sin^2\phi + \cos^2\phi)\, d\phi = A\, d\phi \\ \oint \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} &= 2\pi A \neq 0 \end{aligned}$$

Esercizio 13.4. *Consideriamo un campo di forza le cui componenti cartesiane sono*

$$\begin{aligned} F_x &= k(x-y) \\ F_y &= k(y-x) \\ F_z &= -2kz \end{aligned}$$

È conservativo? Se sì costruire un'energia potenziale.

Risposta. *Calcoliamo le derivate parziali:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_y}{\partial x} &= -k \quad ; \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = -k \\
\frac{\partial F_z}{\partial y} &= 0 \quad ; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0 \\
\frac{\partial F_x}{\partial z} &= 0 \quad ; \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0
\end{aligned}$$

Le condizioni dell'Eq. (13.33) sono tutte soddisfatte, inoltre il dominio è semplicemente connesso, dunque il campo di forza è conservativo. Costruiamo l'energia potenziale. Scegliamo come riferimento l'origine, $(0,0,0)$. *Ricordiamo che* $\mathcal{U}(x,y,z) = -\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$. *Il cammino da* $(0,0,0)$ *a* (x,y,z) *può essere scelto a piacere. Scegliamo dunque un cammino del tipo*

$$(0,0,0) \;\to\; (0,0,z) \;\to\; (x,0,z) \;\to\; (x,y,z)$$

Ora:

$$\begin{aligned}
\int_{(0,0,0)}^{(0,0,z)} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} &= \int_0^z F_z(0,0,z')dz' = -2k\int_0^z z'dz' = -kz^2 \\
\int_{(0,0,z)}^{(x,0,z)} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} &= \int_0^x F_x(x',0,z)dx' = k\int_0^x x'dx' = \frac{k}{2}x^2 \\
\int_{(x,0,z)}^{(x,y,z)} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} &= \int_0^y F_y(x,y',z)dy' = k\int_0^y (y'-x)dy' = \frac{k}{2}y^2 - kxy
\end{aligned}$$

dunque

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(x,y,z) &= -\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} = -\left(\int_{(0,0,0)}^{(0,0,z)} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} + \int_{(0,0,z)}^{(x,0,z)} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} + \int_{(x,0,z)}^{(x,y,z)} d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}\right) \\
&= -\left(-kz^2 + \frac{k}{2}(x^2+y^2-2xy)\right) = k\left[z^2 - \frac{(x-y)^2}{2}\right]
\end{aligned}$$

13.11 Esercizi sull'energia meccanica

Esercizio 13.5. *Quanta energia è necessaria per sollevare di* 100 m *una massa di una tonnellata, nel campo gravitazionale alla superficie terrestre?*

Risposta. *La variazione dell'energia gravitazionale è* $\Delta\mathcal{U}_g = mg\Delta h = (1000\text{ kg})(9.806\text{ m/s}^2)(100\text{ m}) = 9.806\cdot 10^5\text{ J}$ — *quasi un MegaJoule. Il lavoro fatto dalla forza gravitazionale è* $\mathcal{W}_g = -\Delta\mathcal{U}_g$. *Il meccanismo che solleva applica una forza esterna che si oppone alla forza di gravità:* $\vec{\boldsymbol{F}}^{est} = -\vec{\boldsymbol{F}}_g$, *pertanto compie anche lavoro di segno opposto:* $\mathcal{W}^{est} = -\mathcal{W}_g = \Delta\mathcal{U}_g$.

Esercizio 13.6. *Un trattore di massa* $m_0 = 1$ ton *traina un rimorchio carico di tronchi di massa* $m_1 = 5$ ton *su per una strada di montagna, con una pendenza di* $15°$ *rispetto all'orizzontale. La potenza del trattore è* $\mathcal{P} = 80$ kW. *Qual è la velocità (supposta costante) con cui il trattore riesce a salire?*

Risposta. *Abbiamo due forze in gioco: la forza gravitazionale, che è conservativa, e quindi ammette un'energia potenziale; inoltre, la forza del motore del trattore, che ha la funzione di forza esterna. La potenza fa variare l'energia meccanica:* $\mathcal{P} = \frac{dE}{dt} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{d\mathcal{U}_g}{dt}$, *essendo* $\mathcal{U}_g = (m_0 + m_1)gh$ *l'energia gravitazionale. Se la velocità è costante, l'energia cinetica non cambia,* $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$, *quindi tutta la potenza del motore va a modificare solo l'energia gravitazionale:* $\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{U}_g}{dt} = (m_0 + m_1)g\frac{dh}{dt}$. *Si deduce che* $\frac{dh}{dt} = \frac{\mathcal{P}}{(m_0+m_1)g} = \frac{8 \cdot 10^4 \text{ J}}{(6 \cdot 10^3 \text{ kg})(9.806 \text{ m/s}^2)} = 1.360$ m/s. *Poiché la strada ha una pendenza di* $\theta = 15° = 15\frac{\pi}{180}$ rad $= 0.2618$ rad, *ad una variazione* Δh *di quota corrisponde una lunghezza* $\Delta\ell$ *tale che* $\Delta h = \Delta\ell \sin\theta$, *ovvero* $\Delta\ell = \frac{\Delta h}{\sin\theta} = 3.864\,\Delta h$. *Si deduce che la velocità del trattore sulla strada è* $v = \frac{1}{\sin\theta}\frac{dh}{dt} = 3.864 \cdot 1.360$ m/s $= 5.254$ m/s. *Per esprimere la velocità in* km/h, *moltiplichiamo per* 3.6*:* $v = 18.9$ km/h.

Esercizio 13.7. *Un atomo di* ${}^{12}_{6}\text{C}$ *viene completamente ionizzato, quindi immesso in un campo elettrico uniforme* $E = 10^5$ N/C *che lo accelera per la lunghezza di* 1 cm. *Se inizialmente era fermo, che velocità raggiunge?*

Risposta. *Si potrebbe affrontare il problema in vari modi. Un approccio potrebbe essere risolvere l'equazione del moto e trovare la legge oraria — il che è facile, perché la forza è costante.*

Invece, osserviamo che l'unica forza è quella elettrica, che è conservativa. Quindi possiamo utilizzare la conservazione dell'energia meccanica. Chiamiamo x *la distanza percorsa dallo ione. L'energia potenziale (elettrostatica) è* $\mathcal{U}_e(x) = -\int_0^x dx' qE = -qEx$. *L'energia meccanica,* $E = \mathcal{E} + \mathcal{U}_e(x)$ *deve conservarsi, ed il suo valore iniziale è nullo, poiché lo ione è fermo e abbiamo scelto il riferimento dell'energia potenziale in modo che* $\mathcal{U}_e$ *sia nullo per* $x = 0$. *Quindi alla fine dell'accelerazione deve essere* $\mathcal{E} = -\mathcal{U}_e(\ell) = qE\ell$. *La velocità finale si ricava da* $\mathcal{E} = \frac{m}{2}v^2$, *quindi* $v = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}} = \sqrt{\frac{2qE\ell}{m}}$.

Ora inseriamo i valori numerici. La massa dell'atomo di ${}^{12}_{6}\text{C}$ *è* $m = 12 \cdot (1.6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}) = 1.9926 \cdot 10^{-26}$ kg. *L'atomo viene completamente ionizzato, quindi perde 6 elettroni ed acquista una carica elettrica* $q = +6e = 6 \cdot (1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}) = 9.612 \cdot 10^{-19}$ C. *Quindi la velocità vale*

$$v = \sqrt{\frac{2(9.612 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C})(10^5\ \mathrm{N/C})(0.01\ \mathrm{m})}{1.9926 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg}}} = 3.106 \cdot 10^5\ \mathrm{m/s}.$$

Esercizio 13.8. *Un oggetto di massa $m = 5$ kg scivola giù per un piano inclinato di pendenza $\theta = 35°$, partendo da fermo da un'altezza di $h_1 = 5$ m. Questo piano è raccordato in fondo con un altro piano inclinato di uguale pendenza, in salita. L'oggetto risale su questo piano fino a raggiungere un'altezza $h_2 = 4$ m. Calcolare il lavoro fatto dalle forze di attrito durante tutto il percorso. Calcolare la forza di attrito, assumendo che sia costante lungo il percorso. Perché questa assunzione è ragionevole?*

Risposta. *Sono in azione due forze: quella gravitazionale (conservativa) e quella di attrito, che trattiamo come forza esterna. Pertanto la variazione totale di energia meccanica è esprimibile come lavoro dell'attrito: $\mathcal{W}_{attr} = \Delta E$. Siccome all'inizio e alla fine la velocità è nulla, l'energia cinetica non ha subito variazioni: $\Delta\mathcal{E} = 0$. Quindi $\mathcal{W}_{attr} = \Delta\mathcal{U}_g$, essendo $\mathcal{U}_g = mgh$ l'energia potenziale gravitazionale. Troviamo quindi $\mathcal{W}_{attr} = mg(h_2 - h_1) = (5\ \mathrm{kg})(9.806\ \mathrm{m/s^2})(-1\ \mathrm{m}) = -49.03$ J; è negativo, come c'era da aspettarsi.*

Il percorso fatto dalla massa sul primo piano è $\ell_1 = \dfrac{h_1}{\sin\theta} = \dfrac{5\ \mathrm{m}}{\sin(0.6109\ \mathrm{rad})} = 8.717$ m. Analogamente, il percorso sul secondo piano è $\ell_2 = \dfrac{h_2}{\sin\theta} = \dfrac{4\ \mathrm{m}}{\sin(0.6109\ \mathrm{rad})} = 6.974$ m. Il percorso totale è $\ell = \ell_1 + \ell_2 = 15.69$ m, quindi la forza di attrito deve valere $F_{attr} = \dfrac{\mathcal{W}_{attr}}{\ell} = \dfrac{-49.03\ \mathrm{J}}{15.69\ \mathrm{m}} = -3.125$ N. Il segno $-$ indica che è diretta in verso opposto allo spostamento.

L'assunzione che F_{attr} sia costante lungo il percorso è ragionevole, perché si tratta di attrito radente su una superficie di inclinazione costante: ricordiamo infatti che $F_{attr} = \mu_d F_{vinc} = \mu_d mg\cos\theta$.

Esercizio 13.9. *Un paracadutista di massa $m = 80$ kg (compresa l'attrezzatura), scende col paracadute aperto alla velocità costante $v = 20$ km/h. Qual è la potenza dissipata dall'attrito con l'aria?*

Risposta. *Abbiamo due forze agenti: quella gravitazionale, che è conservativa, e quella dell'attrito, che trattiamo come forza esterna. L'energia gravitazionale è $\mathcal{U}_g = mgh$. La potenza dissipata dall'attrito fa variare l'energia meccanica: $\mathcal{P}_{attr} = \dfrac{dE}{dt} = \dfrac{d\mathcal{E}}{dt} + \dfrac{d\mathcal{U}_g}{dt}$. Poiché la velocità è costante, $\dfrac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$. Quindi $\mathcal{P}_{attr} = \dfrac{d\mathcal{U}_g}{dt} = mg\dfrac{dh}{dt} = -mgv$ (il segno $-$ esprime il fatto che il paracadutista sta scendendo, quindi h diminuisce col tempo). Inserendo i valori numerici, con $v = 20$ km/h $= 5.555$ m/s, troviamo $\mathcal{P}_{attr} = -(80\ \mathrm{kg})(9.806\ \mathrm{m/s^2})(5.555\ \mathrm{m/s}) = -4\,358$ W $= -4.358$ kW. Il segno $-$*

nella potenza indica che si tratta appunto di potenza dissipata, ovvero sottratta al sistema meccanico.

Capitolo 14

Energia nelle forze elastiche

Ricordiamo la definizione di forza elastica per una molla — vd Sezione 9.5. Una molla di lunghezza a riposo ℓ_0 è *elastica* se è costruita in modo che, modificando la sua lunghezza a ℓ, essa tende a ripristinare la lunghezza ℓ_0 producendo una forza data da:

$$F_{el} = -k(\ell - \ell_0) \tag{14.1}$$

In questa sezione vedremo che le forze elastiche sono conservative, pertanto è possibile definire un'*energia potenziale elastica* $\mathcal{U}_{el}$. Questo risultato, tra l'altro, consente di trattare una vasta casistica di fenomeni fisici, caratterizzati da moti con piccoli spostamenti intorno a un punto di equilibrio stabile.

14.1 Energia elastica

La forza elastica è conservativa [1]. Per calcolare l'energia potenziale scegliamo una coordinata

$$x \equiv (\ell - \ell_0) \tag{14.2}$$

il che equivale a scegliere il riferimento Q coincidente con il punto di equilibrio. Assumiamo inoltre questo punto anche come "zero" dell'energia potenziale.

La forza elastica quindi vale

$$F_{el} = -kx \tag{14.3}$$

[1] In effetti, qualunque problema unidimensionale con forze posizionali è conservativo, per definizione: l'integrale del lavoro, $\int_A^B dx \cdot F(x)$ non può che dipendere solo dagli estremi, visto che il percorso da A a B in una sola dimensione è obbligato.

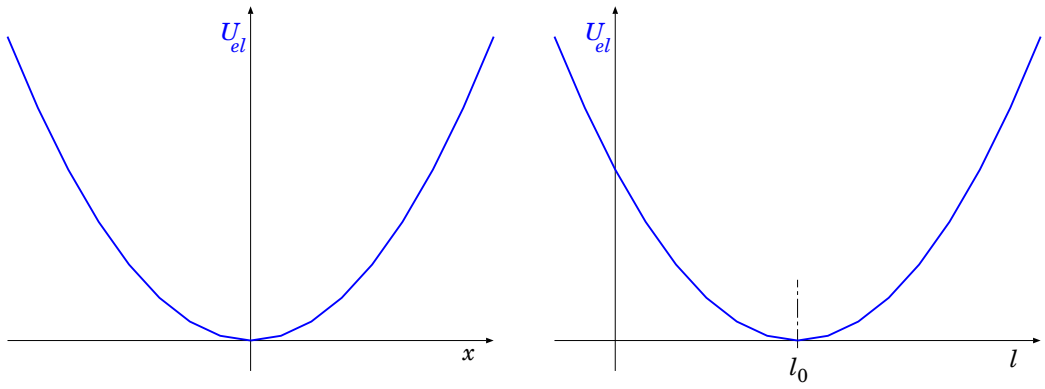


Figura 14.1: *Energia potenziale elastica. A sinistra, l'origine ($x = 0$) è scelta nel punto in cui la forza elastica è nulla; a destra, il punto di equilibrio ℓ_0 è posizionato in un punto qualunque. In entrambi i grafici, il punto di equilibrio è scelto come "zero" dell'energia potenziale. I due grafici sono equivalenti: differiscono solo per un cambiamento della coordinata-spostamento: $x \equiv (\ell - \ell_0)$.*

e l'energia potenziale nel punto x si calcola come:

$$\mathcal{U}_{el}(x) = -\int_0^x F_{el}(x')dx' = \int_0^x kx'\,dx' = k\left[\frac{(x')^2}{2}\right]_0^x = \frac{k}{2}x^2$$

In conclusione, l'*energia potenziale elastica* si scrive:

$$\mathcal{U}_{el}(x) = \frac{k}{2}x^2 \tag{14.4}$$

Questa si può esprimere anche attraverso ℓ, ℓ_0:

$$\mathcal{U}_{el}(x) = \frac{k}{2}(\ell - \ell_0)^2 \tag{14.5}$$

In entrambi i casi, il grafico è una parabola, come illustrato in Fig. 14.1.

14.1.1 Energia meccanica nel moto armonico

Vediamo la situazione anche in modo complementare: nella Sezione 10.1.1 abbiamo visto che il moto è di tipo oscillatorio armonico:

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\Omega t + \phi) \\ v(t) &= -A\Omega\sin(\Omega t + \phi) \end{aligned} \qquad \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

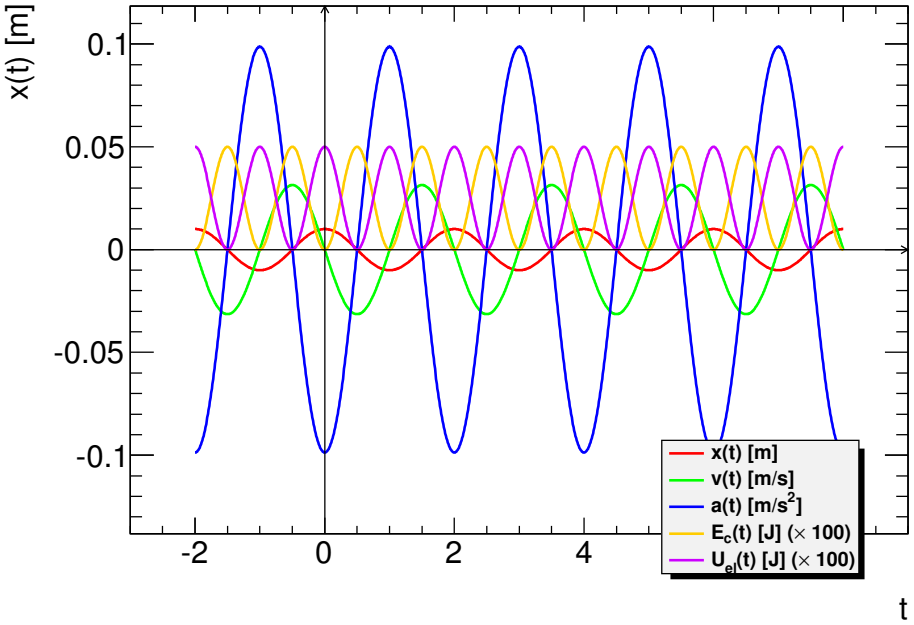


Figura 14.2: *Moto oscillatorio armonico: evoluzione nel tempo di posizione, velocità, accelerazione, energia cinetica, energia potenziale (rispettivamente* $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$, $E_c(t)$, $\mathcal{U}_{el}(t)$*). I parametri usati per questo esempio sono* $A_0 = 1$ cm, $T = 2$ s, $k = 10$ N/m. Attenzione*: le energie sono molto piccole, nel grafico sono state moltiplicate per* 100 *per renderle più visibili.*

(vd Eq. (10.7), Eq. (10.8)), quindi l'energia cinetica e potenziale valgono

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}A^2\Omega^2\sin^2(\Omega t + \phi) \\ \mathcal{U} &= \frac{k}{2}x^2 = \frac{k}{2}A^2\cos^2(\Omega t + \phi) \end{aligned}$$

e ricordando che $m\Omega^2 = k$ e che $\sin^2 + \cos^2 = 1$ la conservazione dell'energia meccanica è manifesta.

Un esempio di moto armonico, con l'evoluzione temporale di tutte le quantità cinematiche, è mostrato nel grafico della Fig. 14.2.

14.2 Esercizi sulle forze elastiche

Esercizio 14.1. *Per mantenere una molla compressa di* 1 cm*, rispetto alla sua posizione di equilibrio, è necessaria una forza di* 0.2 N*. Calcolare la costante elastica della molla e l'energia elastica in essa immagazzinata.*

Risposta. *La forza applicata* $F_{appl} = 0.2$ N *si oppone alla forza elastica per mantenere la molla ferma:* $F_{el} = F_{appl}$. *Quindi la costante elastica si può calcolare come* $k = \dfrac{F_{appl}}{\Delta\ell} = \dfrac{0.2 \text{ N}}{0.01 \text{ m}} = 20$ N/m.

L'energia elastica è $\mathcal{U}_{el} = \dfrac{k}{2}(\Delta\ell)^2 = \dfrac{20 \text{ N/m}}{2}(0.01 \text{ m})^2 = 0.002$ J.

Osservazione: *calcolare l'energia elastica come* $F_{appl}\Delta\ell$ *sarebbe errato, poiché nel processo di compressione la forza elastica, e quindi la forza applicata, aumentano man mano che la molla si schiaccia.*

Esercizio 14.2. *Ad una molla di costante elastica* $k = 10$ N/m *viene appesa una massa* m, *quindi questa viene spostata di* 1 cm *dalla sua posizione di equilibrio e lasciata oscillare. Il periodo di oscillazione osservato è* $T = 2$ s. *Determinare la frequenza angolare* Ω *e il valore di* m. *Determinare inoltre i valori massimi di velocità, accelerazione, energia cinetica e energia potenziale.*

Risposta.
Anzitutto, $\Omega = \dfrac{2\pi}{T} = 3.1416$ rad/s; *quindi* $m = \dfrac{k}{\Omega^2} = \dfrac{10 \text{ N/m}}{(3.1416 \text{ rad/s})^2} = 1.013$ kg. *La velocità massima è* $v_{max} = A_0\Omega = 0.031416$ m/s, *mentre l'accelerazione massima è* $a_{max} = A_0\Omega^2 = 0.0987$ m/s. *L'energia potenziale massima è* $\mathcal{U}_{max} = \dfrac{k}{2}A_0^2 = 5 \cdot 10^{-4}$ J. *L'energia cinetica massima è* $\mathcal{E}_{max} = \dfrac{m}{2}v_{max}^2 = 5 \cdot 10^{-4}$ J, *ovviamente uguale all'energia potenziale massima.*

I parametri di questo esercizio sono gli stessi del grafico in Fig. 14.2: potete confrontare i valori numerici ottenuti con quelli che compaiono nel grafico.

Esercizio 14.3. *Un oggetto di massa* $m = 1$ *kg viene appoggiato ad una molla di costante elastica* $k = 15$ N/m, *disposta orizzontalmente; quindi la molla viene compressa di* $\Delta\ell = 20$ *cm, e poi lasciata andare. L'oggetto subisce la spinta della molla finché questa si distende, poi quando la molla è tornata in equilibrio l'oggetto se ne separa e continua a muoversi lungo una rotaia orizzontale. Quanto lavoro occorre fare per comprimere la molla come descritto? Con che velocità viene "sparato" l'oggetto?*

Risposta. *L'energia potenziale elastica della molla, inizialmente nulla, viene aumentata durante la fase di compressione, fino ad un valore*

$$\mathcal{U}_0 = \frac{k}{2}(\Delta\ell)^2 = 0.5 \cdot 15 \text{ N/m} \cdot (0.2 \text{ m})^2 = 0.3 \text{ J}$$

pertanto tale è anche il lavoro fatto dall'esterno. Durante l'espansione della molla, l'energia meccanica $E = \mathcal{E} + \mathcal{U}$ *si conserva, pertanto l'energia potenziale si converte man mano in energia cinetica. Quando la molla torna in equilibrio* $\mathcal{U} = 0$, *pertanto l'energia cinetica del proiettile sparato è*

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2}v^2 = 0.3 \text{ J}$$

da cui la velocità risulta

$$v = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.3 \text{ J}}{1 \text{ kg}}} = 0.77 \text{ m/s}$$

Esercizio 14.4. *Un oggetto di* 10 kg *è dotato di una molla di massa trascurabile attaccata alla parte inferiore. L'oggetto viene lasciato cadere dall'altezza di* 1 m *(misurata dall'estremo inferiore della molla al suolo). Quando raggiunge il suolo, la molla si comprime di* 10 cm*, quindi si estende e rilancia l'oggetto in alto. Calcolare la costante* k *della molla.*

Risposta. *Le forze agenti sono la gravità e l'elasticità della molla: entrambe sono conservative, pertanto* $E = \mathcal{E} + \mathcal{U}_g + \mathcal{U}_{el}$ *è costante. Inizialmente l'oggetto è fermo (*$\mathcal{E} = 0$*) e la molla è libera (*$\mathcal{U}_{el} = 0$*), pertanto* $E = \mathcal{U}_g^{in}$*. Alla fine, l'oggetto è di nuovo fermo (*$\mathcal{E} = 0$*) e la molla è compressa, quindi* $E = \mathcal{U}_g^{fin} + \mathcal{U}_{el}^{fin}$*. Pertanto* $\mathcal{U}_{el}^{fin} = \mathcal{U}_g^{in} - \mathcal{U}_g^{fin} = mg\left(h^{in} - h^{fin}\right)$*. Ora, nella caduta l'oggetto scende di* 1 m *fino a quando la molla tocca il suolo, poi questa si comprime di* $\delta = 10$ cm*, pertanto la discesa totale è* $\Delta h = h^{fin} - h^{in} = -1.1$ m*, e la variazione di energia potenziale è* $\Delta\mathcal{U} = \mathcal{U}^{fin} - \mathcal{U}^{in} = mg\Delta h = (10 \text{ kg})(9.806 \text{ m/s}^2)(-1.02 \text{ m}) = -1.079$ J*. Quindi* $\mathcal{U}_{el}^{fin} = 1.079$ J*. Inoltre* $\mathcal{U}_{el}^{fin} = \frac{k}{2}\delta^2$*, quindi* $k = \frac{2\mathcal{U}_{el}^{fin}}{\delta^2} = \frac{2(1.079 \text{ J})}{(0.1 \text{ m})^2} = 216$ N/m

14.3 Oscillazioni intorno ad un punto di equilibrio

Le forze elastiche possono essere utilizzate in una grande varietà di problemi fisici: quelli caratterizzati da oscillazioni intorno ad un punto di equilibrio.

Consideriamo un oggetto puntiforme soggetto a campi di forze conservative, con risultante $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$.

Si definisce *punto di equilibrio* del sistema di forze come una posizione $\vec{\boldsymbol{r}}_{eq}$ tale che l'oggetto, posizionato lì in quiete, lì rimanga. Perché ciò accada, occorre che in $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_{eq}$ sia $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{eq}) = 0$: infatti se così è, non c'è accelerazione, la velocità resta nulla come era inizialmente, quindi l'oggetto non si muove.

Un punto di equilibrio si definisce *stabile* se l'oggetto, in seguito ad un piccolo spostamento dal punto di equilibrio, tende a muoversi intorno ad esso.

Facciamo alcuni esempi: una pallina sferica, posta in fondo ad una ciotola, inizialmente sta ferma nel punto più fondo: quello è il suo punto di equilibrio. Se uno la perturba, spostandola o urtandola, essa acquista un moto intorno al punto di equilibrio: si tratta quindi di un equilibrio stabile.

Se la stessa pallina viene posta in quiete su di un piano orizzontale, oppure (con molta attenzione!) appoggiata in cima ad un pallone, essa resta lì: quindi anche in questi casi si trova nel suo punto di equilibrio. Tuttavia, in questi casi non si tratta di un equilibrio stabile. Se viene urtata, nel caso del piano prosegue con un moto rettilineo uniforme (almeno finché non viene frenata...) mentre nell'altro caso rotola lontano dal punto di equilibrio.

Teniamo presente che la stabilità dell'equilibrio è sempre relativa alle perturbazioni applicate: anche la pallina nella ciotola, se urtata troppo violentemente, può saltare fuori dal bordo della medesima!

L'equilibrio stabile può essere compreso ricorrendo all'energia potenziale $\mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}})$. Qualunque punto $\vec{\boldsymbol{r}}_{eq}$ che costituisca un *minimo locale* della funzione $\mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}})$ è un punto di equilibrio stabile. Infatti, se $\vec{\boldsymbol{r}}_{eq}$ è un punto di minimo per $\mathcal{U}$, vuol dire che tutte le derivate di $\mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}})$ sono nulle in $\vec{\boldsymbol{r}}_{eq}$:

$$\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}=\vec{\boldsymbol{r}}_{eq}} = 0 \quad ; \quad \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}=\vec{\boldsymbol{r}}_{eq}} = 0 \quad ; \quad \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z}\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}=\vec{\boldsymbol{r}}_{eq}} = 0$$

e quindi, poiché $\vec{\boldsymbol{F}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\mathcal{U}$ (vedi Sezione 13.9 e Eq. (13.32)), la forza in $\vec{\boldsymbol{r}}_{eq}$ è nulla. Cioè, un oggetto posto in quiete in $\vec{\boldsymbol{r}}_{eq}$ resta lì.

L'oggetto, in quiete nel punto di equilibrio, possiede energia meccanica pari alla sua energia potenziale $\mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}_{eq})$, visto che la sua energia cinetica è nulla. Quando viene perturbato, acquista energia meccanica:

- se viene spostato da $\vec{\boldsymbol{r}}_{eq}$, la sua energia potenziale $\mathcal{U}$ aumenta (altro non può fare, visto che era al minimo);
- se viene messo in movimento, acquista energia cinetica $\mathcal{E}$ (che prima era nulla).

In ogni caso si trova ad avere un'energia meccanica

$$E = \mathcal{E} + \mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}) > \mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}_{eq})$$

Chiamiamo $\Delta E = E - \mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}_{eq})$ l'energia che abbiamo ceduto all'oggetto per perturbarlo da suo stato di equilibrio. Poiché l'energia meccanica si conserva e $\mathcal{E} = E - \mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}})$ non può mai essere negativa, la regione di spazio accessibile è limitata dalla condizione:

$$\mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}) \leq E \qquad \text{oppure} \qquad \mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}) \leq \mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}_{eq}) + \Delta E$$

ed il moto è dunque confinato in tale regione.

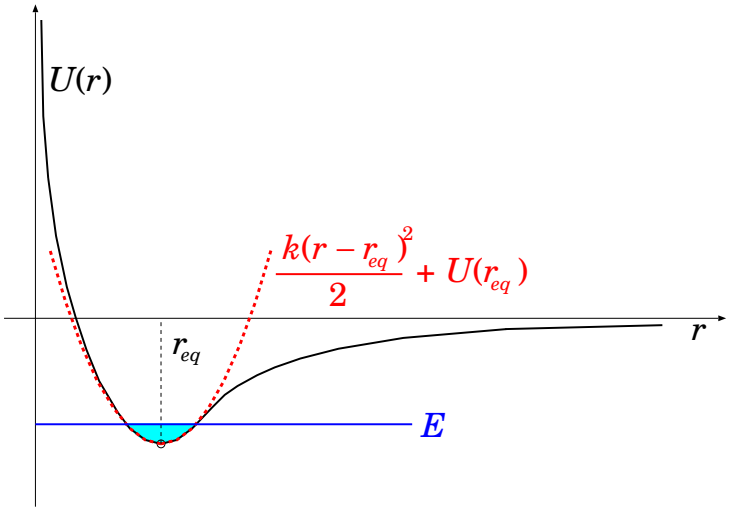


Figura 14.3: *Energia potenziale di legami fra due atomi che formano una molecola, in funzione della distanza interatomica r. Intorno al punto di equilibrio r_{eq} l'energia potenziale può essere approssimata come un paraboloide (disegnato come parabola, per esigenze grafiche).*

Come esempio, consideriamo l'energia potenziale raffigurata in Fig. 14.3: è la tipica "energia di legame" fra due atomi che formano una molecola. C'è un minimo per una distanza interatomica $r = r_{eq}$, che rappresenta il punto di equilibrio della molecola. Per $r < r_{eq}$ l'energia potenziale sale molto rapidamente: significa che avvicinare i due atomi oltre la loro distanza di equilibrio è sempre più faticoso. Viceversa, per $r > r_{eq}$ l'energia potenziale sale fino a raggiungere un livello-limite: significa che allontanare i due atomi dalla loro distanza di equilibrio richiede energia, ma con un'energia sufficiente si possono allontanare all'infinito, ovvero si spezza la molecola.

Scegliamo un sistema di riferimento cartesiano con l'origine O centrata in $\vec{\boldsymbol{r}}_{eq}$. Con un opportuno orientamento degli assi, in un piccolo intorno di $\vec{\boldsymbol{r}}_{eq}$ la forma dell'energia potenziale può sempre essere approssimata come un paraboloide:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}) &\simeq \mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}_{eq}) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2\mathcal{U}}{\partial x^2}\right)x^2 + \left(\frac{\partial^2\mathcal{U}}{\partial y^2}\right)y^2 + \left(\frac{\partial^2\mathcal{U}}{\partial z^2}\right)z^2\right] + \mathcal{O}(3) \\ &= \mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}_{eq}) + \frac{k_x}{2}x^2 + \frac{k_y}{2}y^2 + \frac{k_z}{2}z^2 + \mathcal{O}(3) \end{aligned} \tag{14.6}$$

(tutte le derivate seconde sono calcolate al punto di equilibrio, e $\mathcal{O}(3)$ indica

ulteriori termini dello sviluppo in serie, che sono almeno di ordine 3 negli esponenti di x, y, z). L'approssimazione parabolica è rappresentata dalla linea tratteggiata in Fig. 14.3.

Quindi, la forza per componenti cartesiane, in prossimità dell'equilibrio, diventa:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = -k_x x \\ F_y &= -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} = -k_y y \\ F_z &= -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} = -k_z z \end{aligned} \tag{14.7}$$

Abbiamo appena trovato che *in prossimità di un punto di equilibrio stabile la forza agente ha la forma di una forza elastica.*

Le equazioni del moto prendono la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{k_x}{m}x \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{k_y}{m}y \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{k_z}{m}z \end{aligned} \tag{14.8}$$

Ogni componente del moto può essere integrata indipendentemente, ottenendo:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_x \cos(\Omega_x t + \phi_x) & \left(\Omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{m}} \right) \\ y(t) &= A_y \cos(\Omega_y t + \phi_y) & \left(\Omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}} \right) \\ z(t) &= A_z \cos(\Omega_z t + \phi_z) & \left(\Omega_z = \sqrt{\frac{k_z}{m}} \right) \end{aligned} \tag{14.9}$$

Il moto tridimensionale è una composizione di tre moti oscillatori armonici. Ciascuno di questi ha però una frequenza angolare propria: $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$, dovuta al fatto che le tre "costanti elastiche" k_x, k_y, k_z sono diverse.

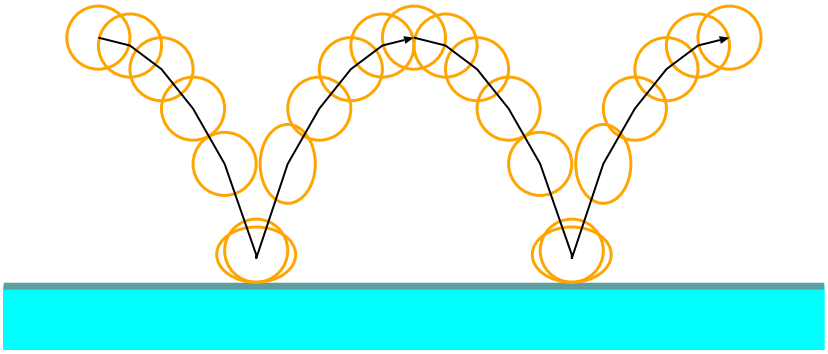


Figura 14.4: *Fotogrammi di un pallone che rimbalza: quando raggiunge il suolo, a contatto con esso si schiaccia. Poi, per le sue proprietà elastiche, si deforma in maniera opposta, allungandosi, e quindi spingendosi via dal terreno. In volo riacquista la forma sferica.*

Naturalmente, tutto quanto detto sinora è valido solo finché l'approssimazione parabolica descrive bene l'energia potenziale, ovvero in prossimità del punto di equilibrio. Aumentando l'energia meccanica E, la zona cinematicamente accessibile si allarga, e l'approssimazione dell'Eq. (14.6) non sussiste più, come si può vedere anche graficamente nella Fig. 14.3.

14.4 Forze elastiche nei materiali

La capacità di reagire alle deformazioni con una forza proporzionale ed opposta ad esse si chiama elasticità.

L'elasticità non è una caratteristica delle sole molle. Anzi, caratterizza tutti i fenomeni in cui ci sia un "rimbalzo". Per esempio, un pallone che cade al suolo (Fig. 14.4), durante l'urto si deforma, ma a causa della sua elasticità riacquista velocemente la sua forma: la parte che si era schiacciata ritorna in posizione, "spingendo via" il terreno. Per il principio di azione-reazione, riceve dal terreno una spinta uguale e contraria che lo fa rimbalzare. Normalmente la durata temporale del rimbalzo è molto breve, ma filmando il rimbalzo del pallone con una videocamera e riguardandolo in moviola rallentata, il comportamento diventa evidente. Anche nell'urto fra palle di biliardo succede la stessa cosa. Ovviamente le palle da biliardo sono molto più rigide di un pallone, quindi la loro deformazione è molto minore.

In generale, parlando di oggetti *solidi*, intendiamo oggetti in cui gli atomi

costituenti siano fra loro strettamente legati, in modo tale che le distanze reciproche fra qualunque coppia di essi siano immutabili. La situazione è analoga a quella di un traliccio o di una impalcatura: si tratta sempre di strutture che devono la loro rigidità al fatto che i giunti sono connessi da sbarre indeformabili, che li tengono a distanze ben definite. Tuttavia, il concetto di "indeformabile" è sempre relativo alle forze che vengono applicate. Tralicci ed impalcature possono oscillare in balia di un forte vento: evidentemente non sono "assolutamente rigidi". Però la loro struttura fa sì che, cessato il vento, ritornino alla loro posizione originale — un po' come una molla: la resistenza dei tralicci è appunto di natura elastica. Se le forze diventano più intense, la struttura può non riuscire più a resistere e si può rompere: è ciò che a volte succede ai tralicci in seguito ad una abbondante nevicata: le forze elastiche del traliccio reggono la spinta del vento ma non riescono a sopportare il peso della troppa neve accumulatasi.

Tutto questo accade anche ai legami atomici (o molecolari) che dànno rigidità ad un solido. La palla da biliardo ci appare solida: sicuramente non riusciamo a schiacciarla fra le dita come faremmo con una palla da tennis. Tuttavia, quando essa urta un ostacolo solido, gli atomi vicini alla sua superficie vengono schiacciati un po' all'interno: le distanze interatomiche vengono leggermente compresse. Poiché gli atomi sono tutti tenuti in posizione da una complessa rete di forze elastiche, appena possono essi tornano in posizione. La palla da biliardo, nella zona dove aveva subito lo schiacciamento, ripristina la sua forma originaria e così facendo si spinge via dall'ostacolo, ovvero rimbalza. Anche l'ostacolo ha gli stessi comportamenti: dove la palla lo urta, esso viene temporaneamente compresso: le forze che tengono in posizione gli atomi che lo compongono, appena possono tendono a ripristinare la sua forma iniziale.

Se l'urto avviene troppo forte la palla si può spaccare: in questo caso le forze in gioco — quelle con cui l'ostacolo ha deformato la palla — sono troppo forti e i legami atomici non hanno resistito. Quest'ultimo caso può essere compreso guardando di nuovo alla Fig. 14.3: se l'urto è molto forte, l'energia meccanica E aumenta, e per l'energia potenziale non è più valida l'approssimazione parabolica. Se l'energia meccanica diventa troppo grande ($E > 0$), gli atomi si liberano dal legame molecolare.

14.4.1 Modello delle reazioni vincolari (*)

Le forze elastiche possono essere presenti anche in assenza di urti e rimbalzi. Se appoggiamo un oggetto pesante su un piano orizzontale, esso sta fermo: evidentemente la risultante delle forze agenti su di esso è nulla. D'altra parte, su di esso agisce sicuramente la forza di gravità. Quindi, deve esserci una

forza uguale ed opposta che la contrasta: essa è ovviamente prodotta dal piano su cui l'oggetto appoggia, e si chiama *reazione del vincolo* — il vincolo è ciò che "vincola" appunto l'oggetto ad una data posizione: ovviamente il piano stesso in questo caso.

Anche la reazione del vincolo è di natura elastica. In effetti, il peso dell'oggetto appoggiato, produce uno schiacciamento locale del piano, cioè le distanze interatomiche vengono compresse. Le forze elastiche che tengono in posizione gli atomi del piano tendono ad opporsi a questo schiacciamento: il risultato collettivo è che producono la reazione vincolare, che tiene l'oggetto in equilibrio.

Le reazioni vincolari prodotte da oggetti solidi sono modellabili in termini di campi di forza, $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$, con le seguenti caratteristiche:

- al di fuori dall'oggetto-vincolo la forza deve essere nulla;
- a contatto con l'oggetto-vincolo la forza deve essere repulsiva, ortogonale alla superficie del vincolo, e con caratteristiche elastiche;
- la parte di spazio all'interno dell'oggetto-vincolo deve essere inaccessibile — quest'ultimo requisito va inteso in senso lato: essendo la reazione vincolare di natura elastica, è possibile una piccola deformazione che renda accessibile una piccola porzione della zona "proibita", durante il contatto.

Consideriamo un vincolo costituito da un piano (idealmente indefinito...). Orientiamo gli assi cartesiani in modo che il piano Oxy giaccia sul vincolo e che la zona $z < 0$ sia inaccessibile. Se introduciamo un'energia potenziale della forma:

$$\mathcal{U}(x, y, z) = \begin{cases} 0 & (\text{per } z > 0) \\ \\ \dfrac{k}{2} z^2 & (\text{per } z < 0) \end{cases} \tag{14.10}$$

La forza si ricava come $\vec{\boldsymbol{F}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\mathcal{U}$, quindi per componenti:

$$\begin{aligned} F_x &= 0 \\ F_y &= 0 \\ F_z &= \begin{cases} 0 & (\text{per } z > 0) \\ -kz & (\text{per } z < 0) \end{cases} \end{aligned} \tag{14.11}$$

La forza agisce solo lungo la direzione ortogonale al piano, inoltre "entra in funzione" solo quando si entra in contatto con il vincolo ($z \leq 0$) ed è

repulsiva ($F_z > 0$). Inoltre, più rigido è l'ostacolo, maggiore è la costante di elasticità k.

Una forza siffatta è ovviamente conservativa. La penetrazione nella "zona inaccessibile" dipende dall'energia dell'oggetto incidente e dalla sua direzione iniziale. Supponiamo che esso abbia massa m e velocità incidente $\vec{\boldsymbol{v}}_i \equiv (x_{ix}, v_{iy}, v_{iz})$, con $v_{iz} < 0$ perché è in avvicinamento. Durante l'urto le componenti v_x, v_y non subiscono variazioni perché la forza vincolare non ha componenti lungo il piano. Invece la velocità v_z subisce una variazione data da:

$$\frac{dv_z}{dt} = a_z = \frac{F_z}{m} = -\frac{kz}{m} \qquad (z < 0) \tag{14.12}$$

Poiché inizialmente $v_{iz} < 0$ e invece $a_z > 0$, ad un certo punto deve essere $v_z = 0$. In tali condizioni l'energia cinetica dell'oggetto incidente deve essere minima. La variazione di energia cinetica è dunque:

$$\Delta\mathcal{E} = \underbrace{\frac{m}{2}\left(v_{ix}^2 + v_{iy}^2\right)}_{\mathcal{E}_0} - \underbrace{\frac{m}{2}\left(v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2\right)}_{\mathcal{E}_i} = -\frac{m}{2}v_{iz}^2$$

L'energia totale $E = \mathcal{E} + \mathcal{U}$ prima dell'urto vale semplicemente $E = \mathcal{E}_i$. Al momento di massima penetrazione essa vale $E = \mathcal{E}_0 + \frac{k}{2}z_0^2$, quindi deve essere

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_i &= \mathcal{E}_0 + \frac{k}{2}z_0^2 \\
\frac{k}{2}z_0^2 &= -\Delta\mathcal{E} = \frac{m}{2}v_{iz}^2 \\
z_0 &= -\sqrt{\frac{m}{k}}\,|v_{iz}|
\end{aligned}$$

È evidente che per valori di k sempre più grandi la penetrazione massima z_0 diminuisce: quindi un maggiore k corrisponde ad un vincolo più rigido.

Alla fine dell'urto, le componenti della velocità parallele al piano non sono cambiate, mentre quella ortogonale ha cambiato segno ma è in valore assoluto pari alla componente iniziale, per la conservazione dell'energia. Quindi:

$$\begin{aligned}
v_{fx} &= v_{ix} \\
v_{fy} &= v_{iy} \\
v_{fz} &= -v_{iz}
\end{aligned}$$

Durante l'urto, il moto lungo la direzione z è descritto dalla soluzione dell'Eq. (14.12). Trattandosi di un moto armonico sappiamo già che essa è

della forma:

$$z(t) = z_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$$

La durata Δt dell'urto è calcolabile come la differenza fra gli istanti t_i e t_f in cui l'oggetto incidente entra in contatto e si stacca con il vincolo. In entrambi i casi deve essere $z(t) = 0$, quindi l'argomento del coseno deve essere variato di π: $\pi = \Delta\left[\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right] = \sqrt{\frac{k}{m}}\,\Delta t$ quindi

$$\Delta t = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Nel caso di vincoli più rigidi, k è più grande e quindi la durata dell'urto è minore. Incidentalmente, questo fatto cade sotto l'esperienza quotidiana, anche se non siamo dotati di apparecchiature sofisticate per misurare la durata dell'urto. Il rumore di una pallina di acciaio che rimbalza sul pavimento ("tic-tic-tic") è più acuto di quello che farebbe un pallone da basket ("ponf-ponf-ponf"). In effetti la frequenza ν del suono emesso è inversamente proporzionale alla durata temporale dell'urto: $\nu \propto \frac{1}{\Delta t}$. La pallina di acciaio è più rigida, dunque ha un k maggiore e quindi un Δt minore, pertanto emette suoni a frequenza più alta — più acuti, appunto.

14.5 Moto oscillatorio smorzato, considerazioni energetiche (*)

In Sezione 10.4 abbiamo trattato l'oscillatore armonico smorzato:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \eta\frac{dx}{dt}$$

la cui soluzione, per condizioni iniziali $x(0) = A_0$ e $v(0) = 0$ — vd Eq. (10.32) — è

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t}\left[\cos(\Omega' t) + \frac{\gamma}{\Omega'}\sin(\Omega' t)\right]$$

$$\left(\quad \gamma = \frac{\eta}{2m} \;\; ; \;\; \Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \;\; ; \;\; \Omega' = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2} \quad\right)$$

Per $\gamma \ll \Omega_0, \Omega'$ questo appare come un moto oscillatorio armonico, con ampiezza decrescente

$$A(t) = A_0\, \mathrm{e}^{-\gamma t}$$

La ragione può essere trovata anche da considerazioni energetiche. Nella condizione $\gamma \ll \Omega_0, \Omega'$ possiamo approssimare:

$$\begin{aligned} x(t) &\simeq A_0 \mathrm{e}^{-\gamma t} \cos(\Omega_0 t) \\ v(t) &\simeq -A_0 \Omega_0 \mathrm{e}^{-\gamma t} \sin(\Omega_0 t) \end{aligned}$$

L'attrito dissipa una potenza:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{attr} &= F_{attr} v = -\eta v^2 \simeq -\eta \left[A(t)\Omega_0 \sin(\Omega' t)\right]^2 \\ &\simeq -\eta \frac{k}{m} A^2 \sin^2(\Omega_0 t) \end{aligned}$$

che, mediato su un periodo di oscillazione — e ricordando che $\left\langle \sin^2 \right\rangle = \dfrac{1}{2}$ — dà:

$$\langle \mathcal{P}_{attr} \rangle = -\frac{\eta}{2} \frac{k}{m} A^2$$

D'altra parte l'energia meccanica è

$$E = = \frac{k\,(A(t))^2}{2}$$

quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{attr} &= \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{kA^2}{2}\right) \\ &= k\,A\,\frac{dA}{dt} \end{aligned}$$

Mettendo insieme si trova:

$$\begin{aligned} -\frac{\eta}{2}\frac{k}{m} A^2 &= k\,A\,\frac{dA}{dt} \\ \frac{dA}{dt} &= -\frac{\eta}{2m} A \equiv \gamma\, A \end{aligned}$$

la cui soluzione è, appunto, $A(t) = A_0 \mathrm{e}^{-\gamma t}$.

14.5.1 Attrito $\propto v^2$

Ora consideriamo una forza viscosa $F_{attr} = -\mathrm{sgn}(v)\eta' v^2 = -\eta' v|v|$, cosicché l'equazione del moto diventa:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \eta'\left|\frac{dx}{dt}\right|\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

In questo caso non esiste una soluzione analitica. Però possiamo ugualmente fare considerazioni energetiche: prendiamo sempre il prototipo di moto oscillatorio smorzato:

$$x(t) = A(t)\cos\Omega t \qquad \left(\Omega \simeq \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

dove vogliamo determinare come si attenua l'ampiezza di oscillazione $A(t)$.

Assumendo che $A(t)$ varii nel tempo molto più lentamente di $\cos(\Omega t)$, possiamo approssimare:

$$v(t) \simeq -A(t)\,\Omega\,\sin(\Omega t)$$

Ora la potenza dissipata dall'attrito è:

$$\mathcal{P}_{attr} = (-\eta' v|v|)\cdot v = -\eta'\left|v^3\right| \simeq -\eta' A^3\Omega^3\left|\sin^3(\Omega t)\right|$$

Mediando su un periodo, $\langle|\sin^3|\rangle = \frac{4}{3\pi}$ [2], quindi

$$\langle\mathcal{P}_{attr}\rangle = -\eta' A^3\Omega^3\frac{4}{3\pi}$$

D'altronde vale sempre

$$E = \frac{k}{2}A^2$$
$$\mathcal{P}_{attr} = \frac{dE}{dt} = k\,A\frac{dA}{dt}$$

[2] Infatti:

$$\langle|\sin^3|\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi\,\left|\sin^3(\phi)\right| = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi\,\sin^3\phi$$

Ora si pone $\xi = \cos\phi$, cosicché $d\xi = -\sin\phi\,d\phi$ e $\sin^2\phi = 1-\xi^2$:

$$\langle|\sin^3|\rangle = \frac{2}{\pi}\int_1^0(-d\xi)(1-\xi^2) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 d\xi(1-\xi^2) = \frac{2}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{4}{3\pi}$$

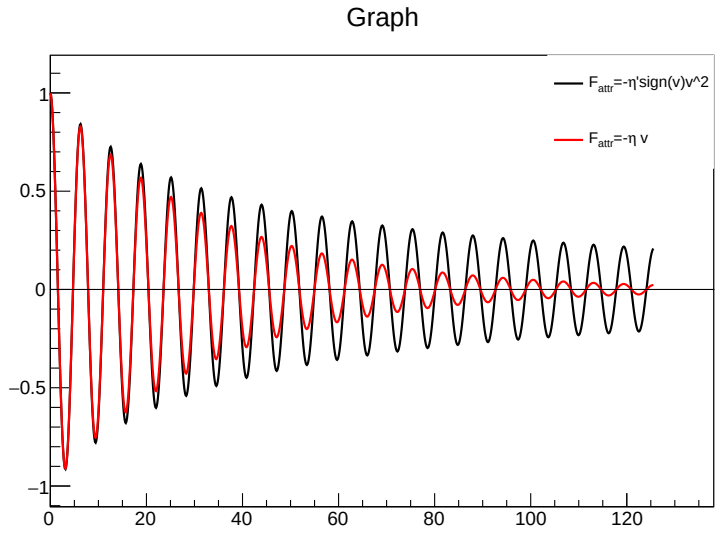


Figura 14.5: *Andamento delle oscillazioni smorzate, con l'attrito viscoso* $\propto v$ *e* $\propto v^2$. *I valori di* η, η' *sono stati scelti in modo da rendere confrontabile l'attrito nella prima oscillazione:* $\eta' v^2 \simeq \eta v$; *questo è stato realizzato scegliendo* $\eta'(A_0\Omega) = \eta$.

Mettendo insieme le equazioni troviamo (ricordiamo $\Omega^2 = \dfrac{k}{m}$)

$$
\begin{aligned}
\frac{dA}{dt} &= -\frac{4}{3\pi}\frac{\eta'}{k}\Omega^3 A^2 = -\underbrace{\frac{4}{3\pi}\frac{\eta'\Omega}{m}}_{\alpha} A^2 \\
&= -\alpha A^2 \\
\frac{dA}{A^2} &= -\alpha\, dt \\
\int_{A_0}^{A} \frac{dA'}{(A')^2} &= -\alpha \int_0^t dt' \\
\frac{1}{A_0} - \frac{1}{A} &= -\alpha t \\
A(t) &= \frac{A_0}{1 + A_0 \alpha t}
\end{aligned}
$$

Questa volta l'attenuazione non è esponenziale, ma segue una legge di potenza.

Gli andamenti delle oscillazioni smorzate, con l'attrito viscoso $\propto v$ e $\propto v^2$, sono confrontati in Fig. 14.5.

Capitolo 15

Momento angolare

15.1 Momento angolare, momento torcente

Per un oggetto puntiforme situato nella posizione $\vec{\boldsymbol{r}}$ e dotato di quantità di moto $\vec{\boldsymbol{p}}$ — vd Fig. 15.1 (sinistra) — si definisce il *momento angolare* $\vec{\boldsymbol{L}}$ come:

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{p}} \tag{15.1}$$

(spesso chiamato anche "momento della quantità di moto").

Vediamo come questa quantità dinamica varia nel tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{p}}\right) = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \times \vec{\boldsymbol{p}} + \vec{\boldsymbol{r}} \times \frac{d\vec{\boldsymbol{p}}}{dt} \\ &= \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{p}} + \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}} \end{aligned}$$

Nell'ultima espressione, il primo termine è identicamente nullo: infatti si tratta del prodotto vettoriale di due vettori paralleli ($\vec{\boldsymbol{v}}$ e $\vec{\boldsymbol{p}}$). Invece, il secondo termine viene definito come *momento torcente* (o anche "momento meccanico", o ancora "momento della forza" [1]):

$$\vec{\boldsymbol{M}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}} \tag{15.2}$$

— vd Fig. 15.1 (destra). Quindi l'equazione che regola l'evoluzione del momento angolare diventa:

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{M}} \tag{15.3}$$

[1] In inglese si chiama "torque" — molto suggestivo!

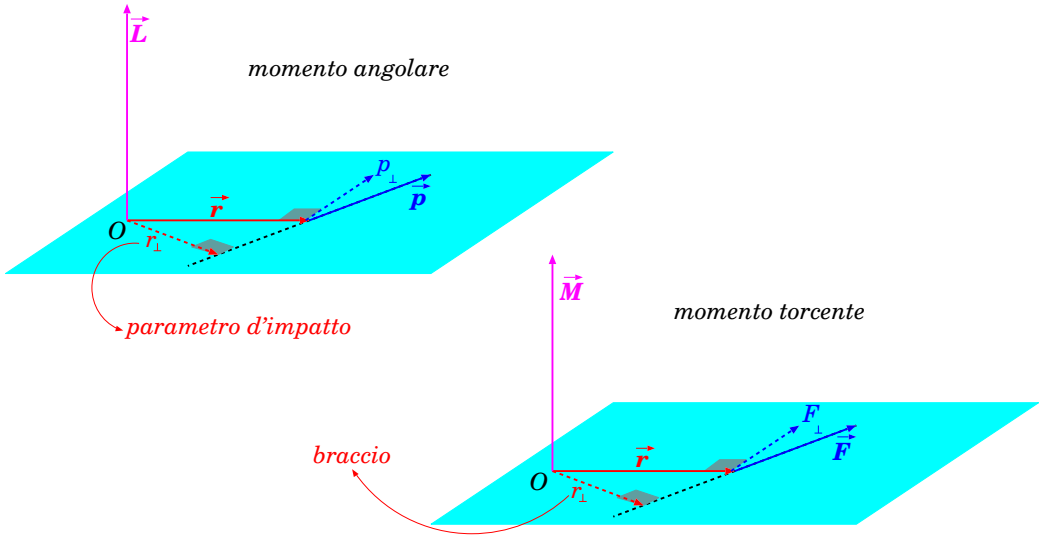


Figura 15.1: *Momento angolare (a sinistra) e momento torcente (a destra). Il punto O è il "polo", rispetto al quale si misura la posizione $\vec{r}$. La componente $\vec{r}_\perp$ si chiama rispettivamente "parametro di impatto" nel caso del momento angolare, oppure "braccio" nel caso del momento torcente.*

15.1.1 Alcune proprietà

Mentre le quantità dinamiche $\vec{v}$, $\vec{p}$, $\vec{F}$ esprimono proprietà di un punto materiale, il momento angolare e il momento torcente

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad ; \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

esprimono proprietà di un punto materiale *rispetto ad un punto, detto "polo"*, dal quale si misura la posizione $\vec{r}$ — vd Fig. 15.1.

A causa delle proprietà del prodotto vettoriale, il momento angolare è sempre ortogonale al piano contenente $\vec{r}$, $\vec{p}$. Inoltre, ciò che conta è la componente di $\vec{p}$ ortogonale a $\vec{r}$ (quantità di moto trasversa, $\vec{p}_\perp$), o viceversa la componente di $\vec{r}$ ortogonale a $\vec{p}$ ("parametro d'impatto", $\vec{r}_\perp$):

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}_\perp = \vec{r}_\perp \times \vec{p} \tag{15.4}$$

In particolare, un moto radiale ($\vec{p} \parallel \vec{r}$, $\vec{r}_\perp = 0$) è privo di momento angolare.

Analogamente, il momento torcente è sempre ortogonale al piano contenente $\vec{r}$, $\vec{F}$. Inoltre, ciò che conta è la componente di $\vec{F}$ ortogonale a $\vec{r}$ (forza trasversa, $\vec{F}_\perp$), o viceversa la componente di $\vec{r}$ ortogonale a $\vec{F}$

("braccio", $\vec{\boldsymbol{r}}_\perp$):

$$\vec{\boldsymbol{M}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}}_\perp = \vec{\boldsymbol{r}}_\perp \times \vec{\boldsymbol{F}} \tag{15.5}$$

In particolare, una forza radiale ($\vec{\boldsymbol{F}} \parallel \vec{\boldsymbol{r}}$) non produce momento torcente.

15.2 Alcuni casi notevoli

15.2.1 Moto libero

In questo caso $\vec{\boldsymbol{F}} = 0$, e quindi anche $\vec{\boldsymbol{M}} = 0$. Quindi $\vec{\boldsymbol{L}}$ deve essere costante. Questo è verificato, come è facile vedere dalla scrittura $\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{r}}_\perp \times \vec{\boldsymbol{p}}$: ovviamente $\vec{\boldsymbol{p}}$ deve essere costante; inoltre, $\vec{\boldsymbol{r}}$ cambia nel tempo, ma $\vec{\boldsymbol{r}}_\perp$ è costante; dunque tutto ok.

15.2.2 Moto su un piano

Consideriamo il caso particolare in cui il moto è su un piano. In tal caso, scegliamo l'origine O nel polo, e gli assi $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$ sul piano del moto.

Questo ci consente di lavorare con le coordinate polari r, ϕ, introdotte nella Sezione 4.5.1, Eq. (4.16)

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \end{aligned} \tag{15.6}$$

Introduciamo la *velocità angolare* ω e la *velocità radiale* v_r:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \quad ; \quad v_r = \frac{dr}{dt}$$

e calcoliamo le componenti v_x, v_y della velocità in coordinate polari:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{d(r\cos\phi)}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\phi + r\frac{d(\cos\phi)}{dt} \\ &= v_r\cos\phi - r\sin\phi\frac{d\phi}{dt} \\ &= v_r\cos\phi - \omega r\sin\phi \\ v_y &= \frac{d(r\sin\phi)}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\phi + r\frac{d(\sin\phi)}{dt} \\ &= v_r\sin\phi + r\cos\phi\frac{d\phi}{dt} \\ &= v_r\sin\phi + \omega r\cos\phi \end{aligned} \tag{15.7}$$

Il momento angolare deve essere diretto lungo $\hat{\boldsymbol{z}}$, e deve essere tale che:

$$L_z = m(xv_y - yv_x) \qquad \text{(moto piano)} \tag{15.8}$$

In coordinate polari

$$\begin{aligned} xv_y - yv_x &= (r\cos\phi)(v_r\sin\phi + \omega r\cos\phi) - (r\sin\phi)(v_r\cos\phi - \omega r\sin\phi) \\ &= \omega r^2 \end{aligned}$$

(le parti in rv_r hanno segni opposti e si cancellano, le parti in ωr^2 si sommano — si ricordi $\cos^2 + \sin^2 = 1$). Quindi:

$$L_z = mr^2\,\omega \qquad \text{(moto piano)} \tag{15.9}$$

Se il moto deve restare sul piano, vuol dire che $\vec{\boldsymbol{F}}$ non deve avere componente lungo $\hat{\boldsymbol{z}}$. Quindi anche $\vec{\boldsymbol{M}}$ è lungo $\hat{\boldsymbol{z}}$ e tale che:

$$M_z = m(xa_y - ya_x) \qquad \text{(moto piano)} \tag{15.10}$$

Si può calcolare M_z derivando l'Eq. (15.9):

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = mr^2\frac{d\omega}{dt} + 2m\omega r v_r \qquad \text{(moto piano)} \tag{15.11}$$

La quantità $\dfrac{d\omega}{dt}$ è la *accelerazione angolare.*

15.2.3 Forza radiale

Una forza radiale è parallela a $\vec{\boldsymbol{r}}$ [2]:

$$\vec{\boldsymbol{F}} \parallel \vec{\boldsymbol{r}}$$

quindi $\vec{\boldsymbol{F}}_\perp = 0$, $\vec{\boldsymbol{M}} = 0$, e $\vec{\boldsymbol{L}}$ deve essere costante.

La conservazione del momento angolare ha importanti conseguenze sul moto, che aiutano ad integrare le equazioni e trovare la legge oraria. Anzitutto *la traiettoria giace sempre su un piano.* Infatti, scegliamo gli assi cartesiani in modo che l'asse z sia diretto lungo $\vec{\boldsymbol{L}}$, cosicché $L_x = L_y = 0$. Poiché

$$\vec{\boldsymbol{L}} = m\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{v}} \tag{15.12}$$

[2] Si noti: una forza radiale, in generale, non è un campo di forza centrale.

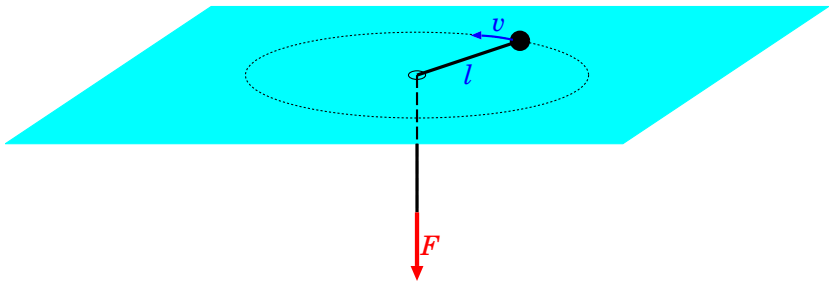


Figura 15.2:

$\vec{\boldsymbol{L}}$ deve essere ortogonale a $\vec{\boldsymbol{r}}$, quindi $\vec{\boldsymbol{r}}$ deve giacere sul piano Oxy, ovvero $z = 0$. D'altra parte anche la velocità $\vec{\boldsymbol{v}}$ deve essere ortogonale a $\vec{\boldsymbol{L}}$, quindi $v_z = 0$.

In conclusione, l'oggetto non può uscire dal piano Oxy, pertanto la sua traiettoria sarà sempre contenuta su questo piano. Quindi possiamo usare tutti i risultati ottenuti nella precedente Sezione 15.2.2.

La conservazione del momento angolare implica che L è costante. Utilizzando l'Eq. (15.9), significa che:

$$\omega r^2 = \frac{L}{m} = \text{costante} \qquad \text{(forza radiale)} \tag{15.13}$$

Riassumiamo quanto trovato finora. *Il moto soggetto a forza radiale è caratterizzato dalla conservazione del momento angolare. Di conseguenza la traiettoria giace su un piano. Inoltre la velocità angolare ω è sempre inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro della forza: $\omega \propto \frac{1}{r^2}$.*

Esempio: moto rotatorio di una massa vincolata da una corda

Una massa m è trattenuta da una corda di lunghezza ℓ, che viene tesa con una forza F, come in Fig. 15.2. Per compiere una traiettoria circolare, a velocità v, quanto deve valere F? Che succede se la corda viene tirata, in modo da accorciarsi, oppure rilasciata in modo da allungarsi? Come cambia la velocità?

Anzitutto, per lunghezza ℓ fissata, la forza che trattiene la corda deve produrre la forza centripeta, quindi $F = m\omega^2\ell = m\frac{v^2}{\ell}$. Se F è maggiore di questo valore, la corda si accorcia; viceversa, se F è minore la corda si allunga.

La forza, in ogni caso, è radiale, quindi non produce momento torcente. Di conseguenza, il momento angolare $L = mv_\perp\ell$ è costante. Qui, $v_\perp$ è la componente della velocità perpendicolare alla corda. Nel caso di traiettoria circolare $v_\perp = v$,

ma nelle fasi in cui la corda si accorcia o si allunga esiste anche una componente radiale $v_r = \dfrac{d\ell}{dt}$ *della velocità, che però non entra nel calcolo di* L*. In ogni caso,* $v_\perp \ell$ *è una costante. Per* ℓ *che non varia,* $v\ell$ *è costante.*

Quindi, se la corda viene accorciata v *aumenta, se viene allungata* v *diminuisce. La stessa cosa avviene all'energia cinetica,* $\mathcal{E} = \dfrac{m}{2}v^2$*: questo è dovuto al lavoro fatto dalla forza applicata alla corda. Il lavoro elementare è* $\delta\mathcal{W} = -F\,d\ell$*: il segno "−" è dovuto al fatto che* F *è diretta verso il centro, mentre* $d\ell > 0$ *si riferisce ad uno spostamento verso l'esterno. Se la corda si accorcia, fa lavoro positivo, dunque fa aumentare* $\mathcal{E}$*; viceversa, allungandosi, fa lavoro negativo e fa diminuire* $\mathcal{E}$*.*

15.2.4 Moti in un campo di forza centrale

Il campo di forza centrale:

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \;=\; F(r)\,\hat{\boldsymbol{r}}$$

produce (ovviamente) una *forza radiale.* In questo caso, il momento angolare $\vec{\boldsymbol{L}}$ si conserva, e il moto è sul piano ortogonale a $\vec{\boldsymbol{L}}$. Si può scegliere l'asse z lungo $\vec{\boldsymbol{L}}$ e usare le coordinate (x, y), o equivalentemente (r, ϕ), per descrivere il moto:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \end{aligned} \tag{15.14}$$

Inoltre, la velocità angolare ω e la distanza r dal centro di forza sono nella relazione:

$$\omega r^2 = \frac{L}{m} = \text{costante} \qquad \text{(campo centrale)} \tag{15.15}$$

Per fare un esempio notevole, queste proprietà sono riscontrabili nelle orbite dei pianeti intorno al Sole.

15.2.5 Orbite circolari in un campo di forza centrale

In un campo centrale *attrattivo* ($F(r) < 0$), possono esistere traiettorie ("orbite") circolari. Prima di procedere nella spiegazione, mettiamo in chiaro che *in generale, le orbite non sono circolari*, lo sono in condizioni molto particolari, che ora andiamo a discutere.

Un'orbita circolare mantiene sempre la stessa distanza r dal centro. Grazie alla conservazione del momento angolare, Eq. (15.15), anche ω è

costante. Quindi $v = \omega r$ è costante, e l'accelerazione tangenziale è nulla. Si tratta dunque di un *moto circolare uniforme*, in cui esiste solo accelerazione centripeta, $\vec{\boldsymbol{a}}_n = -\omega^2 \vec{\boldsymbol{r}}$. Uguagliando la forza radiale alla forza centripeta, e utilizzando l'Eq. (15.15), si trova:

$$\begin{aligned} F(r)\hat{\boldsymbol{r}} &= \vec{\boldsymbol{F}}_n = -m\,\omega^2 \vec{\boldsymbol{r}} \\ -F(r) &= m\omega^2 r \\ -F(r) &= \frac{L^2}{mr^3} \end{aligned}$$

L'ultima forma è utile per verificare che $F(r)$ effettivamente dipende solo da r — cosa non palese nella forma che contiene ω. Quest'ultima invece è utile per calcolare il *periodo dell'orbita* T, ovvero quanto tempo l'oggetto impiega per compiere un giro completo, $\Delta\phi = 2\pi$. Deve essere $\omega T = 2\pi$, ovvero:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{-F(r)}{mr}} \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mr}{-F(r)}} \end{aligned} \tag{15.16}$$

Analogamente, si può calcolare la velocità orbitale:

$$v = \omega r = \sqrt{\frac{-r\,F(r)}{m}} \tag{15.17}$$

Se l'oggetto viene lanciato con questa velocità v, a distanza r nel campo $F(r)$, l'orbita è sicuramente circolare.

Un esempio: se l'oggetto di massa m è un pianeta nel campo gravitazionale del Sole (massa M), abbiamo $F(r) = -\dfrac{GMm}{r^2}$. Il periodo orbitale del pianeta è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

L'orbita circolare è "stabile"? (*)

Se v e r non soddisfano esattamente l'Eq. (15.17), l'orbita non è più circolare. Che succede se le condizioni iniziali sono leggermente discoste da quelle ideali? L'orbita rimane "approssimativamente circolare" o devia rapidamente? Nel primo caso, si dice che l'orbita circolare è "stabile".

Per un dato valore di L, chiamiamo r_0 il raggio dell'orbita circolare, cosicché $-F(r_0) = \dfrac{L^2}{mr_0^3}$, e studiamo che cosa succede per una piccola deviazione, $r = r_0 + \delta r$. Abbiamo due casi:

- $|F(r)| = -F(r) > \dfrac{L^2}{mr^3}$: *la forza centrale è più forte del necessario e tende a far diminuire r;*
- $|F(r)| = -F(r) < \dfrac{L^2}{mr^3}$: *la forza centrale è più debole del necessario e tende a far aumentare r;*

Definiamo

$$f(r) = \frac{L^2}{mr^3} + F(r)$$

cosicché

- $f(r) < 0 \quad \Longrightarrow \quad r$ *tende a diminuire;*
- $f(r) > 0 \quad \Longrightarrow \quad r$ *tende ad aumentare.*

La condizione di orbita stabile si realizza se, per $\delta r > 0$, $f(r) < 0$, e viceversa — ovvero, se $f(r)$ e δr sono discordi.

Calcoliamo $f(r)$, per piccole deviazione δr, ricordando che $f(r_0) = 0$ per definizione.

$$\begin{aligned} f(r) &\simeq f(r_0) + \left[\frac{d}{dr}\left(\frac{L^2}{mr^3} + F(r)\right)\right]_{r=r_0} \cdot \delta r \\ &= \left[-3\frac{L^2}{mr_0^4} + \left(\frac{dF}{dr}\right)_{r=r_0}\right] \cdot \delta r \\ &= \left[3\frac{F(r_0)}{r_0} + \left(\frac{dF}{dr}\right)_{r=r_0}\right] \cdot \delta r \end{aligned}$$

Per avere orbita stabile occorre quindi che il termine in [ ] sia < 0, ovvero:

$$\left(\frac{dF}{dr}\right)_{r=r_0} < 3\frac{L^2}{mr_0^4} = -3\frac{F(r_0)}{r_0} \qquad \textit{(stabilità dell'orbita circolare)}$$

cioè la condizione di stabilità per l'orbita circolare dipende da come varia $F(r)$ al variare del raggio r.

Per forze gravitazionali e coulombiane attrattive, $F(r) = -\dfrac{K}{r^2}$, cosicché $\dfrac{dF}{dr} = \dfrac{2K}{r^3}$, mentre $-3\dfrac{F}{r} = \dfrac{3K}{r^3}$, quindi la condizione di stabilità è sempre realizzata.

15.3 Forza impulsiva

Ricordiamo che una forza impulsiva $\vec{\boldsymbol{F}}_{imp}$, agente in un breve intervallo di tempo Δt, è caratterizzata da un *impulso*

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{I}}} = \int_t^{t+\Delta t} \vec{\boldsymbol{F}}_{imp}(t')dt'$$

(vd Sezione 8.6.1). L'effetto di una forza impulsiva sul momento angolare può essere calcolato come:

$$\Delta\vec{\boldsymbol{L}} \;=\; \int_t^{t+\Delta t} \vec{\boldsymbol{r}}(t') \times \vec{\boldsymbol{F}}_{imp}(t')\, dt'$$

Ora, assumendo che Δt sia molto breve, la variazione di $\vec{\boldsymbol{r}}(t')$ nell'intervallo di tempo $[t; t+\Delta t]$, deve essere molto piccola, $\Delta\vec{\boldsymbol{r}} \simeq \vec{\boldsymbol{v}}\,\Delta t$, pertanto si può considerare $\vec{\boldsymbol{r}}$ costante sull'intervallo di integrazione, ottenendo quindi:

$$\Delta\vec{\boldsymbol{L}} \;\simeq\; \vec{\boldsymbol{r}} \times \left[\int_t^{t+\Delta t} \vec{\boldsymbol{F}}_{imp}(t')\, dt'\right] \;=\; \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{I}}}$$

15.4 Lavoro del momento torcente

Consideriamo un punto materiale in $\vec{\boldsymbol{r}}$, su cui agisce una forza $\vec{\boldsymbol{F}}$. La sua velocità può essere scomposta in una componente radiale, v_r, e in una trasversa: infatti, scrivendo $\vec{\boldsymbol{r}} = r\,\hat{\boldsymbol{r}}$, abbiamo:

$$\vec{\boldsymbol{v}} \;=\; \frac{d}{dt}(r\,\hat{\boldsymbol{r}}) \;=\; \frac{dr}{dt}\,\hat{\boldsymbol{r}} + r\,\frac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt}$$

Ora, il versore $\hat{\boldsymbol{r}}$ non può che subire variazioni di direzione, pertanto può essere descritto come un vettore di modulo costante che ruota attorno a un asse con velocità angolare ω. Il problema è analogo a quello trattato in Sezione 7.6.4, quindi $\dfrac{d\hat{\boldsymbol{r}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{r}}$. In conclusione possiamo scrivere che:

$$\vec{\boldsymbol{v}} \;=\; v_r\,\hat{\boldsymbol{r}} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$$

Ora, la potenza prodotta dalla forza si può scrivere come:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} \;&=\; \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} \\
&=\; \vec{\boldsymbol{F}} \cdot (v_r\hat{\boldsymbol{r}} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}) \;=\; \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{\boldsymbol{r}}\, v_r + \vec{\boldsymbol{F}} \cdot (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}) \\
&=\; F_r v_r + \vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \left(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}}\right) \;=\; F_r v_r + \vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \vec{\boldsymbol{M}}
\end{aligned}$$

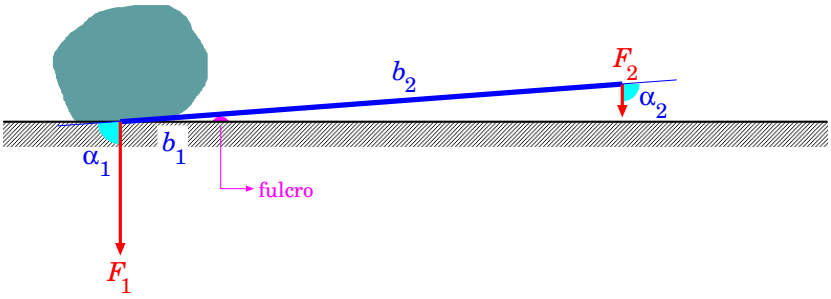


Figura 15.3: *Leva meccanica*

(abbiamo sfruttato l'identità vettoriale $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot (\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{C}}) = \vec{\boldsymbol{B}} \cdot (\vec{\boldsymbol{C}} \times \vec{\boldsymbol{A}})$).

Quindi la potenza ha due contributi: uno dalla forza radiale, $\mathcal{P}_r = F_r v_r$, l'altro che viene dal momento torcente e dalla rotazione, $\mathcal{P}_M = \vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \vec{\boldsymbol{M}}$. Nei problemi di moto circolare, $v_r = 0$, quindi resta la potenza sviluppata dal momento torcente.

15.5 Leve meccaniche

Un'applicazione pratica del momento torcente è nelle *leve meccaniche*. È noto che, dovendo sollevare o spostare una grossa massa, è conveniente utilizzare una sbarra rigida appoggiata in un punto — il "fulcro" — vd Fig. 15.3. Le due parti in cui il fulcro divide la sbarra si chiamano "bracci". La massa da sollevare esercita una forza $\vec{\boldsymbol{F}}_1$ sul braccio $\vec{\boldsymbol{b}}_1$, pertanto produce un momento torcente

$$\vec{\boldsymbol{M}}_1 = \vec{\boldsymbol{b}}_1 \times \vec{\boldsymbol{F}}_1$$

All'altro estremo della leva viene applicata una forza $\vec{\boldsymbol{F}}_2$ sul braccio $\vec{\boldsymbol{b}}_2$, producendo un momento torcente

$$\vec{\boldsymbol{M}}_2 = \vec{\boldsymbol{b}}_2 \times \vec{\boldsymbol{F}}_2$$

Guardando la figura, ci si rende conto che $\vec{\boldsymbol{M}}_1$, $\vec{\boldsymbol{M}}_2$ hanno entrambi la stessa direzione, ortogonale al piano del disegno, con $\vec{\boldsymbol{M}}_1$ "uscente" dal disegno e $\vec{\boldsymbol{M}}_2$ "entrante". Pertanto ragioniamo senza i vettori, e per tenere conto dell'orientamento opposto dei due momenti, diamo per convenzione segno $+$ a M_1 e segno $-$ a M_2, cosicché:

$$\begin{aligned} M_1 &= b_1 F_1 \sin\alpha_1 \\ M_2 &= -b_2 F_2 \sin\alpha_2 \end{aligned}$$

Notiamo dalla figura che, essendo $\vec{\boldsymbol{F}}_1$, $\vec{\boldsymbol{F}}_2$ parallele, $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$, quindi $\sin\alpha_2 = \sin\alpha_1$. Per tenere la leva in equilibrio, deve essere

$$0 \;=\; M_{tot} \;=\; M_1 + M_2 = b_1 F_1 \sin\alpha_1 - b_2 F_2 \sin\alpha_2$$

ovvero

$$b_1 F_1 \;=\; b_2 F_2 \qquad \text{(equilibrio)}$$

Un piccolo eccesso in F_2 consente di sollevare il peso:

$$F_2 \;>\; \frac{b_1}{b_2} F_1 \qquad \text{(sollevamento)}$$

Con una opportuna scelta dei bracci, ovvero con b_2 molto più lungo di b_1, è possibile sollevare un grosso peso (F_1) applicando una forza F_2 relativamente piccola. La leva è un "amplificatore di forza".

È interessante fare anche una considerazione sul lavoro fatto dalle forze. Che lavoro deve fare F_2 per sollevare il peso di uno spostamento Δs_1? Se la leva compie una rotazione intorno al fulcro di un angolo $\Delta\alpha$, gli estremi dei bracci b_1, b_2 compiono spostamenti:

$$\Delta s_1 = b_1\,\Delta\alpha \qquad ; \qquad \Delta s_2 = b_2\,\Delta\alpha$$

quindi $\Delta s_2 = \dfrac{b_2}{b_1}\,\Delta s_1$. Pertanto il lavoro di F_2 è

$$\mathcal{W}_2 \;=\; F_2\,\Delta s_2 \;=\; \underbrace{F_2}_{> \frac{b_1}{b_2} F_1} \cdot \frac{b_2}{b_1}\,\Delta s_1 > F_1\,\Delta s_1$$

Senza l'uso della leva, per sollevare il peso dovremmo applicarvi direttamente una forza $F_2' > F_1$. Per compiere uno spostamento Δs_1 dovremmo fare un lavoro

$$\mathcal{W}_2' = F_2'\,\Delta s_1 > F_1\,\Delta s_1$$

In entrambi i casi, il lavoro applicato ($\mathcal{W}_2$ con la leva, $\mathcal{W}_2'$ senza leva) deve essere $> F_1 \Delta s_1$.

La leva *non è un amplificatore di lavoro*!! Se un essere umano, o animale, o anche una macchina, è in grado di fornire una certa quantità di lavoro, questa non può essere aumentata.

15.6 Principio di azione-reazione e conservazione del momento angolare

Consideriamo due oggetti (1) e (2) che si scambiano forze $\vec{\boldsymbol{F}}_1$ e $\vec{\boldsymbol{F}}_2$ ciascuno sull'altro, e supponiamo che non esistano altre forze esterne. Le due forze soddisfano il principio di azione-reazione: $\vec{\boldsymbol{F}}_1 = -\vec{\boldsymbol{F}}_2$, inoltre entrambe sono dirette lungo la direzione congiungente i due oggetti. Le variazioni dei momenti angolari dei due oggetti sono:

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}_i}{dt} = \vec{\boldsymbol{r}}_i \times \vec{\boldsymbol{F}}_i$$

(con $i = 1, 2$ per indicare ciascuno dei due oggetti), pertanto la variazione del momento angolare *totale* $\vec{\boldsymbol{L}}_1 + \vec{\boldsymbol{L}}_2$ è:

$$\frac{d(\vec{\boldsymbol{L}}_1 + \vec{\boldsymbol{L}}_2)}{dt} = \vec{\boldsymbol{r}}_1 \times \vec{\boldsymbol{F}}_1 + \vec{\boldsymbol{r}}_2 \times \vec{\boldsymbol{F}}_2 = (\vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2) \times \vec{\boldsymbol{F}}_1 = 0$$

Nella seconda uguaglianza abbiamo introdotto $\vec{\boldsymbol{F}}_1 = -\vec{\boldsymbol{F}}_2$. La terza uguaglianza si ottiene sfruttando la proprietà che $\vec{\boldsymbol{F}}_1$ è parallela alla direzione congiungente i due oggetti, che è lungo il vettore $(\vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_2)$: pertanto abbiamo un prodotto vettoriale fra due vettori paralleli, che è sempre nullo.

Riassumendo: *quando due oggetti sono sottoposti solo alle reciproche forze — cioè senza ulteriori forze esterne — il loro momento angolare totale si conserva, ovvero è una costante del moto.*

Nella dimostrazione abbiamo usato la legge di azione-reazione, in particolare il fatto che la forza fra (1) e (2) sia parallela alla linea congiungente i due oggetti. Se ciò non è vero, per esempio come in Fig. 8.2(d), la conservazione del momento angolare viene violata.

Capitolo 16

Sistemi di riferimento, forze fittizie

16.1 Alcune considerazioni preliminari

Abbiamo già detto che per definire posizione, velocità, accelerazione (rispettivamente $\vec{\boldsymbol{r}}$, $\vec{\boldsymbol{v}}$, $\vec{\boldsymbol{a}}$) nello spazio 3-dimensionale, è necessario anzitutto introdurre un sistema di riferimento, rispetto al quale si definiscono le posizioni.

Riprendendo questi concetti, un sistema di riferimento è specificato una volta che si definisce l'*origine* O e tre versori $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$ che dànno l'orientamento dei tre assi cartesiani. Pertanto, d'ora in poi indicheremo un sistema di riferimento come $(O; \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$ — questa notazione contiene tutte le informazioni necessarie a definirlo.

Stabilito il sistema di riferimento, qualunque posizione $\vec{\boldsymbol{r}}$ è individuabile con le tre coordinate cartesiane x, y, z:

$$\vec{\boldsymbol{r}} \;=\; x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{\boldsymbol{r}} \;\equiv\; (x, y, z) \tag{16.1}$$

Le due scritture sono equivalenti, quando il sistema di riferimento $(O; \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$ sia specificato.

Ora si pone la questione: come si sceglie un sistema di riferimento? In generale c'è arbitrarietà: quindi si sceglie quello "più conveniente", nel senso che ci permette di descrivere in maniera più agevole le posizioni e i moti degli oggetti che stiamo esaminando. In prima istanza, un *osservatore* sceglierà un sistema di riferimento nel quale esso si trovi "fermo", e possibilmente nell'origine, cosicché tutte le posizioni sono misurate rispetto alla sua. Non è

detto però che questa scelta sia la più conveniente per descrivere la dinamica degli oggetti osservati [1]. Vediamo alcuni esempi.

[1] Un osservatore O è fermo sulla superficie della Terra, e fa esperimenti lanciando in aria oggetti con velocità e angoli diversi. Come sistema di riferimento sceglie quello in cui l'origine O si trova nel luogo dell'osservatore, l'asse $\hat{\boldsymbol{z}}$ punta verso l'alto, gli assi $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$ sono orizzontali e ortogonali fra loro. I moti che osserva soddisfano tutti le caratteristiche studiate nella Sezione 7.5.4: sono rettilinei uniformemente accelerati se la velocità iniziale è nulla o verticale, altrimenti moti parabolici. Fin qui, niente di strano...

[2] Su un'auto in moto rettilineo uniforme, un osservatore O' "vede il paesaggio muoversi all'indietro". Fin dai primi anni di vita, ci convinciamo che si tratta di un'illusione: la ragione è che l'auto si sta muovendo in avanti. Anche qui, niente di nuovo... Se l'auto passa velocemente vicino all'osservatore O dell'esempio precedente, l'osservatore O' vede che anche O si muove, ma capisce che la causa è nel proprio movimento, per cui sarebbe portato a dedurre che il sistema di riferimento scelto da O sia migliore, in quanto "fermo".

[3] Sul ponte di una grossa nave, che si muove su un mare calmo a velocità $\vec{\boldsymbol{w}}$ costante e sempre nella stessa direzione, un osservatore O'' si mette a fare esperimenti di caduta degli oggetti simili a quelli che l'osservatore O compie a terra. Si accorge che le caratteristiche dei moti sono le stesse che ha osservato O, però O'' le sta riferendo al *proprio* sistema di riferimento. O'' usa un sistema di riferimento che si muove con la nave: per lui/lei il ponte della nave è *fermo*. Se lancia un oggetto esattamente in verticale, questo ricade esattamente dove è stato lanciato: l'osservatore riesce ad afferrarlo senza spostarsi sul ponte, *anche se nel frattempo la nave è andata avanti.*

Soffermiamoci un attimo su questo punto. L'osservatore O'' potrebbe dimenticarsi che la nave è in moto. Lancia l'oggetto in alto, la velocità iniziale, $\vec{\boldsymbol{v}}_0 = v_0\hat{\boldsymbol{z}}$, è diretta lungo la stessa linea della accelerazione di gravità,

[1] Pensate al "sistema tolemaico", in cui la Terra era il riferimento e l'origine, e il moto della Luna, del Sole, dei pianeti e delle stelle erano tutti descritti rispetto alla Terra. Con la Luna, il Sole e le stelle la descrizione funzionava abbastanza bene, ma con i pianeti... era decisamente complicata! Copernico, Keplero e Galileo capirono che scegliere la Terra come sistema di riferimento non era una scelta conveniente, e trovarono un riferimento migliore: il Sole. Viceversa, per studiare il moto di oggetti che percorrono pochi metri, per tempi di pochi secondi o minuti, scegliere un riferimento solidale con la Terra va benissimo.

$\vec{\boldsymbol{a}} = -g\hat{\boldsymbol{z}}$, quindi per quanto studiato nella Sezione 7.5.2, il moto è *rettilineo* uniformemente accelerato. Questo è esattamente ciò che O'' rileva.

Un eventuale osservatore O posto a terra, che osserva con un binocolo gli esperimenti di O'', darebbe una descrizione diversa. La nave si muove con velocità costante $\vec{\boldsymbol{w}}$. Quindi, anche l'osservatore O'' ha la stessa velocità: da quando ha lanciato l'oggetto a quando lo ha ripreso, O'' si è mosso in avanti insieme alla nave. D'altronde, per O, anche l'oggetto lanciato non si muove solo in verticale: al momento del lancio, esso possiede una componente orizzontale di velocità pari a $\vec{\boldsymbol{w}}$. Perché? Quando, sulla nave, O'' lancia l'oggetto "verso l'alto", imprime ad esso una forza verticale, quindi ne altera lo stato di moto (prima era "fermo") lungo la verticale. Non applica forze in orizzontale, quindi la componente orizzontale della velocità non cambia: vista dalla nave, essa resta nulla; vista da terra, essa resta pari a $\vec{\boldsymbol{w}}$. Quindi, per l'osservatore O, la situazione è comprensibile: O'' si muove con velocità $\vec{\boldsymbol{w}}$, l'oggetto lanciato compie una traiettoria parabolica (non più rettilinea — vd sempre Sezione 7.5.2: in questo caso, $\vec{\boldsymbol{v}}_0$ non è più allineato con $\vec{\boldsymbol{a}}$), ma siccome la componente orizzontale della velocità dell'oggetto lanciato è sempre $\vec{\boldsymbol{w}}$, invariata, alla fine quando l'oggetto cade ha percorso in orizzontale la stessa distanza di O'', quindi O'' lo può riprendere senza spostarsi sul ponte della nave.

Da questo esempio si conclude una cosa importante: gli osservatori O e O'' non possono concludere, sulla base di esperimenti fisici, quale sistema di riferimento è migliore: in entrambi, le *stesse* leggi della caduta degli oggetti sono rispettate. Ricordiamo che O'' si muove rispetto a O a *velocità costante*. Anche l'osservatore O' sull'auto arriverebbe alle stesse conclusioni, se avesse abbastanza spazio per lanciare oggetti... Si potrebbe obiettare che, comunque, l'osservatore O ha un sistema di riferimento migliore, perché è "fermo sulla terra". Ma la Terra è ferma???? Sappiamo di no...

Ora consideriamo altri esempi.

[4] L'auto su cui si trova O' deve frenare improvvisamente, oppure deve curvare in velocità. L'osservatore O', che stava bevendo da un bicchiere colmo, rischia di rovesciarselo addosso.

[5] La nave su cui si trova O'' incontra un tratto di mare mosso e comincia a sobbalzare. Non solo O'' non riesce più a fare gli esperimenti come si deve, ma anche i suoi amici che giocavano a scacchi devono interrompere e raccogliere tutti i pezzi prima che rotolino ovunque. Che cosa è successo?

Un osservatore da terra descriverebbe la situazione così: sull'auto, o sulla nave, stanno agendo forze che ne alterano il moto, cosicché esso non è più rettilineo uniforme: l'auto frena o curva, la nave sobbalza... Queste forze peró non agiscono direttamente sull'acqua nel bicchiere e sugli scacchi, che continuano il loro moto rettilineo uniforme (almeno per un po', finché per contatto non vengono trascinati dall'ambiente). Per esempio, se l'auto frena, l'osservatore O', trattenuto dal sedile e dalla cintura di sicurezza, e anche il bicchiere, trattenuto dalla mano, rallentano, ma l'acqua nel bicchiere tende ad andare avanti come prima, quindi esce dal bicchiere.

Invece, gli osservatori O', O'', dal loro punto di vista, vedono oggetti che si muovono in balia di "forze" inspiegate. L'unico modo che hanno per comprendere ciò che accade è ammettere che i loro sistemi di riferimento non sono buoni per descrivere le leggi fisiche.

Che cosa dobbiamo concludere? Negli esempi [2] e [3], sembrava che O', O'' avessero dei sistemi di riferimento tanto buoni quanto O, mentre dagli esempi [4] e [5] si direbbe il contrario. Ciò che è successo è che nei primi esempi, la velocità di O', O'' rispetto a O era *costante*, mentre negli ultimi esempi non lo era più.

Fin qui abbiamo esposto il problema in maniera qualitativa: le prossime sezioni sono dedicate alla formalizzazione quantitativa.

16.2 Sistemi di riferimento in moto traslatorio relativo

Consideriamo due sistemi di riferimento ("SR") $(O; \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$ e $(O'; \hat{\boldsymbol{x}}', \hat{\boldsymbol{y}}', \hat{\boldsymbol{z}}')$. Nel caso più generale, essi potranno avere origini collocate in luoghi diversi, che si muovono diversamente. Pertanto ciascuno dei SR appare in moto, se visto dall'altro.

In linea di principio, anche gli assi cartesiani $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$ e $\hat{\boldsymbol{x}}', \hat{\boldsymbol{y}}', \hat{\boldsymbol{z}}'$ possono essere orientati diversamente, e addirittura possono ruotare.

Di SR in rotazione ci occuperemo nella Sezione 16.5. Qui consideriamo il caso di *assi cartesiani paralleli fra i due sistemi*, come in Fig. 16.1, cosicché

$$\hat{\boldsymbol{x}} \equiv \hat{\boldsymbol{x}}' \quad ; \quad \hat{\boldsymbol{y}} \equiv \hat{\boldsymbol{y}}' \quad ; \quad \hat{\boldsymbol{z}} \equiv \hat{\boldsymbol{z}}'$$

Ciò che cambia dunque è la posizione relativa di O e O'. Conviene scegliere uno dei due SR per definire anche il moto relativo dell'altro. Quindi definiamo

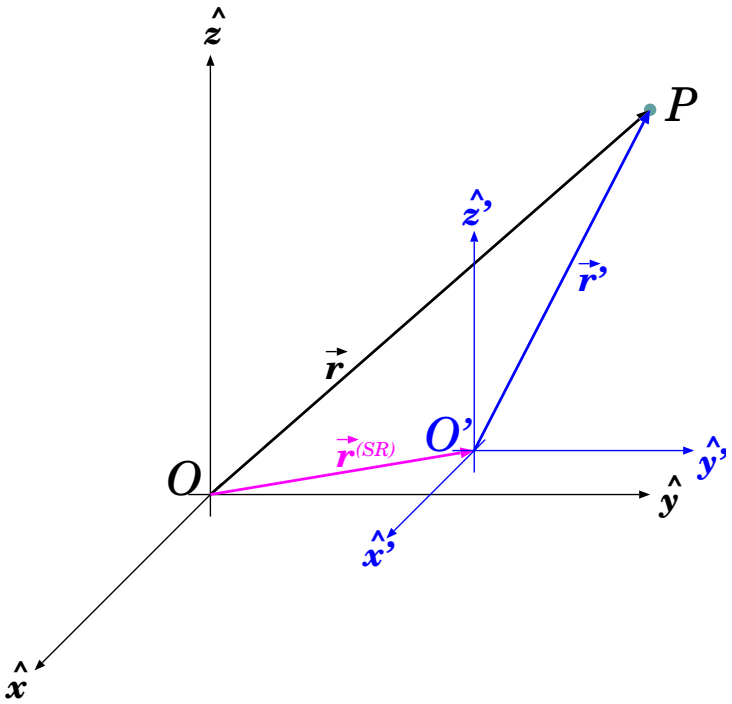


Figura 16.1: *Due sistemi di riferimento,* $(O; \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$ *e* $(O'; \hat{\boldsymbol{x}}', \hat{\boldsymbol{y}}', \hat{\boldsymbol{z}}')$*, che traslano l'uno rispetto all'altro, mantenendo gli assi cartesiani paralleli.*

la posizione di O' rispetto a O:

$$\vec{\boldsymbol{r}}^{(SR)} \equiv \vec{\boldsymbol{OO'}} \tag{16.2}$$

Possiamo facilmente definire anche la *velocità* $\vec{\boldsymbol{v}}^{(SR)}$ e l'*accelerazione* $\vec{\boldsymbol{a}}^{(SR)}$ di O' rispetto a O:

$$\vec{\boldsymbol{v}}^{(SR)} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}^{(SR)}}{dt} \tag{16.3}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}^{(SR)} = \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}^{(SR)}}{dt} = \frac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}^{(SR)}}{dt^2} \tag{16.4}$$

Come si trasformano le coordinate (x, y, z) di un oggetto P, quando passiamo dal SR $(O; \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$ al SR $(O'; \hat{\boldsymbol{x}}', \hat{\boldsymbol{y}}', \hat{\boldsymbol{z}}')$?

Chiamiamo rispettivamente $\vec{\boldsymbol{r}}$ e $\vec{\boldsymbol{r}}'$ i vettori-posizione di P in ciascuno dei due riferimenti, come in Fig. 16.1. Possiamo ragionare sulla composizione degli spostamenti. Il vettore $\vec{\boldsymbol{r}}$ descrive uno spostamento $O \to P$. Esso può essere scomposto in uno spostamento $O \to O'$, descritto dal vettore $\vec{\boldsymbol{r}}^{(SR)}$, seguito da uno spostamento $O' \to P$, descritto dal vettore $\vec{\boldsymbol{r}}'$. Pertanto:

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}' + \vec{\boldsymbol{r}}^{(SR)} \tag{16.5}$$

Ora, ricordiamo che

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{r}} &= x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}} \\
\vec{\boldsymbol{r}}' &= x'\hat{\boldsymbol{x}}' + y'\hat{\boldsymbol{y}}' + z'\hat{\boldsymbol{z}}' \\
&\equiv x'\hat{\boldsymbol{x}} + y'\hat{\boldsymbol{y}} + z'\hat{\boldsymbol{z}} \\
\vec{\boldsymbol{r}}^{(SR)} &= x^{(SR)}\hat{\boldsymbol{x}} + y^{(SR)}\hat{\boldsymbol{y}} + z^{(SR)}\hat{\boldsymbol{z}}
\end{aligned}
\tag{16.6}
$$

Poiché gli assi cartesiani nei due SR coincidono, il passaggio alle coordinate cartesiane è immediato:

$$
\begin{aligned}
x &= x' + x^{(SR)} \\
y &= y' + y^{(SR)} \\
z &= z' + z^{(SR)}
\end{aligned}
\tag{16.7}
$$

Possiamo ora ricavare le trasformazioni della velocità di P, ovvero che relazione esiste fra la velocità $\vec{\boldsymbol{v}}$, come vista dal SR $(O; x, y, z)$, e la velocità $\vec{\boldsymbol{v}}'$, come vista dal SR $(O'; x', y', z')$. Tali velocità sono definite come:

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{v}} &= \frac{dx}{dt}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{dy}{dt}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{dz}{dt}\hat{\boldsymbol{z}} \\
\vec{\boldsymbol{v}}' &= \frac{dx'}{dt}\hat{\boldsymbol{x}}' + \frac{dy'}{dt}\hat{\boldsymbol{y}}' + \frac{dz'}{dt}\hat{\boldsymbol{z}}' \\
&\equiv \frac{dx'}{dt}\hat{\boldsymbol{x}} + y'\hat{\boldsymbol{y}} + z'\hat{\boldsymbol{z}} \\
\vec{\boldsymbol{v}}^{(SR)} &= \frac{dx^{(SR)}}{dt}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{dy^{(SR)}}{dt}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{dz^{(SR)}}{dt}\hat{\boldsymbol{z}}
\end{aligned}
\tag{16.8}
$$

Derivando rispetto a t le Eq. (16.6), ricordando che i versori sono costanti, e usando le Eq. (16.8), si ottiene:

$$
\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}' + \vec{\boldsymbol{v}}^{(SR)} \tag{16.9}
$$

che in coordinate cartesiane si scrive:

$$\begin{aligned} v_x &= v'_x + v_x^{(SR)} \\ v_y &= v'_y + v_y^{(SR)} \\ v_z &= v'_z + v_z^{(SR)} \end{aligned} \tag{16.10}$$

Un discorso analogo si può fare con l'accelerazione, ottenendo:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{a}}' + \vec{\boldsymbol{a}}^{(SR)} \tag{16.11}$$

e per coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned} a_x &= a'_x + a_x^{(SR)} \\ a_y &= a'_y + a_y^{(SR)} \\ a_z &= a'_z + a_z^{(SR)} \end{aligned} \tag{16.12}$$

16.2.1 Una riflessione sulle trasformazioni di velocità (*)

Nella derivazione delle trasformazioni

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}^{(SR)} + \vec{\boldsymbol{r}}' \quad ; \quad \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}^{(SR)} + \vec{\boldsymbol{v}}' \quad ; \quad \vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{a}}^{(SR)} + \vec{\boldsymbol{a}}'$$

sono "nascoste" due ipotesi. La prima è contenuta nella scrittura $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}^{(SR)} + \vec{\boldsymbol{r}}'$: dobbiamo infatti ricordare che $\vec{\boldsymbol{r}}$, $\vec{\boldsymbol{r}}^{(SR)}$ sono definiti nel SR $(O; x, y, z)$, mentre $\vec{\boldsymbol{r}}'$ è definito nel SR $(O'; x', y', z')$. Quando facciamo la somma vettoriale, stiamo implicitamente assumendo che

(i) un vettore-spostamento definito in un SR è uguale anche se visto nell'altro SR.

Inoltre, quando facciamo le derivate rispetto a t, stiamo assumendo che il tempo sia "universale", ovvero che

(ii) il tempo t può essere definito in modo identico per i due SR.

Queste due ipotesi appaiono molto ragionevoli, ma non sono dimostrabili: vengono in realtà postulate! Effettivamente la loro validità è ben verificata, sperimentalmente, nell'ambito della meccanica newtoniana:

(*i*) una qualunque asta rigida ha sempre la stessa lunghezza, se osservata in quiete o in moto, pertanto le stesse unità di misura di lunghezza sono universali, non dipendono dal SR;

(*ii*) un orologio segna il tempo con lo stesso ritmo, sia che si trovi in quiete o in moto, pertanto anche le unità di misura del tempo non dipendono dal SR.

Solo per anticipare dove emerge il problema: la regola di composizione delle velocità, $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}' + \vec{\boldsymbol{v}}^{(SR)}$, implica che non esistono velocità assolute: la velocità dipende dal SR in cui si osserva. Ebbene: la velocità di propagazione della luce nel vuoto, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, è assoluta! Cioè, uguale in qualunque SR, indipendentemente dal moto della sorgente di luce e dell'osservatore che la riceve. Questa peculiarità, che è alla base della Relatività Ristretta, ci indurrà ad una ridiscussione di quanto visto finora, come vedremo nel Capitolo **??**.

Il problema si presenta quando le velocità diventano confrontabili con c.

16.2.2 Esercizi sulla trasformazione delle velocità

Esercizio 16.1. *Un treno viaggia su una rotaia rettilinea alla velocità* $v^{(SR)} = 260$ km/h. *Due passeggeri (1) e (2), agli estremi dello stesso vagone, camminano l'uno verso l'altro, rispettivamente verso la testa e verso la coda del treno, e si incontrano a metà del vagone. Se il vagone è lungo* $\ell = 30$ m *e i due passeggeri si incontrano dopo* $t = 10$ s, *calcolare le velocità* v_1', v_2' *dei passeggeri rispetto al vagone. Quindi calcolare le velocità* v_1, v_2 *dei passeggeri, come appaiono se osservati da terra.*

Risposta. *Ciascun passeggero percorre una distanza* $\ell/2$ *nel tempo* t. *Quindi,* $v_1' = \dfrac{\ell/2}{t} = 1.5$ m/s *e* $v_2' = -\dfrac{\ell/2}{t} = -1.5$ m/s — *i segni indicano che (1) cammina verso la testa del treno, direzione presa come positiva, mentre (2) cammina verso la coda.*

Le velocità dei passeggeri, viste da terra, sono $v_{1,2} = v_{1,2}' + v^{(SR)}$. *Conviene convertire* $v^{(SR)}$ *in unità S.I.:* $v^{(SR)} = \dfrac{260 \text{ km/h}}{3.6} = 72.22$ m/s. *Quindi* $v_1 = 73.72$ m/s *e* $v_2 = 70.72$ m/s.

Esercizio 16.2. *Un'automobile di lunghezza* $\ell_1 = 4.5$ m, *che viaggia a velocità* $v_1 = 130$ km/h, *deve sorpassare un autotreno di lunghezza* $\ell_2 = 23$ m *che viaggia a velocità* $v_2 = 125$ km/h. *Per motivi di sicurezza, l'auto non deve avvicinarsi all'autotreno più di* $\delta = 10$ m *prima del sorpasso, e anche al rientro deve lasciare la stessa distanza. Quanto è lungo il sorpasso? (sia nel tempo, che nello spazio)*

Risposta. *Conviene risolvere il problema nel SR in cui l'autotreno è in quiete. La macchina ha velocità* $v_1' = v_1 - v_2 = 5$ km/h $= 1.389$ m/s. *La lunghezza del sorpasso è* $\Delta s' = \ell_1 + \ell_2 + 2\delta = 47.5$ m — *infatti, se poniamo* $s' = 0$ *sul retro dell'autotreno, il "muso" della macchina all'inizio del sorpasso si trova in* $s'_{in} = -\delta$, *mentre alla fine si trova in* $s'_{fin} = \ell_2 + \delta + \ell_1$. *Quindi il tempo impiegato è* $\Delta t = \dfrac{\Delta s'}{v_1'} = 34.2$ s. *La distanza percorsa dalla macchina in questo tempo (misurata rispetto al SR dell'autostrada, quindi a velocità* $v_1 = 36.111$ m/s*) è* $\Delta s = v_1 \Delta t = 1235$ m $= 1.235$ km.

Esercizio 16.3. *Un nuotatore, in acqua ferma, riesce a nuotare alla velocità* $v_0 = 4$ km/h. *L'acqua di un fiume scorre con velocità* $w = 2.5$ km/h. *Quanto tempo impiega il nuotatore a percorrere* 100 m *nuotando nel fiume verso valle? E quanto impiega a percorrere la stessa distanza nuotando verso monte?*

Risposta. *Anche qui si devono trasformare le velocità dal SR del fiume a quello della terra. Il problema è unidimensionale (tutti i moti sono nella direzione del fiume). Quindi, dette* v' *e* v *le velocità del nuotatore rispetto al fiume e rispetto alla terra, e definendo positive le velocità verso valle, abbiamo:* $v = v' + w$.

Quando il nuotatore va verso valle, $v' = v_0$, *quindi* $v = (4 + 2.5)$ km/h $=$ 6.5 km/h. *Per percorrere* 100 m *impiega* $\dfrac{0.1 \text{ km}}{6.5 \text{ km/h}} = 0.01538$ h $= 55.38$ s.

Quando invece nuota verso monte, $v' = -v_0$, *quindi* $v = (-4 + 2.5)$ km/h $= -1.5$ km/h. *Per percorrere* 100 m *impiega* $\dfrac{-0.1 \text{ km}}{-1.5 \text{ km/h}} = 0.06667$ h $= 240$ s $= 4$ min.

Esercizio 16.4. *Lo stesso nuotatore vuole attraversare lo stesso fiume, da una sponda all'altra, in modo da raggiungere la riva opposta nel punto di fronte a quello da cui è partito. Ovviamente sa che se nuotasse in direzione trasversale, la corrente del fiume lo sposterebbe a valle. Quindi dovrà nuotare obliquamente, parzialmente orientato verso monte. Qual è l'angolo* α *che deve tenere rispetto alla direzione trasversale? Se il fiume è largo* 12 m, *quanto impiega il nuotatore ad attraversarlo?*

Risposta. *Qui il problema è bidimensionale. C'è la direzione in cui scorre il fiume, che chiamiamo* x, *e quella trasversale, che chiamiamo* y. *La velocità del nuotatore, rispetto all'acqua, ha componenti* $v_x' = -v_0 \sin\alpha$ *e* $v_y' = v_0 \cos\alpha$. *La velocità del fiume ha componenti* $v_x^{(SR)} = w$ *e* $v_y^{(SR)} = 0$. *La velocità del nuotatore rispetto a terra quindi ha componenti:*

$$v_x = v_x' + v_x^{(SR)} = -v_0 \sin\alpha + w \quad ; \quad v_y = v_y' + v_y^{(SR)} = v_0 \cos\alpha$$

Poiché il nuotatore deve raggiungere la riva opposta senza spostarsi lungo il fiume, deve essere $v_x = 0$, *ovvero* $v_0 \sin\alpha = w$. *Si deduce che* $\sin\alpha = \dfrac{w}{v_0} = 0.625$, *cioè* $\alpha = \sin^{-1}(0.625) = 0.675$ rad $= 38.68°$.

Quindi la velocità trasversale è $v_y = v_0 \cos\alpha = 3.122$ km/h. *Il tempo per attraversare il fiume è* $\dfrac{0.012 \text{ km}}{3.122 \text{ km/h}} = 0.003844 \text{ h} = 13.84 \text{ s}$.

Esercizio 16.5. *Un viaggiatore seduto in treno in una giornata piovosa osserva la pioggia, che riga il finestrino. All'esterno non c'è vento, dunque la pioggia dovrebbe cadere verticale. Eppure, l'angolo di caduta della pioggia, dal treno in movimento, appare obliquo, di* $82°$ *rispetto alla verticale. Il treno viaggia alla velocità di* 150 km/h. *A che velocità cade la pioggia?*

Risposta*: La velocità della pioggia, rispetto a terra, è* $\vec{\boldsymbol{v}} \equiv (0, 0, -v)$, *verticale e diretta verso il basso. La velocità del treno rispetto a terra è* $\vec{\boldsymbol{v}}^{(SR)} = (v^{(SR)}, 0, 0)$. *Pertanto, la velocità della pioggia rispetto al treno è* $\vec{\boldsymbol{v}}' = \vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{v}}^{(SR)} = (-v^{(SR)}, 0, -v)$. *L'angolo* α *che forma con la verticale è tale che* $\tan\alpha = \dfrac{v'_x}{v'_z} = \dfrac{v^{(SR)}}{v}$. *Quindi,* $v = \dfrac{v^{(SR)}}{\tan\alpha} = 21.08$ km/h.

La formica sul filo elastico (*)

(Esercizio impegnativo).

Un filo elastico, di lunghezza iniziale ℓ_0, *è ancorato ad un punto fisso ad una estremità, e viene teso sempre di più dall'altra estremità, in modo che all'istante* t *la sua lunghezza è* $\ell = \ell_0 + ut$ *(*u *costante). Una formica, inizialmente situata all'estremità ancorata del filo, cammina sul filo a velocità* v_0 *costante, rispetto al suo punto di contatto con il filo, dirigendosi verso l'altra estremità. Detta* x *la posizione della formica, misurata dall'estremità ancorata, qual è la legge oraria* $x(t)$*? Quanto tempo impiega la formica a raggiungere l'altra estremità del filo? Quanta strada deve fare?*

Soluzione

L'estremo mobile del filo, posto in posizione ℓ, *si sposta con velocità* u; *assumendo che tutte le parti di filo si allunghino in modo proporzionale, un generico punto* P *di filo in posizione* x *si deve spostare con velocità* $v_P = u \cdot \dfrac{x}{\ell}$. *Quindi la velocità della formica nel punto* x *è* $v = v_0 + v_P = v_0 + u \cdot \dfrac{x}{\ell}$. *Quindi:*

$$\begin{aligned} v &= v_0 + u \cdot \frac{x}{\ell_0 + ut} \\ (\ell_0 + ut)v &= (\ell_0 + ut)v_0 + ux \end{aligned}$$

Derivando entrambi i membri, e ricordando che $\dfrac{dx}{dt} = v$,

$$\begin{aligned}
uv + (\ell_0 + ut)\frac{dv}{dt} &= uv_0 + uv \\
\frac{dv}{dt} &= \frac{uv_0}{\ell_0 + ut} \\
dv &= uv_0 \frac{dt}{\ell_0 + ut} \\
v - v_0 = \int_{v_0}^{v} dv' &= v_0 \int_0^t dt' \, \frac{u}{\ell_0 + ut} = v_0 \ln\left(\frac{\ell_0 + ut}{\ell_0}\right) \\
v &= v_0 \left[1 + \ln\left(\frac{\ell_0 + ut}{\ell_0}\right)\right]
\end{aligned}$$

Dall'equazione iniziale:

$$x = (\ell_0 + ut)\frac{v - v_0}{u} = (\ell_0 + ut)\,\frac{v_0}{u}\,\ln\left(\frac{\ell_0 + ut}{\ell_0}\right)$$

La formica raggiunge l'altra estremità quando $x = \ell$, *ovvero:*

$$\begin{aligned}
\frac{u}{v_0} &= \ln\left(\frac{\ell_0 + ut}{\ell_0}\right) \\
\ell_0 + ut &= \ell_0\, \mathrm{e}^{(u/v_0)} \\
t &= \frac{\ell_0}{u}\left(\mathrm{e}^{(u/v_0)} - 1\right)
\end{aligned}$$

Lo spazio totale percorso è ovviamente ℓ, *che al tempo* t *vale:*

$$\ell = \ell_0 + ut = \ell_0\, \mathrm{e}^{(u/v_0)}$$

Osservazioni. *Anzitutto, la formica arriva sempre in fondo: non importa quanto grande sia* u *rispetto a* v_0. *Ovviamente, se* $u \gg v_0$ *il tempo e lo spazio percorsi crescono esponenzialmente! Viceversa, nel limite* $u \to 0$ *(il filo è quasi costante) si può approssimare* $\mathrm{e}^{(u/v_0)} \simeq 1 + \dfrac{u}{v_0}$, *cosicché il tempo diventa* $t \simeq \dfrac{\ell_0}{v_0}$ *e* $\ell = \ell_0\left(1 + \dfrac{u}{v_0}\right)$.

16.2.3 L'aberrazione stellare

L'aberrazione stellare è un fenomeno noto dal 1728, quando l'astronomo James Bradley si accorse che la posizione angolare di tutte le stelle nel cielo sembra descrivere, nel tempo di un anno, una piccola ellisse di diametro angolare $\sim (40.5)''$ (secondi d'arco). Si noti: non è un movimento apparente

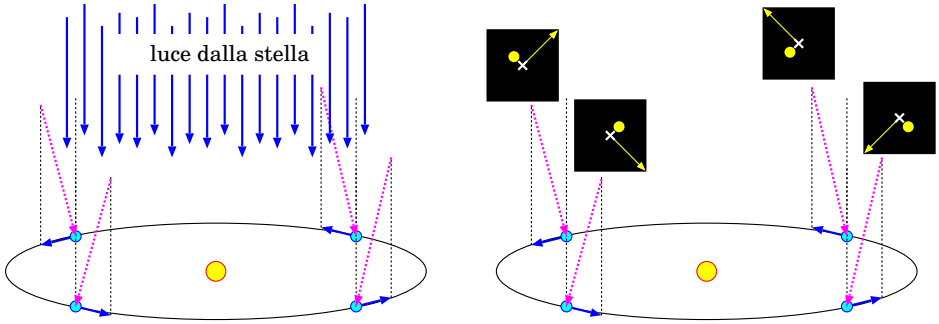


Figura 16.2: *Spiegazione dell'aberrazione stellare. A sinistra: la luce proveniente da una stella lontana arriva perpendicolare al piano orbitale della Terra (frecce blu); a causa del moto intorno al Sole, la stessa luce appare obliqua (frecce viola). A destra: i riquadri neri indicano la posizione vera della stella (crocette bianche), la posizione apparente (pallini gialli), e la direzione del Sole (frecce gialle). In tutti i casi si nota che lo spostamento apparente della stella è sempre a 90° dalla direzione del Sole: questo significa che l'effetto non può essere dovuto a parallasse.*

di stelle vicine su uno sfondo di stelle lontane: è comune a *tutte* le stelle — dunque non è parallasse (vd Sezione 4.7.4).

Il fenomeno è spiegato considerando che la Terra si muove intorno al Sole con una velocità di circa $v^{(SR)} \simeq 29.8$ km/s. Immaginiamo una stella che si trova in direzione ortogonale al piano dell'orbita terrestre (vd Fig. 16.2): definiamo un SR $(O; x, y, z)$ in cui il piano orbitale stia su $(O; x, y)$ e la stella lungo l'asse z. I raggi di luce della stella raggiungono la Terra con velocità $\vec{\boldsymbol{v}} = -c\,\hat{\boldsymbol{z}}$ La Terra ad un certo istante si muove con velocità orbitale $\vec{\boldsymbol{v}}^{(SR)} = v^{(SR)}\,\hat{\boldsymbol{x}}$ pertanto la velocità della luce dalla stella viene vista come

$$\vec{\boldsymbol{v}}' \;=\; \vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{v}}^{(SR)} \;\equiv\; \left(-v^{(SR)}, 0, -c\right)$$

e quindi appare deviata di un angolo α pari a

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v'_x}{v'_z}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{v^{(SR)}}{c}\right)$$

Dopo 6 mesi, la Terra ha invertito il suo moto, pertanto si muove con velocità $\vec{\boldsymbol{v}}^{(SR)} = -v^{(SR)}\,\hat{\boldsymbol{x}}$ e quindi l'angolo di deviazione diventa $-\alpha$. Quindi l'angolo di aberrazione è 2α. Se proviamo a calcolarlo, con $v^{(SR)} = 29.8$ km/s e $c = 3 \cdot 10^5$ km/s, si ottiene

$$2\alpha = 0.0001987 \text{ rad} = 41''$$

dunque in buon accordo con le osservazioni di Bradley [2].

16.3 SR in moto traslatorio rettilineo uniforme

16.3.1 Trasformazioni di Galileo

Consideriamo un caso particolare: il SR $(O'; x', y', z')$ si muove di moto traslatorio rettilineo uniforme con velocità costante $\vec{\boldsymbol{v}}^{(SR)}$ rispetto al SR $(O; x, y, z)$. Possiamo anche assumere che all'istante $t = 0$ le due origini coincidano: $O' \equiv O$. In tal caso il vettore $\vec{\boldsymbol{r}}^{(SR)}$ è semplicemente:

$$\vec{\boldsymbol{r}}^{(SR)} = \vec{\boldsymbol{v}}^{(SR)}\, t \qquad \text{(trasformazioni di Galileo)} \tag{16.13}$$

Quindi la trasformazione delle coordinate è:

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}' + \vec{\boldsymbol{v}}^{(SR)}\, t \qquad \text{(trasformazioni di Galileo)} \tag{16.14}$$

e quella per le velocità:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}' + \vec{\boldsymbol{v}}^{(SR)} \qquad \text{(trasformazioni di Galileo)} \tag{16.15}$$

Le accelerazioni infine appaiono uguali nei due SR:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{a}}' \qquad \text{(trasformazioni di Galileo)} \tag{16.16}$$

Le trasformazioni viste finora — Eq. (16.14), Eq. (16.15), e Eq. (16.16) — si chiamano *trasformazioni di Galileo*.

16.3.2 Dinamica in SR in moto relativo rettilineo uniforme

Il risultato $\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{a}}'$, per due SR in moto relativo rettilineo uniforme, è di notevole importanza.

---

[2] Per completezza, vale la pena ricordare che la velocità della luce, c, deve essere *assoluta*, ovvero uguale in qualunque SR. Possiamo valutare qual è l'impatto sull'angolo di aberrazione. Basti considerare che la velocità della luce proveniente dalla stella deve essere pari a c anche se vista dalla Terra, però apparirà inclinata di un angolo α. In questo caso, $v^{(SR)}$ e c costituiscono cateto e ipotenusa di un triangolo rettangolo — prima erano i due cateti — pertanto il calcolo dà $\alpha = \sin^{-1}\left(\dfrac{v^{(SR)}}{c}\right)$. Essendo $v^{(SR)} \ll c$, la correzione relativa è molto piccola, dell'ordine di $0.5 \cdot 10^{-4}$ — provare per credere.

Consideriamo un punto P di massa m_P soggetto a un sistema di forze di risultante $\vec{\boldsymbol{F}}_P$. Nel SR $(O; x, y, z)$, l'osservatore misura una accelerazione $\vec{\boldsymbol{a}}_P$ e pertanto deduce che la risultante delle forze è:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_P = m_P \vec{\boldsymbol{a}}_P$$

Allora, in qualunque SR $(O'; x', y', z')$ che si muova di moto rettilineo uniforme rispetto a $(O; x, y, z)$, essendo $\vec{\boldsymbol{a}}' = \vec{\boldsymbol{a}}$, si deve osservare:

$$m_P \vec{\boldsymbol{a}}'_P = \vec{\boldsymbol{F}}_P$$

ovvero, la legge di Newton sarà ancora verificata, assumendo *lo stesso sistema di forze.*

È per questo che, negli esempi [2] e [3] fatti nella Sezione 16.1, gli osservatori posti sull'auto e sulla nave potevano rilevare con esperimenti le stesse leggi del moto rilevabili a terra.

Ma c'è di più. Supponiamo che nel SR $(O; x, y, z)$ siamo in grado di caratterizzare e calcolare tutte le forze agenti su P, cosicché si possa scrivere

$$\vec{\boldsymbol{F}}_P = \sum_k \vec{\boldsymbol{F}}_k^{fis}$$

in cui ciascuna $\vec{\boldsymbol{F}}_k^{fis}$ sia calcolabile da principi fisici (per esempio da interazioni gravitazionali o elettromagnetiche con altri oggetti noti, oppure da forze elastiche, tensioni, reazioni vincolari, ...). Allora, questo calcolo consente di predire il moto di P, sia nel SR $(O; x, y, z)$, che in qualunque SR $(O'; x', y', z')$ che si muova di moto rettilineo uniforme rispetto a $(O; x, y, z)$.

16.3.3 Principio di relatività

Quanto visto alla fine della sezione precedente, si suole enunciare così: "*le leggi della dinamica sono invarianti, per cambiamenti di sistemi di riferimento che siano dotati di moto relativo rettilineo uniforme*". Questo enunciato è il *principio di relatività.*

Si può anche formulare l'enunciato equivalente: "*basandosi su esperimenti dinamici, è impossibile distinguere due sistemi di riferimento che si muovano di moto relativo rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro*".

Questo principio è strettamente collegato alla "legge di inerzia". Se un punto materiale P appare in moto rettilineo uniforme con velocità $\vec{\boldsymbol{w}}$ in un SR $(O; x, y, z)$, esso può essere visto in quiete in un SR $(O'; x', y', z')$ che si muove con la stessa velocità uniforme $\vec{\boldsymbol{w}}$ rispetto a $(O; x, y, z)$. Poiché, per

il principio di relatività, i due SR sono del tutto equivalenti, di conseguenza il moto rettilineo uniforme è equivalente ad uno stato di quiete: la differenza fra i due stati è solo una questione di scelta di SR.

16.4 Dinamica in SR in moto traslatorio accelerato

Ora affrontiamo la dinamica in SR in moto relativo traslatorio *accelerato*.

Ciascun osservatore, nel proprio SR $(O; \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$ oppure $(O'; \hat{\boldsymbol{x}}', \hat{\boldsymbol{y}}', \hat{\boldsymbol{z}}')$, può misurare l'accelerazione di un oggetto P, quindi può "definire" la forza totale agente su un oggetto P usando la seconda legge di Newton:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_P = m_P \vec{\boldsymbol{a}}_P \quad ; \quad \vec{\boldsymbol{F}}'_P = m_P \vec{\boldsymbol{a}}'_P$$

Siccome sappiamo come si trasformano le accelerazioni fra i due SR — vd Eq. (16.11):

$$\vec{\boldsymbol{a}}_P = \vec{\boldsymbol{a}}'_P + \vec{\boldsymbol{a}}^{(SR)}$$

ricaviamo subito che

$$\vec{\boldsymbol{F}}_P = \vec{\boldsymbol{F}}'_P + m_P \vec{\boldsymbol{a}}^{(SR)} \tag{16.17}$$

Supponiamo che nel SR $(O; x, y, z)$ siamo in grado di calcolare da principi fisici tutte le forze $\vec{\boldsymbol{F}}_k^{fis}$ agenti su P:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_P = \sum_k \vec{\boldsymbol{F}}_k^{fis}$$

Allora, mentre nel SR O la legge del moto di P diventa semplicemente

$$m_P \vec{\boldsymbol{a}}_P = m_P \frac{d^2 \vec{\boldsymbol{r}}_P}{dt^2} = \sum_k \vec{\boldsymbol{F}}_k^{fis}$$

nel SR O' essa prende la forma:

$$m_P \vec{\boldsymbol{a}}'_P = m_P \frac{d^2 \vec{\boldsymbol{r}}'_P}{dt^2} = \sum_k \vec{\boldsymbol{F}}_k^{fis} \underbrace{- m_P \vec{\boldsymbol{a}}^{(SR)}}_{\text{fittizia}} \tag{16.18}$$

È comparso un termine in più, $-m_P \vec{\boldsymbol{a}}^{(SR)}$, che non è spiegabile con azioni "fisiche": per questo spesso lo si chiama "forza fittizia". Esso dipende dalla massa m_P dell'oggetto e dall'accelerazione $\vec{\boldsymbol{a}}^{(SR)}$ del SR O' rispetto al SR O.

Possiamo renderci conto del motivo di $-m_P\vec{\boldsymbol{a}}^{(SR)}$. Supponiamo che non ci siano forze "fisiche", $\sum_k \vec{\boldsymbol{F}}_k^{fis} = 0$, quindi nel SR O non c'è accelerazione, e P si muove di moto rettilineo uniforme. Questa situazione, vista nel SR O', appare molto diversa: l'oggetto P manterrebbe la sua velocità, ma il SR accelera, per esempio diventando più veloce, e per confronto l'oggetto P appare più lento. Potremmo anche dire che P non è soggetto a forze fisiche, quindi segue la legge di inerzia, e l'accelerazione del SR O' non lo può distogliere da questa condizione, perché non viene da una forza direttamente applicata a P. Quindi l'effetto fittizio dell'accelerazione di O', che appare come una forza, si chiama anche "forza di inerzia".

16.4.1 Esercizi sulle forze fittizie

Si potrebbe pensare di risolvere sempre i problemi di dinamica in SR non accelerati, cosicché da non avere mai a che fare con le forze fittizie... In realtà, in molti casi conviene lavorare nel SR accelerato: la forza fittizia non è difficile da calcolare — è banalmente $-m\vec{\boldsymbol{a}}^{(SR)}$ — come possiamo vedere nei seguenti esempi.

Esercizio 16.6. *Una persona di massa $m = 73$ kg si trova in un ascensore, con i piedi su una bilancia. L'ascensore, inizialmente fermo, parte verso l'alto, impiega 2 s per raggiungere la sua velocità $v_{fin} = 5$ m/s, con accelerazione costante. Quanto "pesa" la persona: (i) prima della partenza, (ii) durante l'accelerazione, (iii) quando l'ascensore ha raggiunto la velocità finale? Inoltre: (iv) come si modifica la risposta a (ii) se l'ascensore parte verso il basso?*

Risposta. *Sulla persona agisce una forza fisica, la gravità, pertanto $F^{fis} = -mg$ — l'orientamento per convenzione è positivo se verso l'alto. Quindi:*

(i) *Il peso della persona ad ascensore fermo è ovviamente $F^{(i)}_{peso} = F^{fis} = -mg = -715.8$ N — negativo perché diretto verso il basso.*

(ii) *Quando l'ascensore parte verso l'alto, assume un'accelerazione costante $a^{(SR)} = \dfrac{v_{fin} - v_{in}}{\Delta t} = \dfrac{5 \text{ m/s}}{2 \text{ s}} = 2.5 \text{ m/s}^2$, verso l'alto. Pertanto sulla persona agisce anche una forza fittizia $-ma^{(SR)} = -182.5$ N — anch'essa diretta verso il basso. Il "peso" della persona — cioè la forza totale su di essa — è $F^{(ii)}_{peso} = F^{fis} - ma^{(SR)} = -898.3$ N. Essa è sempre diretta verso il basso, ma in valore assoluto è maggiore che nel caso precedente, quindi la persona in ascensore ha la sensazione di pesare di più. L'avrete notato sicuramente anche voi...*

(iii) *Quando l'ascensore ha finito di accelerare, è in moto a velocità v_{fin}, ma questo non ha importanza. Ciò che conta qui, è che $a^{(SR)} = 0$, quindi non*

ci sono forze fittizie. Di nuovo quindi il peso è $F^{(iii)}_{peso} = F^{fis} = -mg = -715.8$ N.

(iv) *Se l'ascensore va verso il basso, la velocità finale e la sua accelerazione in partenza cambiano segno. In particolare* $a^{(SR)} = -2.5$ m/s^2. *Quindi la forza fittizia ora è* $-ma^{(SR)} = +182.5$ N, *questa volta diretta verso l'alto. Il peso della persona quindi diventa* $F^{(iv)}_{peso} = F^{fis} - ma^{(SR)} = -533.3$ N. *La persona si sente più leggera.*

Esercizio 16.7. *Un treno frena con decelerazione costante, passando da* $v_0 = 100$ km/h *a fermo in* $\Delta t = 10$ s. *Su un tavolino del treno è appoggiato un bicchiere pieno a metà di acqua. Di quanti gradi si inclina la superficie dell'acqua durante la frenata?*

Risposta. *Sull'acqua agisce la forza di gravità, che è una forza fisica. Su ogni elementino di massa* δm *di acqua, quindi agisce una forza verticale* $\delta F^{fis}_z = -\delta m\, g$.

L'accelerazione del treno (negativa, perché frena) è $a^{(SR)} = \dfrac{v_{fin} - v_0}{\Delta t} = \dfrac{-27.78 \text{ m/s}}{10 \text{ s}} = -2.778 \text{ m/s}^2$. *Nel SR del treno quindi esiste anche una forza fittizia, orizzontale, che sull'elementino* δm *vale* $\delta F^{fitt}_x = -\delta m\, a^{(SR)}$. *Quindi la forza totale agente sull'elementino di acqua è (in coordinate cartesiane)* $\delta \vec{\boldsymbol{F}}' \equiv \delta m\,(-a^{(SR)}, 0, -g)$. *L'angolo* α *formato da tale forza rispetto alla verticale è tale che* $\tan\alpha = \dfrac{\delta F'_x}{\delta F'_z} = \dfrac{-a^{(SR)}}{g} = \dfrac{2.778 \text{ m/s}^2}{9.806 \text{ m/s}^2} = 0.2833$. *Quindi* $\alpha = 0.276$ rad $= 15.8°$.

Poiché la superficie dell'acqua si dispone sempre perpendicolare alla forza agente su di essa, l'angolo α *trovato è anche quello formato dalla superficie rispetto al piano orizzontale.*

Esercizio 16.8.

Un aereo che viaggia alla velocità $v = 800$ km/h *deve descrivere una curva di raggio* $\rho = 3.5$ km. *Di che angolo deve inclinare il piano delle ali? Trattare il caso sia nel SR dell'aria che in quello dell'aereo. Se, durante la virata, un passeggero ha posto un bicchiere pieno d'acqua sul tavolino, l'acqua si rovescia?*

Risposta. *Consideriamo la Fig. 16.3. Sull'aereo agiscono 2 forze: la forza-peso,* $\vec{\boldsymbol{F}}_g = -mg\hat{\boldsymbol{z}}$, *e la "portanza"* $\vec{\boldsymbol{F}}_p$, *data dalla spinta dell'aria sotto le ali, che è sempre ortogonale al piano delle ali:* $\vec{\boldsymbol{F}}_p = F_p\hat{\boldsymbol{n}}$, *essendo* $\hat{\boldsymbol{n}}$ *il versore ortogonale al piano delle ali e diretto verso l'alto. Quando l'aereo procede in linea retta, forza-peso e portanza si bilanciano:* $\vec{\boldsymbol{F}}_g + \vec{\boldsymbol{F}}_p = 0$, *quindi* $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{z}}$.

Quando l'aereo curva, la risultante di forza-peso e portanza deve produrre una forza centripeta: $\vec{\boldsymbol{F}}_g + \vec{\boldsymbol{F}}_p = -m\dfrac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}$, *essendo* $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ *il versore del raggio di curvatura. Possiamo separare le forze nelle loro componenti verticale (v) e orizzontale (h). Le componenti della portanza sono:*

$$\vec{\boldsymbol{F}}_p \;=\; F_{p,v}\hat{\boldsymbol{z}} \;+\; F_{p,h}\hat{\boldsymbol{\rho}} \;=\; F_p\,(\cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{z}} + \sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{\rho}})$$

Figura 16.3: *Esercizio dell'aereo in curva. A sinistra, la portanza* $\vec{\boldsymbol{F}}_p$ *bilancia esattamente la forza-peso* $\vec{\boldsymbol{F}}_g$*. A destra, la risultante di portanza e forza-peso produce l'accelerazione centripeta necessaria a far curvare l'aereo:* $\vec{\boldsymbol{F}}_g + \vec{\boldsymbol{F}}_p = -m\dfrac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}$.

Quindi l'equazione per la risultante delle forze si scrive:

$$\begin{aligned} -mg + F_p \cos\alpha &= 0 \\ F_p \sin\alpha &= -m\frac{v^2}{\rho} \end{aligned}$$

da cui:

$$\tan\alpha = -\frac{v^2}{g\rho}$$

Il segno $-$ *indica che* $\hat{\boldsymbol{n}}$ *è "piegato" verso l'interno della curva. Convertendo le quantità in S.I.,* $v = 222.22$ m/s *e* $\rho = 3500$ m*. Si ottiene dunque* $\tan\alpha = 1.439$*, ovvero* $\alpha = 0.963$ rad $= 52.2°$.

Possiamo risolvere il problema anche nel SR dell'aereo: si tratta ovviamente di un sistema accelerato, con $\vec{\boldsymbol{a}}^{(SR)} = -\dfrac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}$*, pertanto sull'aereo agiscono la forza-peso* $\vec{\boldsymbol{F}}_g = -mg\hat{\boldsymbol{z}}$*, la portanza* $\vec{\boldsymbol{F}}_p = F_p(\cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{z}} + \sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{\rho}})$*, e una forza fittizia* $\vec{\boldsymbol{F}}_{fitt} = -m\vec{\boldsymbol{a}}^{(SR)} = +m\dfrac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}$*. L'aereo è ovviamente fermo, nel proprio SR, pertanto la risultante delle forze deve essere nulla:*

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{F}}_g + \vec{\boldsymbol{F}}_p + \vec{\boldsymbol{F}}_{fitt} &= 0 \\ \textit{(ovvero)} & \\ -mg + F_p\,\cos\alpha &= 0 \\ F_p\,\sin\alpha + m\frac{v^2}{\rho} &= 0 \end{aligned}$$

Le equazioni e la soluzione sono ovviamente identiche a quanto trovato prima.

L'ultima domanda si risolve bene nel SR dell'aereo. La risultante delle forze "esterne", agenti su un qualunque oggetto di massa m_0 presente sull'aereo, è

$$\vec{\boldsymbol{F}}_0^{est} \;=\; -m_0 g\hat{\boldsymbol{z}} + m_0\frac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} \;=\; -m_0\left(g\hat{\boldsymbol{z}} - \frac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}\right)$$

Abbiamo visto anche che la portanza deve essere

$$\vec{\boldsymbol{F}}_p \;=\; F_p\hat{\boldsymbol{n}} \;=\; m\left(g\hat{\boldsymbol{z}} - \frac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}\right)$$

Per confronto, $\hat{\boldsymbol{n}}$ ha orientamento opposto a $\vec{\boldsymbol{F}}_0^{est}$, quindi il tavolino è perpendicolare a $\vec{\boldsymbol{F}}_0^{est}$. La superficie dell'acqua si dispone sempre perpendicolare a $\vec{\boldsymbol{F}}_0^{est}$, quindi rimane parallela al tavolino, e non si rovescia.

16.5 Dinamica in sistemi di riferimento rotanti

Ora consideriamo una situazione in cui gli assi del SR $(O'; \hat{\boldsymbol{x}}', \hat{\boldsymbol{y}}', \hat{\boldsymbol{z}}')$ ruotano rispetto al SR $(O; \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$, con velocità angolare $\vec{\boldsymbol{\omega}}$. Per semplicità, supponiamo che $O \equiv O'$, come in Fig. 16.4, cosicché le due origini coincidano, e non ci sia nessun moto traslatorio relativo fra i due SR.

16.5.1 Derivata di un vettore in un SR rotante

Consideriamo un qualunque vettore $\vec{\boldsymbol{A}}$. Scomponiamolo nelle sue componenti cartesiane rispetto al SR "fisso" $(O; \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$:

$$\vec{\boldsymbol{A}} \;=\; A_x\hat{\boldsymbol{x}} \;+\; A_y\hat{\boldsymbol{y}} \;+\; A_z\hat{\boldsymbol{z}} \tag{16.19}$$

e rispetto al SR rotante $(O; \hat{\boldsymbol{x}}', \hat{\boldsymbol{y}}', \hat{\boldsymbol{z}}')$:

$$\vec{\boldsymbol{A}} \;=\; A'_x\hat{\boldsymbol{x}}' \;+\; A'_y\hat{\boldsymbol{y}}' \;+\; A'_z\hat{\boldsymbol{z}}' \tag{16.20}$$

Analizziamo come questo vettore evolve nel tempo.

Nel SR fisso, i versori $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$ sono costanti, mentre possono cambiare solo le componenti cartesiane A_x, A_y, A_z. Pertanto, derivando l'Eq. (16.19), si trova:

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{A}}}{dt} \;=\; \frac{dA_x}{dt}\hat{\boldsymbol{x}} \;+\; \frac{dA_y}{dt}\hat{\boldsymbol{y}} \;+\; \frac{dA_z}{dt}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{16.21}$$

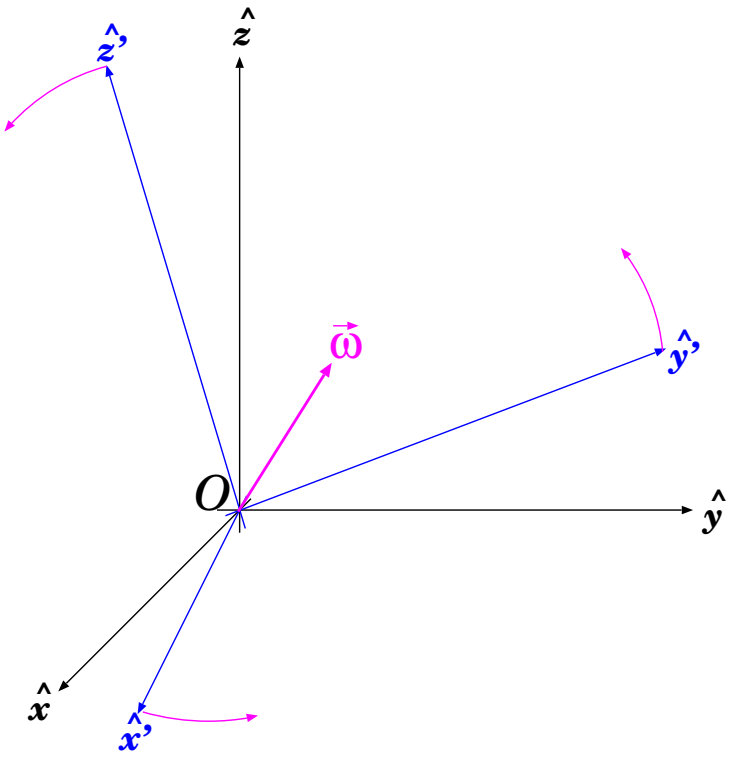


Figura 16.4: *Due sistemi di riferimento,* $(O; \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$ *e* $(O'; \hat{\boldsymbol{x}}', \hat{\boldsymbol{y}}', \hat{\boldsymbol{z}}')$*, con origine comune* $(O \equiv O')$*, che ruotano l'uno rispetto all'altro, con velocità angolare* $\vec{\boldsymbol{\omega}}$*.*

Nel SR rotante dobbiamo considerare anche la variazione dei versori $\hat{\boldsymbol{x}}'$, $\hat{\boldsymbol{y}}'$, $\hat{\boldsymbol{z}}'$, pertanto:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\boldsymbol{A}}}{dt} &= \frac{dA'_x}{dt}\hat{\boldsymbol{x}}' + \frac{dA'_y}{dt}\hat{\boldsymbol{y}}' + \frac{dA'_z}{dt}\hat{\boldsymbol{z}}' \\ &\quad + A'_x\frac{d\hat{\boldsymbol{x}}'}{dt} + A'_y\frac{d\hat{\boldsymbol{y}}'}{dt} + A'_z\frac{d\hat{\boldsymbol{z}}'}{dt} \end{aligned} \tag{16.22}$$

Tuttavia, un osservatore solidale con il SR rotante considera i versori $\hat{\boldsymbol{x}}'$, $\hat{\boldsymbol{y}}'$, $\hat{\boldsymbol{z}}'$ costanti, e quindi "vede" solo le variazioni di A'_x, A'_y, A'_z. Pertanto scriverà la derivata di $\vec{\boldsymbol{A}}$ solo come:

$$\left(\frac{d\vec{\boldsymbol{A}}}{dt}\right)' \equiv \frac{dA'_x}{dt}\hat{\boldsymbol{x}}' + \frac{dA'_y}{dt}\hat{\boldsymbol{y}}' + \frac{dA'_z}{dt}\hat{\boldsymbol{z}}' \tag{16.23}$$

Le derivate dei versori $\hat{\boldsymbol{x}}'$, $\hat{\boldsymbol{y}}'$, $\hat{\boldsymbol{z}}'$ sono esprimibile secondo l'Eq. (7.46)

(Sezione 7.6.5):

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\boldsymbol{x}}'}{dt} &= \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{x}}' \\ \frac{d\hat{\boldsymbol{y}}'}{dt} &= \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{y}}' \\ \frac{d\hat{\boldsymbol{z}}'}{dt} &= \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{z}}' \end{aligned} \tag{16.24}$$

pertanto

$$\begin{aligned} A'_x \frac{d\hat{\boldsymbol{x}}'}{dt} + A'_y \frac{d\hat{\boldsymbol{y}}'}{dt} + A'_z \frac{d\hat{\boldsymbol{z}}'}{dt} &= A'_x \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{x}}' + A'_y \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{y}}' + A'_z \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{z}}' \\ &= \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{A}} \end{aligned}$$

Quindi l'Eq. (16.22) si può scrivere come:

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{A}}}{dt} = \left(\frac{d\vec{\boldsymbol{A}}}{dt} \right)' + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{A}} \tag{16.25}$$

16.5.2 Trasformazione delle velocità

Poiché i due SR hanno origini coincidenti, il vettore-posizione di un generico punto P è lo stesso nei due SR. Cambiano solo le componenti cartesiane:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{r}} &= x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}} && \text{rispetto a } (O; \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}) \\ \vec{\boldsymbol{r}} &= x'\hat{\boldsymbol{x}}' + y'\hat{\boldsymbol{y}}' + z'\hat{\boldsymbol{z}}' && \text{rispetto a } (O'; \hat{\boldsymbol{x}}', \hat{\boldsymbol{y}}', \hat{\boldsymbol{z}}') \end{aligned} \tag{16.26}$$

Per calcolare la velocità nei due SR occorre derivare rispetto al tempo. Ricordiamo che un osservatore solidale con il SR fisso definisce la velocità come:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{dx}{dt}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{dy}{dt}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{dz}{dt}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{16.27}$$

mentre l'osservatore solidale con il SR rotante definisce:

$$\vec{\boldsymbol{v}}' = \frac{dx'}{dt}\hat{\boldsymbol{x}}' + \frac{dy'}{dt}\hat{\boldsymbol{y}}' + \frac{dz'}{dt}\hat{\boldsymbol{z}}' \tag{16.28}$$

Possiamo quindi applicare il risultato Eq. (16.25), e ottenere:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}' + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}} \tag{16.29}$$

Questo risultato può apparire sorprendente a prima vista. Ricordiamo l'Eq. (16.9): $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}' + \vec{\boldsymbol{v}}^{(SR)}$; se $O \equiv O'$, allora sembrerebbe che $\vec{\boldsymbol{v}}^{(SR)} = 0$, dunque perché le velocità nei due SR sono diverse? In effetti, a pensarci bene il risultato è consistente. Infatti, O' è fermo rispetto a O, ma il SR $(O; \hat{\boldsymbol{x}}', \hat{\boldsymbol{y}}', \hat{\boldsymbol{z}}')$ è dotato di moto rotatorio, perciò ogni punto Q (esclusa l'origine) che sia fermo in $(O; \hat{\boldsymbol{x}}', \hat{\boldsymbol{y}}', \hat{\boldsymbol{z}}')$ è dotato di moto rispetto al SR $(O; \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$. Precisamente, se la posizione di Q è $\vec{\boldsymbol{r}}_Q$, il moto di Q è dotato di velocità $\vec{\boldsymbol{v}}_Q^{(SR)} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}_Q$ relativamente a $(O; \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$. Ora, applichiamo l'Eq. (16.9) ad un oggetto P, che si trovi sovrapposto a Q e abbia velocità $\vec{\boldsymbol{v}}'_P$ rispetto a $(O'; \hat{\boldsymbol{x}}', \hat{\boldsymbol{y}}', \hat{\boldsymbol{z}}')$: nel SR $(O; \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$ la composizione delle velocità darebbe

$$\vec{\boldsymbol{v}}_P \;=\; \vec{\boldsymbol{v}}'_P + \vec{\boldsymbol{v}}_Q^{(SR)} \;=\; \vec{\boldsymbol{v}}'_P + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}_Q$$

che è precisamente quanto trovato nell'Eq. (16.29).

16.5.3 Trasformazione delle accelerazioni

Ora calcoliamo come si trasformano le accelerazioni. Ricordiamo che nel SR fisso

$$\vec{\boldsymbol{a}} \;=\; \frac{dv_x}{dt}\hat{\boldsymbol{x}} \;+\; \frac{dv_y}{dt}\hat{\boldsymbol{y}} \;+\; \frac{dv_z}{dt}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{16.30}$$

mentre nel SR rotante:

$$\vec{\boldsymbol{a}}' \;=\; \frac{dv'_x}{dt}\hat{\boldsymbol{x}}' \;+\; \frac{dv'_y}{dt}\hat{\boldsymbol{y}}' \;+\; \frac{dv'_z}{dt}\hat{\boldsymbol{z}}' \tag{16.31}$$

Derivando rispetto al tempo l'Eq. (16.29) e applicando la regola dell'Eq. (16.25) si trova:

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{a}} \;=\; \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt} \;&=\; \frac{d}{dt}\left(\vec{\boldsymbol{v}}' + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}\right) \\
&=\; \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}'}{dt} \;+\; \frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} \times \vec{\boldsymbol{r}} \;+\; \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \\
&=\; \left(\frac{d\vec{\boldsymbol{v}}'}{dt}\right)' + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}' \;+\; \frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} \times \vec{\boldsymbol{r}} \;+\; \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \left(\vec{\boldsymbol{v}}' + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}\right) \\
&=\; \left(\frac{d\vec{\boldsymbol{v}}'}{dt}\right)' \;+\; 2\,\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}' \;+\; \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \left(\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}\right) \;+\; \frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} \times \vec{\boldsymbol{r}}
\end{aligned}$$

Ricordiamo che $\vec{\boldsymbol{v}}' \equiv \left(\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}\right)'$ è la velocità come "vista" dal SR rotante, dunque non contiene derivate dei versori. Analogamente, $\left(\frac{d\vec{\boldsymbol{v}}'}{dt}\right)'$

rappresenta la derivata di $\vec{\boldsymbol{v}}'$, sempre senza considerare le derivate dei versori. Pertanto, $\left(\frac{d\vec{\boldsymbol{v}}'}{dt}\right)' \equiv \vec{\boldsymbol{a}}'$ rappresenta l'accelerazione, come osservata nel SR rotante. Quindi possiamo concludere che:

$$\vec{\boldsymbol{a}} \;=\; \vec{\boldsymbol{a}}' \;+\; \underbrace{2\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}'}_{\text{Coriolis}} \;+\; \overbrace{\underbrace{\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}})}_{\text{centrifuga}} \;+\; \frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} \times \vec{\boldsymbol{r}}}^{\text{accelerazione di trascinamento}} \tag{16.32}$$

Come fatto per le velocità, possiamo cercare di interpretare questa relazione sotto forma di un qualcosa che assomigli a $\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{a}}' + \vec{\boldsymbol{a}}^{(SR)}$: vedremo che in questo caso non è possibile. Consideriamo dunque un punto Q, fermo rispetto al SR rotante, e istantaneamente sovrapposto ad un punto P. La velocità di Q, vista rispetto al SR fisso, è $\vec{\boldsymbol{v}}_Q^{(SR)} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}_Q$, come già visto. Quindi l'accelerazione di Q è

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{a}}_Q^{(SR)} &= \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}_Q^{(SR)}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}_Q\right) \\
&= \frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} \times \vec{\boldsymbol{r}}_Q + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}_Q}{dt} \\
&= \frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} \times \vec{\boldsymbol{r}}_Q + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}_Q)
\end{aligned}$$

Potremmo dire che, localmente, il SR rotante è dotato di una accelerazione $\vec{\boldsymbol{a}}^{(SR)} \equiv \vec{\boldsymbol{a}}_Q$ relativa al SR fisso. Quindi ci si aspetterebbe che

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{a}} &= \vec{\boldsymbol{a}}' + \vec{\boldsymbol{a}}_Q^{(SR)} \\
&= \vec{\boldsymbol{a}}' + \frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} \times \vec{\boldsymbol{r}}_Q + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}_Q) \qquad \text{(sbagliato)}
\end{aligned}$$

ma come si vede, quest'ultima scrittura è incompleta: se confrontata con l'Eq. (16.32), essa descrive solo l'accelerazione "di trascinamento", dovuta all'accelerazione *locale* del SR rotante, ma manca l'accelerazione di Coriolis, $-2\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}'$. Quest'ultima rappresenta dunque un termine "nuovo".

16.5.4 Forze fittizie in sistemi rotanti

Consideriamo quanto trovato in termini di forze fittizie. Assumiamo che nel SR $(O; \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$ l'accelerazione osservata su un oggetto P sia completamente spiegabile con il calcolo delle forze fisiche $\vec{\boldsymbol{F}}_P^{fis}$ agenti su di esso:

$$m_P \vec{\boldsymbol{a}}_P \;=\; \vec{\boldsymbol{F}}_P^{fis}$$

e riscriviamo l'Eq. (16.32) esplicitando $\vec{\boldsymbol{a}}'$.

La forza vista nel SR $(O; \hat{\boldsymbol{x}}', \hat{\boldsymbol{y}}', \hat{\boldsymbol{z}}')$ risulta:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{F}}'_P &= m_P \vec{\boldsymbol{a}}'_P = m_P \left[\vec{\boldsymbol{a}} - 2\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}'_P - \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}'_P)\right] \\ &= \vec{\boldsymbol{F}}_P^{fis} \overbrace{\underbrace{-2m_P\,\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}'_P}_{\text{Coriolis}} \underbrace{-m_P\,\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}_P)}_{\text{centrifuga}} -m_P \frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} \times \vec{\boldsymbol{r}}_P}^{\text{forze fittizie}} \end{aligned} \tag{16.33}$$

Anche nel caso di SR rotante, compaiono "forze fittizie".

Il termine dipendente da $\dfrac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt}$ esiste solo in presenza di accelerazioni angolari — in caso di velocità angolare costante, è ovviamente nullo.

Analizziamo il termine "centrifugo". È utile scomporre la posizione $\vec{\boldsymbol{r}}'$ in due componenti, parallela e perpendicolare all'asse di rotazione — quindi a $\vec{\boldsymbol{\omega}}$: $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_\parallel + \vec{\boldsymbol{r}}_\perp$. Nel prodotto vettoriale $(\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}})$, $\vec{\boldsymbol{r}}_\parallel$ non dà contributo. Inoltre, ricordando l'identità vettoriale $\vec{\boldsymbol{A}} \times (\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{C}}) = \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{C}}) - \vec{\boldsymbol{C}}(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}})$, otteniamo

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}) = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}_\perp) = -\omega^2\, \vec{\boldsymbol{r}}_\perp$$

quindi la forza centrifuga vale:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{P,centrif} = m_P\, \omega^2\, \vec{\boldsymbol{r}}_{P,\perp} \tag{16.34}$$

Come si vede, è diretta perpendicolarmente all'asse di rotazione e tende ad allontanare da esso — da cui il nome "centrifuga".

Il termine

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{P,Coriolis} = -2\, m_P\, \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}'_P \tag{16.35}$$

si chiama "forza fittizia di Coriolis". Essa si manifesta solo quando l'oggetto P è in moto nel SR $(O; \hat{\boldsymbol{x}}', \hat{\boldsymbol{y}}', \hat{\boldsymbol{z}}')$, ed è diretta perpendicolarmente a $\vec{\boldsymbol{v}}'_P$, dunque non produce variazione della velocità scalare, ma solo della direzione del moto.

16.5.5 Le centrifughe

La forza centrifuga è largamente utilizzata in molte applicazioni pratiche. Qualunque oggetto, posto in un contenitore in rapida rotazione intorno ad un asse con velocità angolare ω, è soggetto ad una forza centrifuga che tende

ad allontanarlo dall'asse di rotazione: $F_{centrif} = m\omega^2\rho$, essendo ρ la sua distanza dall'asse di rotazione.

Questi apparati si chiamano "centrifughe".

L'esempio ovvio è la centrifuga della lavatrice. Dopo il lavaggio, il tamburo della lavatrice viene posto in rapida rotazione (circa 1000 giri al minuto) cosicché l'acqua che impregna i panni è soggetta alla forza centrifuga che la "tira" verso l'esterno, cioè verso la superficie del tamburo, che è bucherellata in modo da fare uscire l'acqua.

La centrifuga è anche usata in chimica e in biologia per separare le componenti di una sospensione. Una sospensione è formata da un miscuglio di sostanze immerse in un liquido. Lasciata a riposo, le varie sostanze tendono a separarsi, con le più leggere che vanno a galla e le più pesanti che precipitano verso il fondo: è un effetto della gravità, naturalmente. Per accelerare la separazione, si può imprimere un'accelerazione maggiore di quella gravitazionale, e ancora una volta si ricorre alle centrifughe. Le sospensioni vengono messe in provette che poi vengono appese a supporti montati su un asse centrale. Il sistema viene messo in rapida rotazione e la forza centrifuga produce la separazione.

Esempi di centrifuga

Una moderna lavatrice ha un tamburo di raggio 25 cm *che può compiere 1200 giri al minuto: quanto vale l'accelerazione centrifuga? In modo analogo, si calcoli l'accelerazione centrifuga per una centrifuga per esami ematici: può compiere 6000 giri al minuto; le provette, durante la rotazione, si dispongono orizzontalmente, con il fondo a una distanza di* 10 cm *dall'asse. I valori ottenuti sono grandi o piccoli? Per rendersi conto, vengono paragonati all'accelerazione di gravità media alla superficie terrestre:* $g = 9.806$ m/s^2.

Risposta. *In entrambi i casi, si calcola* $a^{centrif} = \omega^2\rho$.

Per la lavatrice: $\omega = 2\pi\dfrac{1200\ giri}{60\ \text{s}} = 125.67$ rad/s. *Pertanto,* $a^{centrip} = 3948$ m/s$^2 = 403\,g$. *Decisamente potente!*

Per la centrifuga ematica: $\omega = 2\pi\dfrac{6000\ giri}{60\ \text{s}} = 628.32$ rad/s. *Pertanto,* $a^{centrip} = 39480$ m/s$^2 = 4030\,g$. *Quindi 10 volte più forte che per la lavatrice.*

16.6 Forze fittizie e sistemi inerziali

Riassumendo: se riferiamo i moti ad un SR che è accelerato e/o rotante — con accelerazione $\vec{\boldsymbol{a}}^{(SR)}$ e velocità angolare $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ — su una massa m si manifesta una *forza fittizia totale* [3]:

[3] Per semplicità qui omettiamo gli apicetti ($'$): le quantità cinematiche sono tutte riferite al SR accelerato e/o rotante.

$$\vec{\boldsymbol{F}}^{\text{fitt}} = -m\left[\vec{\boldsymbol{a}}^{(SR)} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}) + \frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} \times \vec{\boldsymbol{r}} + 2\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}\right] \tag{16.36}$$

Se sull'oggetto agiscono forze "fisiche" $\vec{\boldsymbol{F}}_i^{fis}$, la forza totale osservata nel SR accelerato e/o rotante è:

$$\vec{\boldsymbol{F}}^{tot} = \sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i^{fis} + \vec{\boldsymbol{F}}^{\text{fitt}} \tag{16.37}$$

In generale, si presume che tutte le forze "fisiche" $\vec{\boldsymbol{F}}_i^{fis}$ presenti possano essere attribuite a cause evidenti, vale a dire a interazioni note con altri oggetti esistenti. L'unica forza che fa eccezione a questo è la forza fittizia, $\vec{\boldsymbol{F}}^{\text{fitt}}$. Quando questa distinzione è effettivamente possibile, allora ha senso dare la seguente definizione:

Un SR si dice "inerziale" se in esso non sono presenti forze fittizie.

Spesso nei testi si trova la definizione (equivalente):

Un SR si dice "inerziale" se in esso vale la legge di inerzia di Galileo.

Identificazione delle forze fittizie

Identificare le forze fittizie, per uno sperimentatore che non sa se il suo SR sia o meno inerziale, non è sempre banale. Nel caso di sistemi rotanti è più facile: studiando moti vari si può individuare la forza di Coriolis, sempre proporzionale alla massa, presente solo per oggetti in moto, e con la peculiare struttura $-2m\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\boldsymbol{v}}$. *Da essa si può dedurre* $\vec{\boldsymbol{\omega}}$. *Poi, "mappando" il sistema di forze in più punti si può individuare l'asse di rotazione, come quello per cui esiste un "campo di forza centrifuga"* $m\omega^2\vec{\boldsymbol{\rho}}$.

Individuare la forza fittizia $-m\vec{\boldsymbol{a}}^{(SR)}$, *dovuta ad un'eventuale accelerazione del SR, è più difficile, perché essa dà luogo ad un campo di forza uniforme e proporzionale alla massa, esattamente come la forza-peso,* $m\vec{\boldsymbol{g}}$, *quindi sperimentalmente non separabile. Solo avendo un'informazione indipendente del valore di* $\vec{\boldsymbol{g}}$ *si può ricavare* $\vec{\boldsymbol{a}}^{(SR)}$.

16.7 Gravità e forze fittizie

Si può notare che tutte le forze fittizie sono proporzionali alla massa m, vedi Eq. (16.36). Questa caratteristica è dovuta al fatto che le trasformazioni fra SR coinvolgono le accelerazioni.

Tuttavia, c'è in natura una forza che è intrinsecamente proporzionale alla massa su cui agisce: la *forza di gravità*. Un oggetto di massa m è soggetto agli effetti gravitazionali di tutti gli oggetti massivi m_k circostanti:

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{F}}_g &= \sum_k \left[-\frac{G m_k m}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k|^3} (\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k) \right] \\ &= m \left[-G \sum_k \frac{m_k}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k|^3} (\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k) \right] \\ &\equiv m\, \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\end{aligned}$$

essendo $\vec{\boldsymbol{g}} \equiv \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ il *campo gravitazionale*.

Se le uniche forze fisiche sulla massa m fossero solo quelle gravitazionali, allora la forza totale sarebbe:

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{F}} &= \vec{\boldsymbol{F}}_g + \vec{\boldsymbol{F}}^{\text{fitt}} \\ &= m \left[\quad \vec{\boldsymbol{g}} - \vec{\boldsymbol{a}}^{(SR)} - \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}) - 2\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}} \quad \right]\end{aligned} \tag{16.38}$$

Per un osservatore, localmente, non sarebbe possibile distinguere con esperimenti la componente gravitazionale da quelle fittizie, salvo per la forza di Coriolis, che è l'unica che dipende dalla velocità $\vec{\boldsymbol{v}}$ dell'oggetto. Quindi si potrebbero riassorbire le altre forze fittizie in una ridefinizione del campo gravitazionale:

$$\vec{\boldsymbol{g}}^{\text{eff}} = \vec{\boldsymbol{g}} - \vec{\boldsymbol{a}}^{(SR)} - \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}) \tag{16.39}$$

e l'Eq. (16.38) diventerebbe semplicemente:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = m \left(\vec{\boldsymbol{g}}^{\text{eff}} - 2\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}} \right) \tag{16.40}$$

Superficie dell'acqua in rotazione

Immaginiamo di avere un secchio contenente acqua, inizialmente in quiete: la superficie dell'acqua è ovviamente orizzontale. Ora mettiamo il secchio in rotazione, attorno al suo asse, con velocità angolare ω. Pian piano l'acqua si mette a ruotare, seguendo il moto del secchio, e dopo un transiente ruoterà uniformemente, con velocità angolare ω, attorno all'asse di rotazione del secchio. A questo punto la superficie dell'acqua non sarà più orizzontale, bensì concava: la forza centrifuga tende a portare l'acqua più vicina al bordo del secchio. Qual è la forma della superficie?

Risposta. *Ogni elementino di acqua, di massa δm, è soggetto alla forza-peso $\delta\vec{\boldsymbol{F}}_g = -\delta m\, g\hat{\boldsymbol{z}}$, e alla forza centrifuga, $\delta\vec{\boldsymbol{F}}_c = \delta m\, \omega^2\vec{\boldsymbol{\rho}}$ — essendo $\vec{\boldsymbol{\rho}} \equiv (x, y, 0)$ il vettore orizzontale che va dall'asse di rotazione alla massa δm. Quindi abbiamo un campo efficace*

$$\vec{\boldsymbol{g}}^{\mathit{eff}} \;=\; -g\hat{\boldsymbol{z}} + \omega^2\vec{\boldsymbol{\rho}} \;\equiv\; \left(\omega^2 x, \omega^2 y, -g\right)$$

È facile verificare che, se introduciamo un potenziale efficace

$$\Phi^{\mathit{eff}} \;=\; gz - \frac{\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

esso descrive il campo, nel senso che $\vec{\boldsymbol{g}}^{\mathit{eff}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\Phi^{\mathit{eff}}$.

La superficie dell'acqua deve essere tale che su di essa Φ^{eff} è costante:

$$gz - \frac{\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) \;=\; k$$

ovvero

$$z \;=\; \frac{\omega^2}{2g}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{k}{g}$$

Quindi si tratta di un paraboloide di rotazione, con la concavità verso l'alto.

16.7.1 Caduta libera

Si suole pensare che nello spazio gli astronauti "galleggino" perché privi di peso. Forse avrete visto i filmati degli astronauti a bordo della ISS (International Space Station), che fluttuano nell'aria, fanno volteggiare biro, goccioline d'acqua e altri oggetti... Eppure, loro sono in orbita intorno alla Terra: quindi *la gravità c'è!* Altrimenti la ISS con tutto l'equipaggio se ne partirebbe per la tangente e si disperderebbe nello spazio siderale. Quindi, perché gli astronauti "galleggiano"?

Questo fenomeno si chiama "caduta libera". La ISS (o qualunque astronave che segue una traiettoria sotto l'influenza di campi gravitazionali) è soggetta a un campo gravitazionale $\vec{\boldsymbol{g}}$. Quindi costituisce un SR accelerato, precisamente con $\vec{\boldsymbol{a}}^{(SR)} = \vec{\boldsymbol{g}}$. Trascurando la rotazione dell'astronave (di solito lenta!), l'Eq. (16.38) ci dice che $\vec{\boldsymbol{F}} = m(\vec{\boldsymbol{g}} - \vec{\boldsymbol{a}}^{(SR)}) = 0$: gli astronauti sentono una forza totale *nulla*. Possiamo anche usare l'Eq. (16.39), che ci dice che il campo gravitazionale efficace è nullo: $\vec{\boldsymbol{g}}^{\mathrm{eff}} = 0$.

A parole, potremmo dire che astronave e astronauti "cadono" con la stessa accelerazione, pertanto gli astronauti non se ne accorgono. Naturalmente per "cadere" non intendiamo che precipitano sulla Terra! Ma che le loro traiettorie deviano da quella rettilinea.

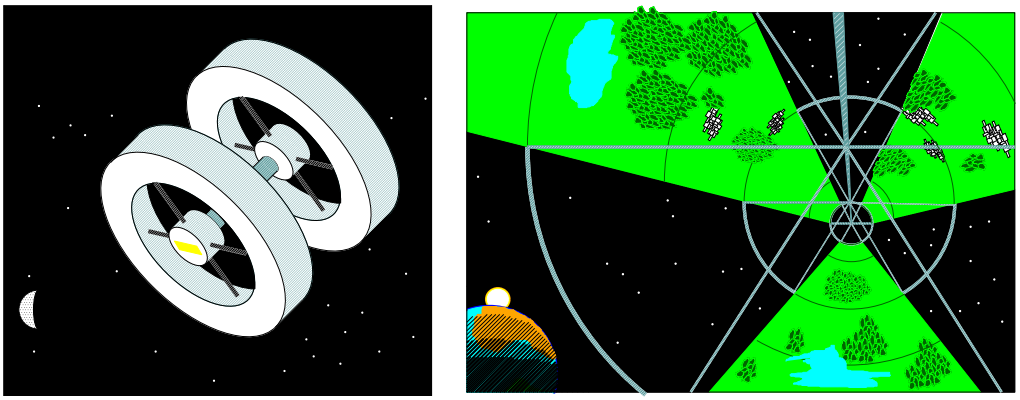


Figura 16.5: *Due esempi di ipotetiche stazioni spaziali rotanti: a sinistra, una stazione orbitale simile a quella di* "2001, Odissea nello Spazio" *(romanzo di A.C.Clarke, film di S.Kubrick); a destra, il* cilindro di O'Neill, *in cui tutto il volume del cilindro costituisce un habitat, con atmosfera e clima, e la superficie interna fa da terreno, per coltivazioni e abitazioni. In entrambi i casi, la forza centrifuga prodotta dalla rotazione genera un effetto di gravità artificiale.*

16.7.2 Gravità artificiale

In numerosi romanzi e/o film di fantascienza, sono presenti astronavi o stazioni spaziali dotate di gravità artificiale. Un modo relativamente semplice per generare una gravità artificiale è quello di porre l'astronave — o una parte di essa — in rotazione (vd Fig. 16.5). Si produce una forza centrifuga, diretta lontano dall'asse di rotazione, che emula la gravità. Finché equipaggio e oggetti sono solidali con la rotazione dell'astronave, hanno velocità nulla rispetto ad essa, quindi non sentono accelerazioni di Coriolis. Naturalmente, qualora si mettessero a fare salti... avrebbero più difficoltà ad atterrare nel posto voluto.

Esempio: una stazione spaziale rotante

Immaginiamo una stazione spaziale costituita da un cilindro rotante con velocità angolare ω. Gli ambienti abitabili sono formati da diversi "gusci" cilindrici concentrici. Nel guscio più esterno si vuole realizzare una gravità artificiale pari a $g^{art} = 0.5\,g$ (essendo per riferimento $g = 9.806$ m/s^2 l'accelerazione di gravità alla superficie terrestre). Inoltre, si vuole che nel guscio più esterno un essere umano (altezza entro i 2 m) senta una differenza di gravità (artificiale!) fra la sua testa e i suoi piedi non superiore del 5%. Quanto devono valere ω e la distanza ρ_{est} del pavimento del guscio più esterno dall'asse di rotazione? Come cambiano g^{art} e la differenza percentuale testa-piedi a una distanza dimezzata dall'asse di rotazione?

Risposta. *Ad una generica distanza ρ dall'asse di rotazione, la gravità artificiale vale $g^{art} = \omega^2\rho$. Il valore voluto di g^{art} ci impone solo una relazione fra ρ e ω — si potrebbe ingenuamente pensare di realizzare una stazione piccola e farla ruotare in fretta, ma il buon senso ci suggerisce che i poveri astronauti potrebbero avere un po' di "sickness". Questa è la ragione della seconda richiesta. Chiamando $h = 2$ m la distanza massima testa-piedi (ovviamente un po' sovrastimata...), la differenza relativa della gravità artificiale è $\dfrac{\Delta g^{art}}{g^{art}} = \dfrac{\omega^2\rho - \omega^2(\rho - h)}{\omega^2\rho} = \dfrac{h}{\rho}$. Questa relazione già ci impone che $\dfrac{h}{\rho_{est}} \leq 5\%$ — prendiamo l'uguaglianza e troviamo $\rho_{est} = \dfrac{h}{0.05} = 40$ m. Ora determiniamo ω: $g^{art}_{est} = \omega^2\rho_{est} = 0.5\,g$ quindi $\omega = \sqrt{\dfrac{0.5\,g}{\rho_{est}}} = 0.35$ rad/s. Il periodo di rotazione è $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 17.95$ s.*

A distanza dimezzata, $\rho = \dfrac{\rho_{est}}{2}$, ovviamente $g^{art} = \dfrac{g^{art}_{est}}{2} = 0.025\,g$ e $\dfrac{\Delta g^{art}}{g^{art}} = \dfrac{h}{\rho} = 2\dfrac{h}{\rho_{est}} = 10\%$.

Esempio: il cilindro di O'Neill

Il "cilindro di O'Neill" è un'idea di habitat spaziale cilindrico, proposto da G.K.O'Neill (fisico all'Università di Princeton) nel 1969, che deve essere sufficientemente grande da ospitare una società autonoma in un ecosistema autosufficiente. Per questo c'è bisogno di un volume di aria sufficiente per gli abitanti e l'agricoltura. Le dimensioni proposte erano 30 km di lunghezza e 3 km di raggio. Per simulare una gravità pari a quella terrestre, quanto devono valere ω e T? Per mezzi di trasporto che si muovono sulla superficie (interna) del cilindro, con velocità inferiori a 50 km/h, quanto vale al massimo l'accelerazione di Coriolis? Può influenzare significativamente i moti sulla superficie abitata?

Risposta. *Si vuole che $\omega^2\rho = g$, con $g = 9.806$ m/s^2 e $\rho = 3$ km. Il risultato è $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\rho}} = 0.05717$ rad/s. Il periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 109.905$ s $= 1^{\text{min}}49^{\text{s}}90''$.*

L'accelerazione di Coriolis, in modulo, è $a_{Coriolis} = |2\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}| \leq 2\omega v_{max}$. Questa va confrontata con l'accelerazione centrifuga $a_{centrif} = \omega^2\rho$. In generale, perché l'accelerazione di Coriolis sia trascurabile, occorre che $a_{Coriolis} \ll a_{centrif}$, ovvero che $v_{max} \ll \dfrac{\omega\rho}{2}$. Con i nostri parametri, $\dfrac{\omega\rho}{2} \simeq 85.75$ m/s $= 308.7$ km/h. Quindi per $v_{max} = 50$ km/h abbiamo che $a_{Coriolis} < \dfrac{v_{max}}{\omega\rho/2} a_{centrif} = 0.162\,a_{centrif}$. Non è proprio trascurabile: in termini di forza può arrivare fino a circa il 16% del peso! Tuttavia, $\vec{\boldsymbol{F}}_{Coriolis} = -2m\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$. Se il moto è sulla superficie abitata, scomponiamo $\vec{\boldsymbol{v}}$ in una componente $\vec{\boldsymbol{v}}_{\parallel}$ parallela all'asse del cilindro, e una $\vec{\boldsymbol{v}}_{\perp}$ ad essa perpendicolare, e troviamo $\vec{\boldsymbol{F}}_{Coriolis} = -2m\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}_{\perp}$: quindi $\vec{\boldsymbol{F}}_{Coriolis}$ è sempre diretta radialmente. Non avendo componenti parallele alla superficie,

non sottopone il moto superficiale a deviazioni. Il suo effetto è di "aumentare o diminuire il peso" a seconda che il moto sia concorde o discorde rispetto alla rotazione del cilindro.

16.8 Moti sulla superficie della Terra

Come è noto, la Terra *non è un sistema inerziale*: essa infatti ruota intorno al suo asse, con un periodo $T = 23^h 56^{min}$ [4]. Quindi la velocità angolare è $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 7.29211 \cdot 10^{-5}$ rad/s. Ci aspettiamo quindi forze fittizie, precisamente centrifughe e di Coriolis.

Conviene adottare un SR [5] in cui l'origine O è sulla superficie terrestre, vicino al luogo dove ci troviamo; orientiamo gli assi in modo che $\hat{\boldsymbol{z}}$ punti verso l'alto ("zenith") e $\hat{\boldsymbol{y}}$ sia orizzontale, lungo il meridiano locale e diretto verso il Nord geografico; per conseguenza $\hat{\boldsymbol{x}}$ sarà orizzontale, lungo il parallelo locale e diretto verso Est. Questo SR è schematizzato in Fig. 16.6.

Chiamiamo λ la *latitudine*, ovvero la distanza angolare dall'equatore [6].

Il vettore velocità angolare, per componenti cartesiane è:

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \cos\lambda \\ \omega \sin\lambda \end{pmatrix} \tag{16.41}$$

Inoltre, l'asse di rotazione passa per il centro della Terra, non per l'origine O che abbiamo scelto. Rispetto al centro della Terra, O è posizionata in $R\hat{\boldsymbol{z}}$, essendo R la distanza dal centro della Terra. Quindi, nell'Eq. (16.33), occorre sostituire

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{r}}' &\to R\hat{\boldsymbol{z}} + \vec{\boldsymbol{r}} \\ &\simeq R\hat{\boldsymbol{z}} \end{aligned}$$

(l'approssimazione è motivata assumendo che gli spostamenti locali $\vec{\boldsymbol{r}}$ rispetto a O siano piccoli rispetto al raggio medio della Terra $R = 6\,370$ km).

[4] Stupiti? Non erano 24 ore? Allora: effettivamente da un mezzogiorno al successivo passano 24 ore. Però in quel lasso di tempo la Terra si è anche mossa lungo la sua orbita intorno al Sole, quindi da un mezzogiorno al successivo la linea Sole-Terra è un po' cambiata, di un angolo $2\pi \dfrac{1 \text{ giorno}}{365.25 \text{ giorni}}$. In un anno (365.25 giorni) la Terra compie un giro intero intorno al Sole, quindi compie $365.25 + 1$ giri su sé stessa. Quindi il periodo di rotazione della Terra è $T = \dfrac{365.25 \text{ giorni}}{366.25 \text{ giri}} = 0.9973 \text{ giorni} = 23.93$ h.

[5] Siccome qui useremo solo il sistema solidale con la Terra, ometteremo gli apicetti $'$.

[6] Ovviamente λ è complementare all'angolo polare, misurato dal polo Nord: $\lambda + \theta = \dfrac{\pi}{2}$.

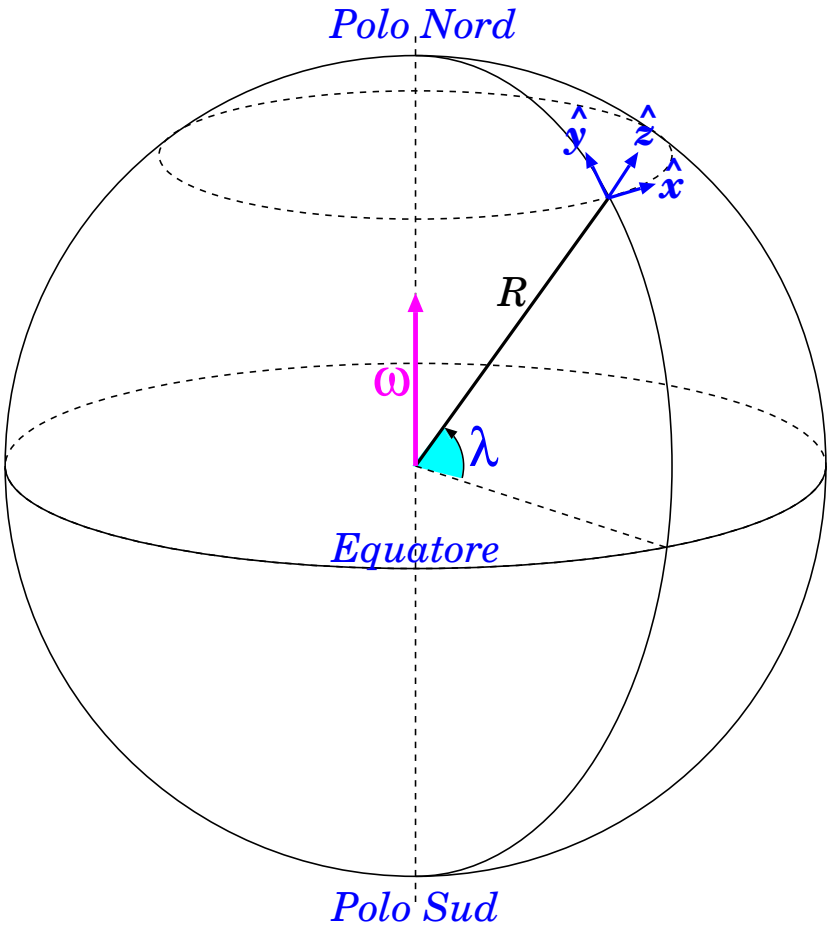


Figura 16.6: *Sistema di riferimento per lo studio dei moti alla superficie terrestre.*

16.8.1 Forze centrifughe, ridefinizione della verticale, campo gravitazionale efficace

Un oggetto di massa m fermo rispetto alla Terra è soggetto alla forza di gravità:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_g = -mg\hat{\boldsymbol{z}} \tag{16.42}$$

e alla forza centrifuga:

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{F}}_{centrif} &= -m\,\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}') \\
&= -m\,\vec{\boldsymbol{\omega}}(\vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \vec{\boldsymbol{r}}') \;+\; m\,\omega^2\vec{\boldsymbol{r}}' \\
&\simeq -m\,\left(R\vec{\boldsymbol{\omega}}(\vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}}) - \omega^2 R\hat{\boldsymbol{z}}\right)
\end{aligned}$$

Ora, $\vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = \omega \sin\lambda$, e ricordando l'Eq. (16.41), la forza centrifuga sulla massa m in componenti cartesiane è:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{F}}_{centrif} &= m\,\omega^2 R \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\lambda\,\cos\lambda \\ 1-\sin^2\lambda \end{pmatrix} \\ &= m\,\omega^2 R \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}\sin(2\lambda) \\ \cos^2\lambda \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{16.43}$$

Quindi la forza *totale* è:

$$\vec{\boldsymbol{F}}^{eff} = \vec{\boldsymbol{F}}_g + \vec{\boldsymbol{F}}_{centrif} = m \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{\omega^2 R}{2}\sin(2\lambda) \\ -g+\omega^2 R\cos^2\lambda \end{pmatrix} \tag{16.44}$$

Vediamo l'effetto per ciascun asse cartesiano. Anzitutto, lungo $\hat{\boldsymbol{x}}$ (direzione Ovest-Est) non c'è nessun effetto. Invece lungo $\hat{\boldsymbol{y}}$ (direzione Sud-Nord) c'è un effetto che dipende dalla latitudine λ: nell'emisfero Nord ($\lambda > 0$) la forza fittizia F_y^{eff} tira in direzione Sud, e viceversa — in ogni caso tira verso l'Equatore; inoltre l'intensità dell'effetto è massima alle latitudini $\pm 45°$, mentre si annulla ai poli ($\lambda = \pm 90°$) e all'Equatore ($\lambda = 0°$).

Infine, lungo la verticale, abbiamo come effetto un'attenuazione del peso, dato dal termine $\omega^2 R\cos^2\lambda$: l'effetto è massimo all'Equatore e nullo ai Poli.

Tutti questi effetti non sono in realtà facilmente osservabili, poiché è difficile conoscere la vera direzione di $\hat{\boldsymbol{z}}$ (cioè dov'è esattamente il centro della Terra). Pertanto, quel che si fa solitamente è definire una "verticale efficace" che punta verso $\vec{\boldsymbol{F}}^{eff}$. Qualunque strumento tipo filo a piombo la individua immediatamente. A questo punto, l'accelerazione di gravità efficace si calcola semplicemente come

$$\begin{aligned} g^{\text{eff}} &= \frac{|\vec{\boldsymbol{F}}^{eff}|}{m} = \sqrt{(g-\omega^2 R\cos^2\lambda)^2 + \left(\frac{\omega^2 R}{2}\sin(2\lambda)\right)^2} \\ &= g\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2 R}{g}\cos^2\lambda\right)^2 + \left(\frac{\omega^2 R}{2g}\sin(2\lambda)\right)^2} \end{aligned}$$

Prima di proseguire, osserviamo che $\omega^2 R \simeq 0.03$ m/s^2, mentre $g \simeq 9.8$ m/s^2 — i valori vanno considerati approssimativi, poiché R non è uguale ovunque sulla Terra. In ogni caso, essendo $\omega^2 R \ll g$, possiamo trascurare i termini $\mathcal{O}\left((\omega^2 R)^2\right)$ sotto la radice, e quindi:

$$g^{\text{eff}} \;=\; g - \omega^2 R \cos^2 \lambda \tag{16.45}$$

L'effetto è ben noto a tutti i geofisici. In effetti, all'Equatore $g^{\text{eff}} = 9.789$ m/s^2, mentre ai poli $g^{\text{eff}} = 9.823$ m/s^2.

Una osservazione: il fatto che si possano "riassorbire" gli effetti delle forze fittizie in una "ridefinizione" di g è possibile solo perché *sia le forze gravitazionali che quelle fittizie sono direttamente proporzionali alla massa m su cui agiscono.*

16.8.2 Forze di Coriolis

Ora passiamo allo studio di oggetti in moto. Questi subiscono anche le forze di Coriolis.

Facciamo alcune semplificazioni:

- come discusso nella sezione precedente, "riassorbiamo" la forza centrifuga in un campo gravitazionale efficace $\vec{\boldsymbol{g}}^{\text{eff}} = -g^{\text{eff}}\hat{\boldsymbol{z}}$ — quindi anche la verticale è ridefinita coerentemente; in questo modo l'unica forza fittizia che rimane è quella di Coriolis;
- supponiamo che il moto sia prevalentemente orizzontale: quindi ci interessano solo le coordinate x, y, le velocità $v_x \equiv \dfrac{dx}{dt}$; $v_y \equiv \dfrac{dy}{dt}$, e le accelerazioni $a_x \equiv \dfrac{dv_x}{dt}$; $a_y \equiv \dfrac{dv_y}{dt}$.

L'accelerazione di Coriolis si ricava dall'Eq. (16.32):

$$\vec{\boldsymbol{a}}^{\text{Coriolis}} \;=\; -2\,\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$$

Scritta per le componenti x, y e ricordando la scomposizione di $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, Eq. (16.41), essa diventa:

$$\begin{aligned} a_x^{\text{Coriolis}} &= -2(\omega_y v_z - \omega_z v_y) \;=\; (2\,\omega\,\sin\lambda)\;v_y \\ a_y^{\text{Coriolis}} &= -2(\omega_z v_x - \omega_x v_z) \;=\; -(2\,\omega\,\sin\lambda)\;v_x \end{aligned} \tag{16.46}$$

NOTA BENE: in generale esiste anche la componente a_z^{Coriolis}: qui non la stiamo trattando perché, come già detto, stiamo considerando moti

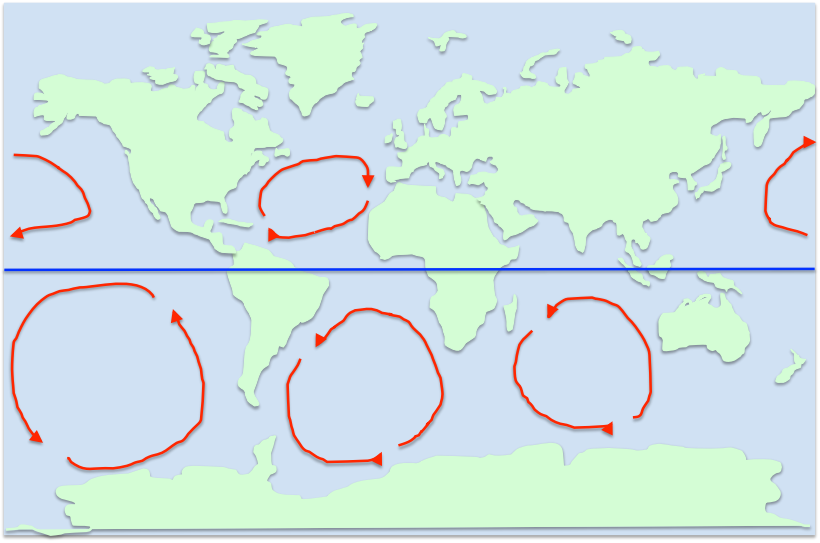


Figura 16.7: *Mappa delle principali correnti marine: per effetto della forza di Coriolis, la circolazione è in senso orario nell'emisfero Nord, antiorario nell'emisfero Sud.*

prevalentemente orizzontali. In moti verticali — tipo caduta di un oggetto da una torre — essa invece dà effetti osservabili come deviazioni dalla verticale.

Dalle Eq. (16.46) si possono fare alcune considerazioni preliminari. Anzitutto, l'effetto è minore vicino all'Equatore e più marcato alle grandi latitudini.

Inoltre, consideriamo gli orientamenti. Una corrente (aerea o marina) nell'emisfero boreale ($\lambda > 0$), se si muove verso Est ($v_x > 0$) subisce un effetto verso Sud ($a_y < 0$); questo le conferisce una componente $v_y < 0$, che le dà un'accelerazione $a_x < 0$ verso Ovest; quindi la sua velocità prima o poi si inverte e si dirige a Ovest ($v_x < 0$), subendo allora un effetto verso Nord ($a_y > 0$); quando anche la sua velocità punterà verso Nord ($v_y > 0$) subirà un'accelerazione verso Est ($a_x > 0$). L'effetto netto è che nell'emisfero Nord le correnti hanno moti in senso orario ("cicloni"). Nell'emisfero australe ($\lambda < 0$) tutti i segni cambiano, quindi le correnti hanno moti in senso anti-orario. Questo fenomeno è ben noto, ed è illustrato nella Fig. 16.7.

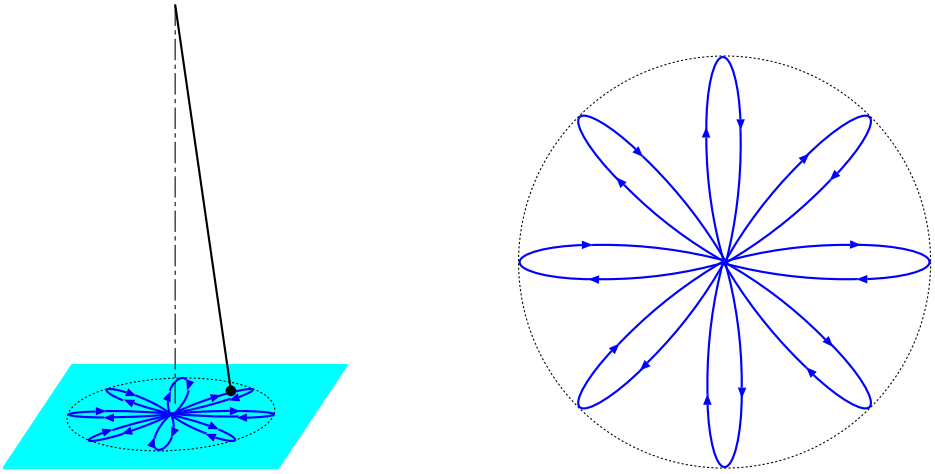


Figura 16.8: *Moto del pendolo di Foucault. La forma "a rosetta" è molto esagerata, per motivi grafici — vd esempio di calcolo nel testo.*

16.8.3 Il pendolo di Foucault

Abbiamo studiato che un pendolo semplice oscilla su un piano verticale... Quando abbiamo trattato questo problema abbiamo dato per scontato che le uniche forze agenti fossero la gravità e la tensione del filo. Quindi, implicitamente, abbiamo ammesso che il moto venisse osservato da un sistema inerziale, in cui non vi fossero forze fittizie.

Bene, sappiamo che un sistema di riferimento terrestre *non è inerziale*. In effetti, si osserva che un pendolo semplice, posto in oscillazione per un tempo abbastanza lungo, subisce una *rotazione* del piano di oscillazione, dovuta alla forza di Coriolis. Il moto della massa appesa in fondo al pendolo appare come disegnato in Fig. 16.8: non è lungo un segmento di retta, bensì descrive una "rosetta".

Precisamente, ai poli, il piano di oscillazione compie una rotazione completa in $23^h 56^{min}$!. Questo fatto è abbastanza intuitivo: il pendolo mantiene il suo piano di oscillazione invariato rispetto ad un riferimento inerziale, il pianeta Terra gli ruota sotto, quindi... All'Equatore non si osserva rotazione del piano, e anche questo è ovvio dalle Eq. (16.46): all'Equatore la forza di Coriolis si annulla.

A latitudini intermedie la velocità angolare $\omega_{Foucault}$ di rotazione del piano di oscillazione è inferiore che al polo, e precisamente vale

$$\omega_{Foucault} = -\omega \sin \lambda \tag{16.47}$$

Esempio di calcolo

Consideriamo un pendolo di Foucault, lungo $\ell = 10$ m, posto alla latitudine $\lambda = 45°$. Calcoliamo il periodo di una oscillazione T_{osc}, e il periodo $T_{Foucault}$ necessario a compiere una rotazione completa del piano di oscillazione — cioè a completare la "rosetta" della Fig. 16.8. Quante oscillazioni sono necessarie a completare la rosetta? La rosetta rappresentata nella figura è realistica?

Risposte. *Il periodo dell'oscillazione è* $T_{osc} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 6.345$ s. *Il periodo della rosetta è* $T_{Foucault} = \frac{2\pi}{\omega_{Foucault}} = \frac{2\pi}{\omega}\frac{1}{\sin\lambda}$. *Ora, ω è la velocità angolare della Terra, quindi* $\frac{2\pi}{\omega} = 23^h 56^{min} = 86160$ s, *quindi* $T_{Foucault} = 121849$ s. *Per compiere l'intera rosetta, occorrono* $\frac{121849}{6.345} = 19203$ *oscillazioni.*

Per compiere una rosetta come nella figura, sono necessari 4 periodi (attenzione: se contate i "lobi", sono 8, ma una oscillazione completa descrive 2 lobi). Dunque il disegno non è realistico: l'effetto della forza di Coriolis è esagerato!

Dimostrazione (*)

La legge della precessione di Foucault, Eq. (16.47), può essere ricavata analiticamente, con un artifizio matematico.

Anzitutto, ricordiamo che, omettendo la forza di Coriolis, le altre forze agenti sul pendolo sono la gravità, la tensione del filo, e la forza centrifuga: quest'ultima viene incorporata nella "gravità efficace" g^{eff}. L'effetto complessivo di tutte queste forze, lo sappiamo, è di creare un moto armonico con frequenza angolare Ω tale che

$$\Omega^2 = \frac{g^{\text{eff}}}{\ell}$$

Quindi, sempre omettendo la forza di Coriolis, le equazioni del moto del pendolo, sul piano orizzontale (x, y), sono:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{g^{\text{eff}}}{\ell}x \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{g^{\text{eff}}}{\ell}y \end{aligned}$$

Ora reintroduciamo anche l'accelerazione di Coriolis, Eq. (16.46):

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= (2\,\omega\,\sin\lambda)\,\frac{dy}{dt} - \frac{g^{\text{eff}}}{\ell}x \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -(2\,\omega\,\sin\lambda)\,\frac{dx}{dt} - \frac{g^{\text{eff}}}{\ell}y \end{aligned} \tag{16.48}$$

Questo è un sistema di due equazioni differenziali lineari, ciascuna di secondo ordine. In generale si può risolvere, nessun problema... Però la sua struttura peculiare:

$$\begin{aligned} a_x &\propto v_y + \dots \\ a_y &\propto -v_x + \dots \end{aligned}$$

suggerisce una scorciatoia. Compattiamo entrambe le coordinate x, y in una *coordinata complessa*:

$$\xi = x + iy$$

Ovviamente, la stessa cosa si può fare per velocità e accelerazione:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= v_x + i\,v_y \\ \frac{d^2\xi}{dt^2} &= a_x + i\,a_y \end{aligned}$$

Osserviamo poi che $-i\dfrac{d\xi}{dt} = v_y - iv_x$. Bene, allora le Eq. (16.48) possono essere scritte come:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -2\,\omega\sin\lambda\,i\,\frac{d\xi}{dt} - \frac{g}{\ell}\,\xi \tag{16.49}$$

Questa è una *singola* equazione differenziale, di secondo ordine, nella funzione incognita complessa $\xi(t)$. La soluzione si può trovare per sostituzione: si assume una forma $\xi(t) = A\mathrm{e}^{st}$, in cui A, s sono costanti complesse da determinare. Per le proprietà della funzione esponenziale, $\dfrac{d\xi}{dt} = sA\mathrm{e}^{st} = s\xi$ e analogamente $\dfrac{d^2\xi}{dt^2} = s^2A\mathrm{e}^{st} = s^2\xi$. Sostituendo nell'Eq. (16.49) si ottiene:

$$s^2\,\xi(t) = -2\,\omega\,\sin\lambda\,i\,s\,\xi(t) - \frac{g}{\ell}\,\xi(t)$$

Siccome $\xi(t)$ non si può mai annullare (è un esponenziale!), può essere eliminato dall'equazione, che diventa puramente algebrica:

$$s^2 + 2\,\omega\,\sin\lambda\,i\,s + \frac{g}{\ell} = 0$$

È un'equazione di secondo grado, le cui soluzioni sono:

$$\begin{aligned} s_\pm &= -i\,\omega\,\sin\lambda \;\pm\; \sqrt{-\left(\omega\,\sin\lambda\right)^2 - \frac{g}{\ell}} \\ &\simeq\; i\left(-\omega\sin\lambda \pm \sqrt{\frac{g}{\ell}}\right) \end{aligned}$$

(l'ultima approssimazione deriva dal fatto che per pendoli di lunghezze tipiche, $\frac{g}{\ell} \gg \omega^2$).

Ora, siccome entrambe le soluzioni $s_\pm$ sono valide, la soluzione generale dell'Eq. (16.49) è del tipo:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= A_+ \mathrm{e}^{s_+ t} + A_- \mathrm{e}^{s_- t} \\ &= \left(A_+ \mathrm{e}^{+i\sqrt{\frac{g}{\ell}}t} + A_- \mathrm{e}^{-i\sqrt{\frac{g}{\ell}}t}\right) \mathrm{e}^{-i\omega(\sin\lambda)t} \end{aligned} \tag{16.50}$$

e le costanti complesse A_+, A_- vanno determinate dalle condizioni iniziali. Assumiamo che a $t = 0$ il pendolo si trovi sulla verticale, cosicché $x(0) = 0$ e $y(0) = 0$, vale a dire $\xi(0) = 0$. Questa condizione, inserita nell'Eq. (16.50), implica che $A_+ = -A_-$. Chiamiamo $A_+ = A\mathrm{e}^{i\phi}$. La soluzione diventa quindi:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= A\mathrm{e}^{i\phi}\mathrm{e}^{-i\omega(\sin\lambda)t} \left(\mathrm{e}^{+i\sqrt{\frac{g}{\ell}}t} - \mathrm{e}^{-i\sqrt{\frac{g}{\ell}}t}\right) \\ &= 2iA\mathrm{e}^{i(\phi-\omega(\sin\lambda)t)} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right) \\ &= 2A\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2}+\phi-\omega(\sin\lambda)t\right)} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right) \end{aligned} \tag{16.51}$$

(abbiamo usato l'identità $\mathrm{e}^{i\alpha} - \mathrm{e}^{-i\alpha} = 2i\sin\alpha$). Ora ricordiamo che $x = \mathbf{Re}(\xi)$ e $y = \mathbf{Im}(\xi)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2A\,\cos\left(\frac{\pi}{2}+\phi-\omega(\sin\lambda)t\right) \sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right) \\ y(t) &= 2A\,\sin\left(\frac{\pi}{2}+\phi-\omega(\sin\lambda)t\right) \sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right) \end{aligned} \tag{16.52}$$

Osserviamo che sia $x(t)$ che $y(t)$ hanno una componente oscillante $\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right)$, come un normale pendolo. Però le ampiezze a loro volta evolvono nel tempo come:

$$\begin{aligned} x_{\max}(t) &= 2A\,\cos\left(-\omega(\sin\lambda)t + \dots\right) \\ y_{\max}(t) &= 2A\,\sin\left(-\omega(\sin\lambda)t + \dots\right) \end{aligned}$$

ovvero come le componenti x, y di un vettore che ruota nel piano (x, y) con una velocità angolare $-\omega\sin\lambda$. *Quod erat demonstrandum.*

16.8.4 Caduta di un grave da una torre

Finora abbiamo considerato moti "orizzontali" sulla superficie terrestre, ignorando quindi gli spostamenti lungo z. Ora vediamo un esempio diverso.

Consideriamo una torre verticale di altezza h — per semplicità posta all'equatore. Se lasciamo cadere una massa m dalla cima della torre, dove atterra?

Anche senza fare i conti, ci aspettiamo che cada spostata a Est rispetto alla base della torre. Infatti, immaginiamo la situazione vista da un sistema inerziale, in cui la Terra ruota con velocità angolare ω — vd Fig. 16.9 (sinistra); il raggio della Terra è R; la velocità della massa, all'inizio, è pari a quella dell'estremità della torre, dunque è $\omega(R + h)$, diretta verso Est; la velocità della base della torre è solo ωR, quindi minore della velocità della massa; in conclusione, la massa deve "precedere" la torre durante la sua caduta.

Trattazione nel sistema di riferimento inerziale

Si sarebbe tentati di ragionare (erroneamente) così: il tempo Δt di caduta dalla torre è tale che $h = \frac{g(\Delta t)^2}{2}$, quindi $\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$; la differenza di velocità fra cima e base della torre è ωh; quindi lo spostamento (rispetto alla torre) è $\Delta x' = (\omega h)\Delta t = \sqrt{\frac{2\omega^2 h^3}{g}}$.

Il problema è che, durante la caduta, l'oggetto subisce uno spostamento orizzontale x, per cui la sua posizione angolare rispetto al centro della Terra

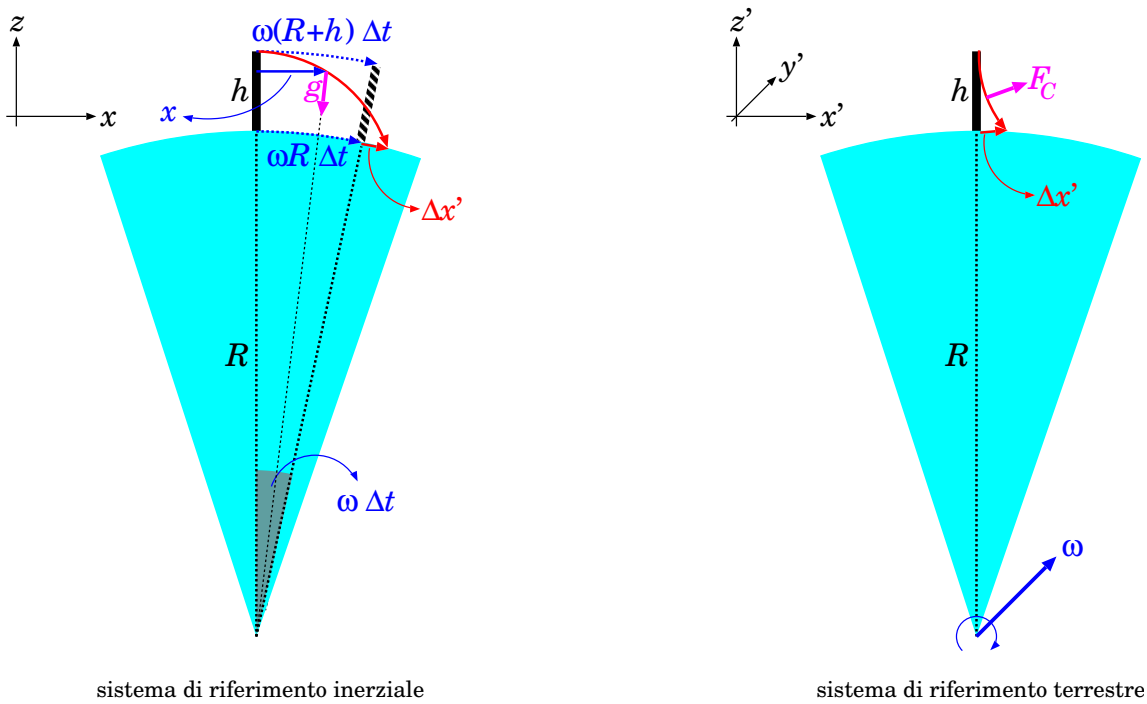


Figura 16.9: *Moto di un grave in caduta da una torre di altezza h: a sinistra, visto da un sistema inerziale; a destra, visto da un sistema co-rotante con la Terra. La Terra ha raggio R e ruota con velocità angolare ω; Δt è il tempo di caduta; $\Delta x'$ è lo spostamento del punto di caduta del grave, rispetto alla base della torre; F_C è la forza di Coriolis che appare nel sistema di riferimento terrestre.*

si modifica di una quantità $\alpha = \dfrac{x}{R+z} \simeq \dfrac{x}{R}$. Per conseguenza, anche la forza-peso diventa obliqua, acquisendo quindi due componenti:

$$\begin{aligned} F_{g,x} &= -mg\,\frac{x}{R} \\ F_{g,z} &= -mg\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2} \simeq -mg \end{aligned}$$

Quindi le equazioni del moto diventano:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{g}{R}\,x \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -g \end{aligned}$$

La seconda si integra banalmente:

$$z(t) \;=\; h - \frac{g}{2}t^2$$

Il tempo di caduta Δt si ottiene imponendo $z(\Delta t) = 0$:

$$\Delta t \;=\; \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Invece l'equazione in x descrive un moto oscillatorio armonico [7], con pulsazione $\Omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$. La soluzione generale è $x(t) = A\cos(\Omega t + \phi)$, dove A, ϕ si ricavano dalle condizioni iniziali. Imponendo $x(0) = 0$ si trova $\cos\phi = 0$, ovvero $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$. Poi, $v(t) = -A\Omega\sin(\Omega t + \phi)$; imponendo $v(0) = \omega(R+h)$ si trova $\phi = -\frac{\pi}{2}$ e $A\Omega = \omega(R+h)$. Infine, $\cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\Omega t)$. Riassumendo:

$$x(t) \;=\; A\,\sin(\Omega t) \qquad\qquad \begin{cases} \Omega \;=\; \sqrt{\frac{g}{R}} \\[2ex] A \;=\; \frac{\omega}{\Omega}(R+h) \end{cases}$$

Ora, $g \simeq 9.8$ m/s^2 e $R = 6.37 \cdot 10^6$ m, pertanto $\Omega \simeq 1.2 \cdot 10^{-3}$ rad/s; inoltre, per una torre di altezza $h = 100$ m, $t \leq \Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \simeq 4.5$ s; quindi $\Omega t \lesssim 5 \cdot 10^{-3}$. Si potrebbe pensare di approssimare $\sin(\Omega t) \simeq \Omega t$; ma facendo così descriveremmo $x(t)$ come un moto a velocità uniforme, ovvero trascureremmo la componente orizzontale dell'accelerazione, $-\frac{g}{R}x$: pertanto è necessario fare un'approssimazione migliore:

$$\sin(\Omega t) \;\simeq\; \Omega t - \frac{(\Omega t)^3}{3!} \;=\; \Omega t\left(1 - \frac{(\Omega t)^2}{6}\right)$$

Lo spostamento totale Δx alla fine della caduta è quindi:

$$\Delta x \;=\; x(\Delta t) \;=\; A\,\Omega\Delta t\left(1 - \frac{(\Omega\Delta t)^2}{6}\right)$$

[7] Attenzione: non è che l'oggetto in caduta oscilla di qua e di là dalla torre: vedremo che la pulsazione Ω è molto piccola, cosicché nel tempo dato può avere luogo solo una piccola parte del moto.

Ora, $A\Omega = \omega(R+h)$, $\Omega\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{R}}$, quindi:

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \omega(R+h)\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(1-\frac{h}{3R}\right) \\
&= \omega R\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(1+\frac{h}{R}\right)\left(1-\frac{h}{3R}\right) = \omega R\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(1+\frac{h}{R}-\frac{h}{3R}\right) \\
&\simeq \omega R\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(1+\frac{2}{3}\frac{h}{R}\right)
\end{aligned}$$

Nel frattempo, la base della torre si è spostata di $(\omega R)\Delta t$, pertanto lo spostamento della massa dalla base della torre è:

$$\begin{aligned}
\Delta x' &= \Delta x - \omega R\,\Delta t = \omega R\sqrt{\frac{2h}{g}}\,\frac{2}{3}\frac{h}{R} \\
&= \frac{\omega}{3}\sqrt{\frac{8h^3}{g}}
\end{aligned}$$

Per una torre di $h = 100$ m, gli spostamenti sono $\Delta x = 2.08$ km e $\Delta x' = 2.2$ cm.

Trattazione nel sistema di riferimento terrestre

Per quanto visto sopra, nel SR solidale con la Terra, lo spostamento orizzontale è piccolo: $x' \leq \Delta x' \approx$ cm, pertanto possiamo considerare la forza-peso come sempre verticale:

$$\begin{aligned}
F_{g,z} &= -mg \\
F_{g,x} &= 0
\end{aligned}$$

D'altra parte, essendo in un SR rotante, dobbiamo aggiungere la forza di Coriolis, $\vec{\boldsymbol{F}}_C = -2m\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}'$. Con riferimento alla Fig. 16.9 (destra), $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega\hat{\boldsymbol{y}}$, quindi, per componenti cartesiane:

$$\begin{aligned}
F_{C,z} &= -2m(\omega_x v'_y - \omega_y v'_x) = 2m\,\omega\,v'_x \\
F_{C,x} &= -2m(\omega_y v'_z - \omega_z v'_y) = -2m\,\omega\,v'_z
\end{aligned}$$

Ora le equazioni del moto diventano:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2z'}{dt^2} &= -g + 2\omega v'_x \simeq -g \\
\frac{d^2x'}{dt^2} &= -2\omega v'_z
\end{aligned}$$

L'approssimazione sulla prima equazione si può motivare così: anche senza risolvere il moto, sappiamo che $\Delta x' < \omega h \Delta t$ e quindi che $v'_x \lesssim \omega h$; quindi $2\omega v'_x \lesssim 2\omega^2 h$; per $h = 100$ m, $2\omega^2 v'_x \lesssim 10^{-6}\mathrm{m/s}^2$ — decisamente trascurabile rispetto a g.

L'equazione in z' si integra immediatamente:

$$v'_z = -gt \qquad ; \qquad z' = h - \frac{g}{2}t^2$$

cosicché anche l'equazione in x' diventa banale:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x'}{dt^2} &= 2\omega g t \\
\frac{dx'}{dt} &= \omega g t^2 \\
x'(t) &= \frac{\omega}{3} g t^3 \\
\Delta x' \equiv x'(\Delta t) &= \frac{\omega}{3} g \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} \\
&= \frac{\omega}{3}\sqrt{\frac{(2h)^3}{g}}
\end{aligned}$$

(ovviamente, uguale a quanto trovato nel sistema inerziale)

Capitolo 17

Matematica dei campi vettoriali (*)

Fino ad ora abbiamo usato più volte il concetto di "campo". Abbiamo parlato di campi di forza, di campo gravitazionale, elettrico, magnetico, ... In questo capitolo introduciamo in maniera sistematica le operazioni matematiche che si possono fare sui campi, con particolare attenzione ai campi vettoriali.

Di particolare rilevanza sono i concetti di *integrale di linea* (Sezione 17.3) e di *flusso* (Sezione 17.4, Sezione 17.5) di un campo vettoriale. L'integrale di linea di fatto l'abbiamo già introdotto parlando del lavoro di una forza (Sezione 12.1, Eq. (12.2)): qui lo generalizziamo ad un campo vettoriale qualunque. Il concetto di flusso è molto utile nella trattazione di campi gravitazionali generati da masse estese (Sezione 19.7). Entrambi (integrale di linea e flusso) diventano *necessari* e *imprescindibili* per comprendere la natura dei campi elettromagnetici.

Le ultime sezioni riguardano la definizione di operatori differenziali vettoriali agenti su campi vettoriali, e le loro relazioni con flusso e integrale di linea. Per chi fosse interessato solo al campo gravitazionale, possono essere omesse. Diventano invece fondamentali nell'elettromagnetismo.

17.1 Generalità

In fisica, si chiama *campo* una quantità che sia funzione della posizione spaziale.

In particolare, un *campo vettoriale* è una funzione della posizione spaziale a valori vettoriali — ovvero una quantità vettoriale che può variare da punto

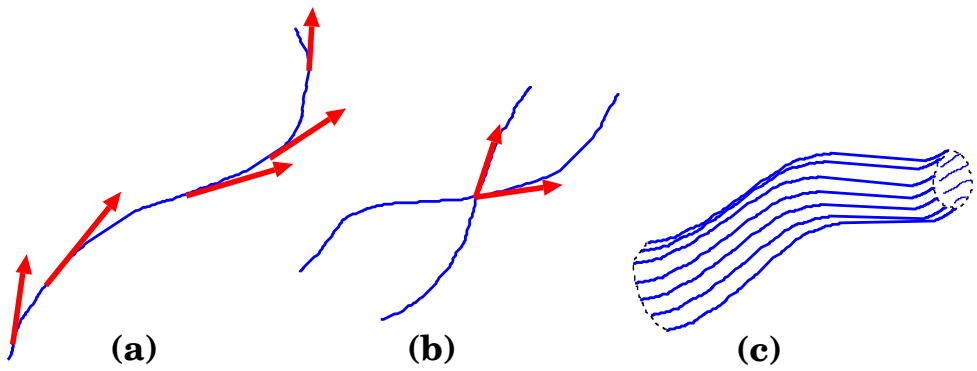


Figura 17.1: *(a) linea di campo (o di flusso); (b) l'assurdo incrocio di due linee di campo; (c) un tubo di flusso*

a punto — cioè qualcosa che può essere scritto come

$$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \qquad\qquad \text{(campo vettoriale)}$$

In molti casi, la forza $\vec{\boldsymbol{F}}$ agente su un oggetto dipende esclusivamente dalla posizione $\vec{\boldsymbol{r}}$ occupata dall'oggetto stesso: In tal caso, la funzione $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ è un *campo di forza*.

Analogamente, si definisce *campo scalare* una funzione dello spazio a valori numerici — qualcosa che si può scrivere come

$$\psi(\vec{\boldsymbol{r}}) \qquad\qquad \text{(campo scalare)}$$

Ricordiamo che le quantità scalari hanno la proprietà che non cambiano il loro valore per trasformazioni spaziali. Per esempio, il modulo di un campo vettoriale, $|\vec{\boldsymbol{A}}|$, è un campo scalare. Il prodotto scalare $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}$ fra due campi vettoriali è un campo scalare. Molte quantità fisiche (massa, pressione, temperatura,...) sono campi scalari. Ma una componente di un vettore, o una coordinata spaziale, non è uno scalare, perché viene alterata da trasformazioni spaziali.

17.2 Campi vettoriali

Un *campo vettoriale* è una funzione della posizione spaziale a valori vettoriali — ovvero una quantità vettoriale che può variare da punto a punto — cioè qualcosa che può essere scritto come $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})$.

Una *linea di campo* (o *linea di flusso*) è una linea tale che in ogni suo punto la tangente è parallela al campo vettoriale, come mostrato in Fig. 17.1(a).

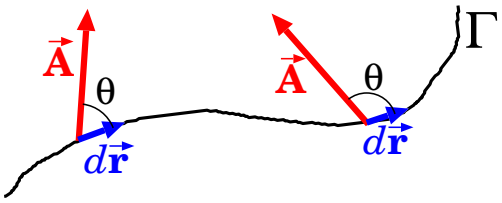


Figura 17.2: *Integrale di linea*

Due linee di campo non possono mai incrociarsi — altrimenti nel punto di incrocio avremmo due valori del campo vettoriale, con direzioni diverse, come in Fig. 17.1(b).

Un *tubo di flusso* è una regione di spazio delimitata da un insieme di linee di campo, come in Fig. 17.1(c).

17.3 Integrali di linea e circuitazione di un campo vettoriale

Data una linea orientata Γ, l'integrale di linea di un campo vettoriale $\vec{\boldsymbol{A}}$ lungo Γ è:

$$\int_\Gamma \vec{\boldsymbol{A}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int_\Gamma |\vec{\boldsymbol{A}}| ds \cos\theta$$

dove ds è un segmento infinitesimo sulla linea Γ, e θ è l'angolo fra il vettore $\vec{\boldsymbol{A}}$ e la tangente a Γ, considerando anche l'orientamento di questa, come in Fig. 17.2. Si intende che, sotto il segno di integrale, il valore di $\vec{\boldsymbol{A}}$ va calcolato nel punto dove si trova il segmento ds.

Se Γ è una linea chiusa, l'integrale si chiama *circuitazione* e si scrive:

$$\oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{A}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$$

Un campo che soddisfi la proprietà $\oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{A}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = 0$ per qualunque linea chiusa Γ è detto *irrotazionale*.

Integrale di linea e circuitazione sono operazioni lineari, cioè

$$\int (a\vec{\boldsymbol{A}} + b\vec{\boldsymbol{B}}) \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = a \int \vec{\boldsymbol{A}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} + b \int \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$$

17.4 Superfici orientate, definizione di flusso

Una porzione infinitesimale di superficie $d\Sigma$ può essere orientata, lungo la direzione ad essa perpendicolare. Introducendo il versore perpendicolare $\hat{\boldsymbol{n}}$,

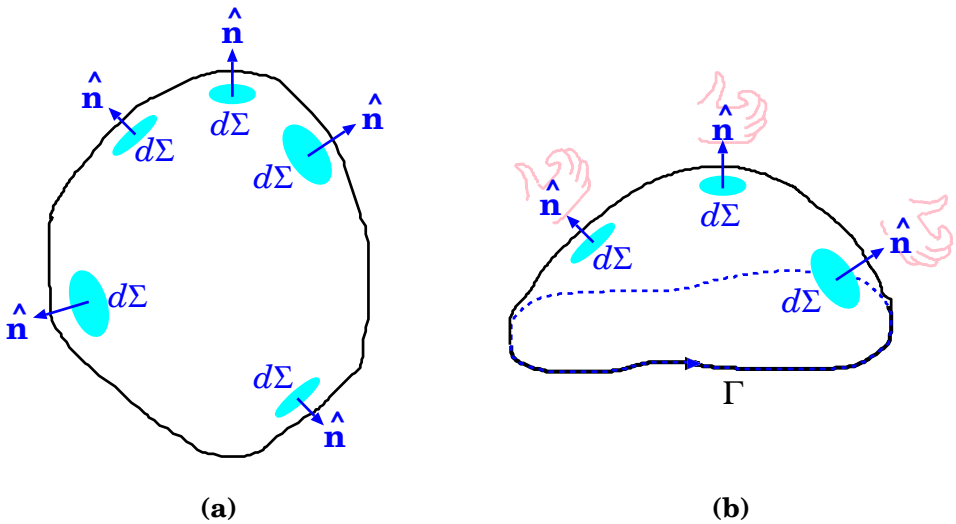


Figura 17.3: *Esempi di superfici orientate: in ogni punto si definisce un versore $\hat{\boldsymbol{n}}$ ortogonale alla superficie. A sinistra: superficie chiusa, con $\hat{\boldsymbol{n}}$ diretto verso l'esterno. A destra: superficie "concatenata" ad una linea chiusa orientata Γ; l'orientamento della superficie è definito con la "regola della mano destra".*

chiamiamo

$$d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} = \hat{\boldsymbol{n}}\, d\Sigma$$

l'elemento di superficie orientato. Una superficie estesa Σ può essere pensata come composta da tante superfici infinitesime $d\Sigma$, ciascuna orientata secondo il versore normale $\hat{\boldsymbol{n}}$, come in Fig. 17.3). L'orientamento della superficie deve essere "continuo", cioè $\hat{\boldsymbol{n}}$ non deve passare da una parte all'altra mentre ci si sposta lungo la superficie stessa.

Per convenzione, le superfici chiuse (Fig. 17.3(a)) sono sempre orientate verso l'esterno. Viceversa, le superfici aperte (Fig. 17.3(b)) sono delimitate da una linea chiusa, il *bordo*, che denotiamo con Γ (spesso anche denotata con $\partial\Sigma$). Se diamo un orientamento a Γ, l'orientamento convenzionale di $d\Sigma$ è quello della "regola della mano destra": se si mette la mano destra con le dita che seguono l'orientamento del bordo, il pollice dà l'orientamento della superficie. In tal caso la superficie si dice *concatenata* alla linea Γ.

Dato un campo vettoriale $\vec{\boldsymbol{A}}$ e una superficie orientata Σ, chiamiamo *flusso di $\vec{\boldsymbol{A}}$ attraverso* Σ la quantità:

$$\boldsymbol{\Phi}_\Sigma(\vec{\boldsymbol{A}}) = \int_\Sigma d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \int_\Sigma d\Sigma\, \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} \tag{17.1}$$

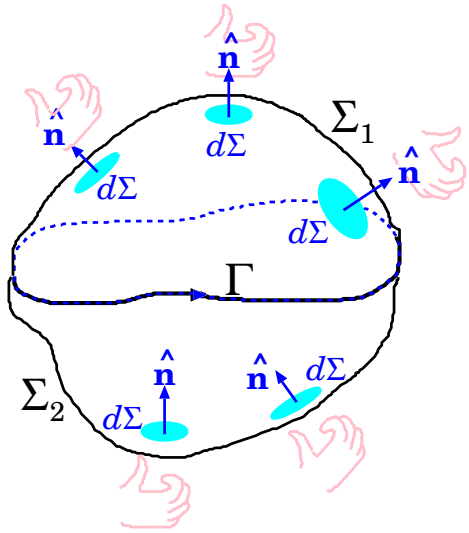


Figura 17.4: *Flusso concatenato per un campo solenoidale*

(si intende che sotto il segno di integrale, il valore di $\vec{\boldsymbol{A}}$ va calcolato nel punto dove si trova la superficie $d\Sigma$)

Ovviamente il flusso è una operazione lineare, cioè

$$\boldsymbol{\Phi}(a\vec{\boldsymbol{A}} + b\vec{\boldsymbol{B}}) = a\boldsymbol{\Phi}(\vec{\boldsymbol{A}}) + b\boldsymbol{\Phi}(\vec{\boldsymbol{A}})$$

17.5 Campi solenoidali, flusso concatenato

Un campo tale che il suo flusso attraverso una qualunque superficie chiusa è nullo si dice *solenoidale*.

Consideriamo una linea chiusa orientata Γ e un campo *solenoidale* $\vec{\boldsymbol{A}}$. Quindi scegliamo due superfici Σ_1 e Σ_2 concatenate a Γ. Allora:

$$\boldsymbol{\Phi}_{\Sigma_1}(\vec{\boldsymbol{A}}) = \boldsymbol{\Phi}_{\Sigma_2}(\vec{\boldsymbol{A}})$$

La dimostrazione segue dalla Fig. 17.4. Le due superfici Σ_1 e Σ_2 formano una superficie chiusa Σ_{ch}, ma la convenzione dell'orientamento non è rispettata: Σ_1 è orientata verso l'esterno, Σ_2 verso l'interno. Perché Σ_{ch} sia completamente orientata verso l'esterno, occorre invertire l'orientamento di Σ_2, cambiando così segno al flusso attraverso di essa:

$$0 = \boldsymbol{\Phi}_{\Sigma_{\text{ch}}}(\vec{\boldsymbol{A}}) = \boldsymbol{\Phi}_{\Sigma_1}(\vec{\boldsymbol{A}}) + \Big(-\boldsymbol{\Phi}_{\Sigma_2}(\vec{\boldsymbol{A}})\Big)$$

il che prova l'affermazione.

Abbiamo trovato che il flusso non dipende dalla scelta della superficie concatenata: l'unica cosa importante è il suo bordo Γ. Per questa ragione possiamo definire il *flusso concatenato* ad una linea chiusa orientata Γ come il flusso attraverso una qualunque superficie ad essa concatenata.

Si ricordi che tutto ciò ha senso solo per campi *solenoidali*.

17.6 Operatori differenziali vettoriali (*)

Dato un campo vettoriale $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ e un sistema di assi cartesiani $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$ nello spazio fisico 3-dimensionale, definiamo la *divergenza* di $\vec{\boldsymbol{A}}$ come:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{17.2}$$

e il *rotore* di $\vec{\boldsymbol{A}}$ come:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{z}} \tag{17.3}$$

Si noti che definendo l'operatore differenziale *nabla* come:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \equiv \hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z} \tag{17.4}$$

le strutture dell'Eq. (17.2) e dell'Eq. (17.3) sono esattamente le stesse del prodotto scalare e vettoriale.

Si può mostrare che se $\vec{\boldsymbol{A}}$ è un vettore, allora $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}$ è una quantità scalare e $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{A}}$ è una quantità pseudo-vettoriale. Se $\vec{\boldsymbol{A}}$ è uno pseudo-vettore, $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{A}}$ è un vettore e $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}$ è uno pseudo-scalare, cioè cambia segno per inversione spaziale.

Per un campo scalare ψ definiamo il *laplaciano*:

$$\nabla^2\psi = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}}\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{17.5}$$

Possiamo definire direttamente l'operatore differenziale *laplaciano*:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{17.6}$$

che risulta essere un operatore *scalare* e può essere applicato sia a campi scalari che vettoriali (ovviamente definire $\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}$ come abbiamo fatto per $\nabla^2\psi$ non avrebbe senso, perché non possiamo fare il gradiente di un campo vettoriale!)

17.6.1 Alcune proprietà degli operatori differenziali (*)

Mostriamo alcune identità molto utili:

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{A}}) &= 0 && \text{(a)} \\
\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times (\vec{\boldsymbol{\nabla}} \psi) &= 0 && \text{(b)} \\
\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times (\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{A}}) &= \vec{\boldsymbol{\nabla}}(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}) - \nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}} && \text{(c)} \\
\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\psi \vec{\boldsymbol{A}}) &= \vec{\boldsymbol{\nabla}} \psi \cdot \vec{\boldsymbol{A}} + \psi \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} && \text{(d)} \\
\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times (\psi \vec{\boldsymbol{A}}) &= \vec{\boldsymbol{\nabla}} \psi \times \vec{\boldsymbol{A}} + \psi \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{A}} && \text{(e)} \\
\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}) &= (\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{A}}) \cdot \vec{\boldsymbol{B}} - \vec{\boldsymbol{A}} \cdot (\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{B}}) && \text{(f)} \\
\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times (\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}) &= \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}) - (\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}})\vec{\boldsymbol{B}} \\
&\quad -(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}})\vec{\boldsymbol{B}} + (\vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}})\vec{\boldsymbol{A}} && \text{(g)}
\end{aligned}
\tag{17.7}
$$

Tutte queste possono essere dimostrate utilizzando le tecniche descritte in Sezione 6.9. Per comodità si può introdurre ∂_k come una notazione compatta di $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$.

17.7 Teoremi della divergenza e del rotore (*)

Nel calcolo integro-differenziale dei campi vettoriali, due teoremi giocano un ruolo assolutamente fondamentale.

- Consideriamo una regione Ω di spazio semplicemente connesso ed un campo vettoriale $\vec{\boldsymbol{A}}$ in essa definito.

- Sia V una regione di spazio, $V \subset \Omega$, e $\Sigma_{\text{ch}} \equiv \partial V$ la superficie chiusa che delimita V; allora vale il *teorema della divergenza*:

$$
\oint_{\Sigma_{\text{ch}}} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} = \int_V d^3r \, \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} \tag{17.8}
$$

- Sia Σ una qualunque superficie, $\Sigma \subset \Omega$, e $\Gamma_{\rm ch} \equiv \partial\Sigma$ la linea chiusa che la delimita; allora vale il *teorema del rotore*:

$$\oint_{\Gamma_{\rm ch}} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int_\Sigma d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{A}}\right) \tag{17.9}$$

In particolare, se $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = 0$ il campo $\vec{\boldsymbol{A}}$ è solenoidale. Se $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{A}} = 0$ il campo $\vec{\boldsymbol{A}}$ ha circuitazione nulla.

Si osservi che, nel caso del teorema del rotore, il membro di destra dell'equazione è un flusso concatenato: data una linea chiusa $\Gamma_{\rm ch}$, *qualunque* superficie Σ ad essa concatenata soddisfa il teorema. Questo è possibile perché il campo di cui si calcola il flusso, $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{A}}$, è sempre solenoidale, essendo $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{A}}\right) = 0$ (Eq. (17.7)(a)).

17.7.1 Altre relazioni integrali (*)

Dai teoremi precedenti si possono dedurre altre utili relazioni:

$$\begin{aligned} \int_\Sigma d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} \times \vec{\boldsymbol{\nabla}}\psi &= \oint_{\partial\Sigma} \psi\, d\vec{\boldsymbol{r}} && \text{(a)} \\ \int_V d^3r\, \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{A}} &= \oint_{\partial V} d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} \times \vec{\boldsymbol{A}} && \text{(b)} \end{aligned} \tag{17.10}$$

Per dimostrare l'Eq. (17.10)(a), consideriamo un campo vettoriale $\vec{\boldsymbol{w}}$ uniforme. Allora, dall'Eq. (17.7)(b), $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times (\psi\vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\psi \times \vec{\boldsymbol{w}}$. Usando il teorema del rotore troviamo:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{w}} \cdot \oint_{\partial\Sigma} \psi\, d\vec{\boldsymbol{r}} &= \oint_{\partial\Sigma} \psi\vec{\boldsymbol{w}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int_\Sigma (\vec{\boldsymbol{\nabla}}\psi \times \vec{\boldsymbol{w}}) \cdot d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} \\ &= \int_\Sigma (d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} \times \vec{\boldsymbol{\nabla}}\psi) \cdot \vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{w}} \cdot \int_\Sigma d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} \times \vec{\boldsymbol{\nabla}}\psi \end{aligned}$$

e dato che questo deve valere per qualunque $\vec{\boldsymbol{w}}$, l'Eq. (17.10)(a) è provata.

Per l'Eq. (17.10)(b), consideriamo ancora un campo vettoriale $\vec{\boldsymbol{w}}$ uniforme. Allora, dall'Eq. (17.7)(f), $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}}$. Usando il teorema della divergenza troviamo:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{w}} \cdot \oint_{\partial V} d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} \times \vec{\boldsymbol{A}} &= \oint_{\partial V} \vec{\boldsymbol{w}} \cdot (d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} \times \vec{\boldsymbol{A}}) = \oint_{\partial V} d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot (\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{w}}) \\ &= \int_V d^3r \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{w}}) = \int_V d^3r \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}} \\ &= \vec{\boldsymbol{w}} \cdot \int_V d^3r \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{A}} \end{aligned}$$

Anche qui, essendo $\vec{\boldsymbol{w}}$ del tutto generico, l'Eq. (17.10)(b) è provata.

17.7.2 Dimostrazione dei teoremi (*)

Diamo qui un'idea (non precisa) di come si possono dimostrare i teoremi della divergenza e del rotore.

Un volume V può essere suddiviso in tanti volumetti infinitesimi d^3V di forma parallelepipeda, di spigoli dx, dy, dz paralleli agli assi cartesiani. Il flusso di $\vec{\boldsymbol{A}}$ attraverso ∂V può essere scritto come la somma di tutti i flussi uscenti dalle superfici $\partial(d^3V)$ che racchiudono i volumetti: infatti, per la faccia che separa due volumetti adiacenti il flusso uscente da uno è entrante per l'altro, quindi la loro somma è nulla, e restano solo i contributi delle facce dei volumetti che non confinano con altri volumetti, cioè quelle che stanno su ∂V. Allora basta provare il teorema della divergenza per il volumetto d^3V. Se questo è centrato nel punto (x, y, z), il flusso da esso uscente è:

$$
\begin{aligned}
\oint_{\partial(d^3V)} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} &= \left[-A_x\left(x-\frac{dx}{2}, y, z\right) + A_x\left(x+\frac{dx}{2}, y, z\right)\right] dy\, dz \\
&+ \left[-A_y\left(x, y-\frac{dy}{2}, z\right) + A_y\left(x, y+\frac{dy}{2}, z\right)\right] dx\, dz \\
&+ \left[-A_z\left(x, y, z-\frac{dz}{2}\right) + A_z\left(x, y, z+\frac{dz}{2}\right)\right] dx\, dy \\
&= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz \\
&= \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\, d^3V
\end{aligned}
$$

Procediamo in modo analogo per il rotore: una superficie Σ può essere ritagliata in rettangolini infinitesimi $d^2\Sigma$. La circuitazione di $\vec{\boldsymbol{A}}$ lungo $\partial\Sigma$ può essere scritta come la somma di tutte le circuitazioni lungo i bordi $\partial(d^2\Sigma)$ che delimitano i rettangolini: infatti, per il lato in comune fra due rettangolini adiacenti, gli orientamenti sono opposti e quindi gli integrali di linea si annullano. Restano solo i lati dei rettangolini non confinanti, cioè disposti lungo $\partial\Sigma$. Anche qui allora basta dimostrare il teorema del rotore per un singolo rettangolino $d^2\Sigma$. Per comodità, orientiamo gli assi cartesiani in modo che il rettangolino sia centrato in (x, y, z) e abbia lati dx, dy paralleli

agli assi x, y. Allora $d^2\vec{\boldsymbol{\Sigma}} = (dx\,dy)\hat{\boldsymbol{z}}$, e inoltre:

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial(d^2\Sigma)} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} &= \left[-A_y\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right) + A_y\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right)\right] dy \\
&+ \left[A_x\left(x, y - \frac{dy}{2}, z\right) - A_x\left(x, y + \frac{dy}{2}, z\right)\right] dx \\
&= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) dx\,dy \\
&= \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{A}}\right)_z dx\,dy = \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{A}}\right) \cdot d^2\vec{\boldsymbol{\Sigma}}
\end{aligned}$$

Capitolo 18

Nozioni di fluidodinamica

18.1 I fluidi

La materia può trovarsi negli stati *solido* o *fluido*.

Lo stato solido è definito come quello in cui le distanze fra i singoli punti materiali del sistema (atomi o molecole) sono costanti. Va specificato che tale definizione è relativa al sistema di forze cui il sistema è sottoposto: nessun sistema è *assolutamente* solido, anche i cristalli più rigidi sono uno stato di equilibrio di atomi e/o molecole, che può essere perturbato (per esempio innescando oscillazioni) o rotto. Il "solido" è un materiale per cui l'approssimazione di rigidità è ragionevole e può essere usata per descrivere correttamente le sue proprietà.

Un *fluido* è un materiale che non è solido, quindi può essere *deformato*. Se il materiale ammette *solo* deformazioni che ne *conservano il volume*, allora diciamo che è un *liquido*. Se invece è possibile anche modificare il volume, oltre che la forma, il fluido si chiama *gas*.

18.1.1 Velocità di deriva e densità di un fluido

In un fluido — liquido o gas — la materia occupa un dato volume V. Volendo studiare le proprietà interne del fluido, si potrebbe pensare di scomporlo in tutti i suoi elementi costituenti, atomi o molecole che siano [1], descrivendo il moto di ciascuno attraverso la sua posizione $\vec{\boldsymbol{r}}_k$ e la sua velocità $\vec{\boldsymbol{v}}_k$, nonché le loro reciproche interazioni. Una siffatta descrizione è impraticabile, poiché il numero di molecole è decisamente troppo grande!

[1] Nel testo, d'ora in poi, parleremo di molecole, perché la maggior parte delle sostanze ha struttura molecolare, ma è sottinteso che quanto segue si applica anche a sostanze con struttura atomica.

Esempio: numero di molecole d'acqua

Quante molecole ci sono in un litro di acqua? E che volume occupano un miliardo di molecole di acqua?

Risposta. *Un litro di acqua ha una massa* $m = 1$ kg. *Per calcolare il numero di molecole, occorre conoscere la massa della molecola,* $m_{\mathrm{H_2O}}$. *Questa è composta da un atomo di ossigeno (massa* $m_{\mathrm{O}} = 16$ u.m.a. $= 26.56 \cdot 10^{-27}$ kg*) e da due atomi di idrogeno (massa* $m_{\mathrm{H}} = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg*), pertanto* $m_{\mathrm{H_2O}} = m_{\mathrm{O}} + 2m_{\mathrm{H}} = 29.90 \cdot 10^{-27}$ kg. *Quindi il numero di molecole di acqua in un litro è* $N_{\mathrm{H_2O}}^{(1\ \ell)} = \dfrac{1\ \mathrm{kg}}{m_{\mathrm{H_2O}}} = 3.34 \cdot 10^{25}$.

Il volume "efficace" di una molecola di acqua può essere calcolato come $V^{mol} = \dfrac{1\ \ell}{N_{\mathrm{H_2O}}^{(1\ \ell)}} = 2.99 \cdot 10^{-26}\ \ell \simeq 3 \cdot 10^{-29}\ \mathrm{m}^3$. *Quindi per contenere* 10^9 *molecole occorre un volume* $\delta V \simeq 3 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{m}^3$, *ovvero un cubetto di lato* $\delta L = \sqrt[3]{\delta V} \simeq 3 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m} = 300$ nm.

Nel trattare i fluidi, si assume che la materia sia "diluita" nel volume V, anziché concentrata in elementi quasi puntiformi. Il volume V può essere idealmente suddiviso in tantissimi elementini δV. Questi devono essere sufficientemente piccoli ($\delta V \ll V$), in modo da poter essere pensati come "quasi infinitesimi", per poter dare una descrizione continua del fluido. Ma allo stesso tempo i δV devono essere sufficientemente grandi da contenere un elevato numero di molecole del fluido, in modo che ciascun volumetto possa essere descritto attraverso le proprietà cinematiche medie delle sue molecole.

Se ogni molecola i-esima del volumetto è dotata di massa m_i e velocità $\vec{\boldsymbol{v}}_i$, la massa totale del volumetto δV è:

$$\delta m = \sum_{i \in \delta V} m_i \tag{18.1}$$

(dove $i \in \delta V$ sta ad indicare che nella somma consideriamo solo le molecole che si trovano in δV), e la quantità di moto totale è:

$$\delta \vec{\boldsymbol{p}} = \sum_{i \in \delta V} m_i \vec{\boldsymbol{v}}_i \tag{18.2}$$

Quindi definiamo la *velocità media* (o *velocità di deriva*) del volumetto δV come la media delle velocità $\vec{\boldsymbol{v}}_i$ delle molecole, "pesate" per le loro masse m_i:

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \langle \vec{\boldsymbol{v}} \rangle = \frac{\displaystyle\sum_{i \in \delta V} m_i \vec{\boldsymbol{v}}_i}{\displaystyle\sum_{i \in \delta V} m_i} \qquad \text{(velocità di deriva)} \tag{18.3}$$

cosicché possiamo scrivere la relazione

$$\delta\vec{\boldsymbol{p}} \;=\; \delta m \cdot \vec{\boldsymbol{u}} \tag{18.4}$$

che ci consente di trattare il volumetto δV come un oggetto unico.

È noto che le quantità medie (come la velocità di deriva, Eq. (18.3)) assumono valori più stabili se il numero di valori mediati è più grande. Per questo il numero di molecole entro δV deve essere elevato. Ciononostante, il volumetto δV può essere mantenuto piccolo rispetto al volume V totale. L'esempio fatto sulle molecole di acqua dovrebbe dare un'idea della validità di questa ipotesi.

È ragionevole supporre che la massa δm di fluido contenuta nel volumetto δV sia proporzionale a δV — raddoppiando il volumetto raddoppierebbe anche la massa di fluido in esso contenuta — pertanto possiamo scrivere:

$$\delta m = \rho \cdot \delta V \qquad (\rho \;\equiv\; \text{densità}) \tag{18.5}$$

dove la quantità ρ così introdotta è la *densità* del fluido.

In generale la densità può variare da un punto all'altro del fluido: se si tratta di un gas, questo può avere zone più compresse o più rarefatte, che possono anche cambiare nel tempo

$$\rho \;=\; \rho(\vec{\boldsymbol{r}}; t) \qquad \text{(nei gas)} \tag{18.6}$$

Viceversa, nei liquidi ρ è uniforme nello spazio, ed in condizioni stabili di temperatura anche costante nel tempo.

$$\rho \;=\; \text{costante} \qquad \text{(nei liquidi)} \tag{18.7}$$

18.1.2 Unità di misura della densità

Dalla definizione, Eq. (18.5) risulta che la densità nel S.I. si misura in kg/m^3. Un'altra unità molto comune, in quanto più pratica, è g/cm^3. Essendo 1 kg = 1000 g e 1 m^3 = (100 cm)^3 = 10^6 cm^3, ricaviamo che

$$1 \text{ g/cm}^3 \;=\; 1000 \text{ kg/m}^3 \tag{18.8}$$

La densità dell'acqua, alla temperatura di 4°C, è 1 g/cm^3. Questo numero così "tondo" non è un caso. In effetti, la massa di 1 kg è definita precisamente come la massa di una quantità di acqua pura (H_2O) che occupa il volume di 1 litro ($\equiv 10^{-3}$ m^3) alla temperatura di 4°C. Anche questa temperatura non è casuale: è quella alla quale il volume dell'acqua è minimo. In effetti, scaldando l'acqua al di sopra di tale temperatura, ma anche raffreddandola al di sotto di essa, essa si dilata.

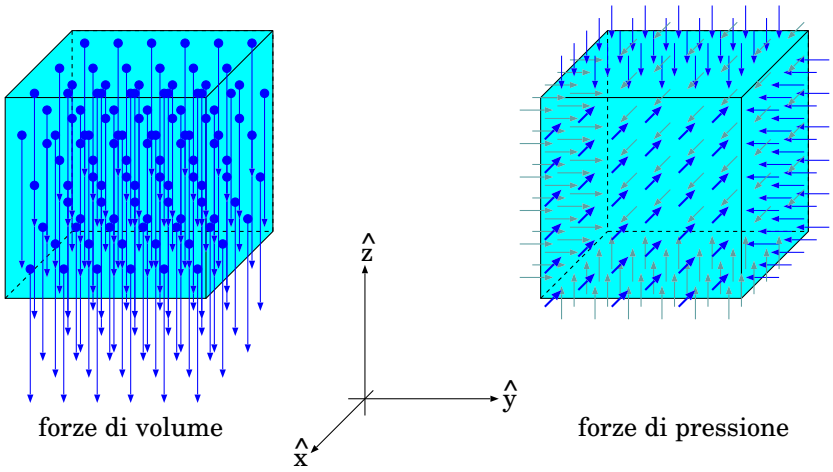


Figura 18.1: *Forze di volume (a sinistra) e di superficie (a destra).*

18.2 Forze di volume e di superficie

Dovendo studiare la dinamica di un fluido, occorre introdurre una descrizione delle forze che si adatti a questa "materia diluita" che stiamo trattando. Quindi non possiamo pensare ad una forza applicata ad un "punto materiale". Piuttosto, dobbiamo ragionare sul *sistema di forze* che agisce su un volumetto δV di fluido. Distinguiamo due tipologie di forze (vedi Fig. 18.1).

- *Forze di volume*: agiscono su tutte le molecole del fluido; il volumetto δV di fluido ne sente l'effetto collettivo. L'esempio più ovvio — al quale ci limiteremo — è la *forza di gravità* agente su δV, il cui effetto globale sarà
$$\delta \vec{\boldsymbol{F}}_g = \delta m \vec{\boldsymbol{g}} = \rho \vec{\boldsymbol{g}} \delta V \tag{18.9}$$

- *Forze di superficie*: agiscono solo sulla superficie Σ_{ch} che racchiude il volumetto δV. Tipicamente, queste forze sono un effetto macroscopico (o collettivo) di tutte le interazioni elementari fra le molecole di fluido all'interno e all'esterno del volumetto δV. Queste interazioni sono a corto raggio, quindi interessano solo le molecole vicine fra loro. Pertanto, per l'effetto che esse hanno su δV, contano solo quelle fra le molecole che si trovano in prossimità (subito all'interno, o subito all'esterno) della superficie Σ_{ch}.

Elaboriamo meglio il secondo caso. Possiamo pensare a due tipi di forze di superficie:

- *forze di superficie ortogonali* o *forze di pressione*: sono dovute agli urti delle molecole esterne al volumetto; verranno trattate nella Sezione 18.2.1;

- *forze di superficie parallele* o *forze viscose*: sono dovute all'attrito fra strati di fluido che scorrono l'uno sull'altro, e tendono a trascinarsi a vicenda; spesso in una trattazione introduttiva si tendono a trascurare queste forze, limitandosi ai *fluidi non viscosi*; tratteremo queste forze in Sezione 18.2.4.

18.2.1 Pressione in un fluido

Qui ci concentriamo sulle *forze di superficie ortogonali alla superficie*. Sperimentalmente si osserva che per una piccola porzione di superficie $\delta\Sigma$, la forza δF è proporzionale a $\delta\Sigma$

$$\delta F_P = P \cdot \delta\Sigma \qquad (\ P \ \equiv \ \text{pressione}\ ) \tag{18.10}$$

e sempre diretta verso l'interno del volumetto δV. Entrambe queste proprietà sono comprensibili, se si pensa a queste forze come dovute alla totalità di urti che la superficie $\delta\Sigma$ subisce da parte delle molecole del fluido circostante.

La costante di proporzionalità P che compare nell'Eq. (18.10) si chiama *pressione*. Essa può cambiare da un luogo all'altro del fluido, ma non cambia se modifichiamo l'orientamento della superficie $\delta\Sigma$.

La superficie Σ_{ch} che delimita δV è ovviamente una superficie chiusa. È consuetudine dare un "orientamento" alle superfici chiuse, assegnando in ogni punto un versore $\hat{\boldsymbol{n}}$ perpendicolare ad esse e diretto verso l'esterno; con questa convenzione, si può riscrivere l'Eq. (18.10) in forma vettoriale:

$$\delta\vec{\boldsymbol{F}}_P = -(P \cdot \delta\Sigma)\hat{\boldsymbol{n}} \qquad (\ P \ \equiv \ \text{pressione}\ ) \tag{18.11}$$

Scegliamo il volumetto δV di forma parallelepipeda, come in Fig. 18.1, con lati $\delta x, \delta y, \delta z$. Studiamo le forze di pressione agenti su δV lungo le 3 componenti cartesiane. Lungo la direzione x, la pressione agisce sulle due superfici di area $\delta y \cdot \delta z$ collocate in x e in $x + \delta x$: sulla prima agisce in direzione $+\hat{\boldsymbol{x}}$, sulla seconda in direzione $-\hat{\boldsymbol{x}}$. Quindi la forza di pressione totale lungo x su δV è:

$$\begin{aligned} \delta F_{P,x} &= P(x,y,z)(\delta y \cdot \delta z) - P(x+\delta x, y, z)(\delta y \cdot \delta z) \\ &\simeq -\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}(\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z) \end{aligned}$$

Analogamente possiamo trovare le forze di pressione lungo y, z,:

$$\begin{aligned}
\delta F_{P,y} &= P(x,y,z)(\delta x \cdot \delta z) - P(x, y+\delta y, z)(\delta x \cdot \delta z) \\
&\simeq -\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}(\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta F_{P,z} &= P(x,y,z)(\delta x \cdot \delta y) - P(x, y, z+\delta z)(\delta x \cdot \delta y) \\
&\simeq -\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}(\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z)
\end{aligned}$$

Osserviamo che tutte le espressioni contengono un termine $(\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z)$ che è pari al volume δV. In conclusione le forze di pressione sono date da:

$$\begin{aligned}
\delta F_{P,x} &= -\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}\,\delta V \\
\delta F_{P,y} &= -\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}\,\delta V \\
\delta F_{P,z} &= -\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\,\delta V
\end{aligned} \tag{18.12}$$

Nota di formalismo vettoriale

$\delta\vec{\boldsymbol{F}}_P$ è un forza, quindi sarebbe simpatico condensare le tre equazioni cartesiane Eq. (18.12) in una forma vettoriale. In effetti, si può fare: le tre derivate parziali $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$ possono essere viste come le tre componenti di un vettore, che si chiama "gradiente di P", e che si indica come:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} P \equiv \left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z} \right) \tag{18.13}$$

A questo punto, le Eq. (18.12) si possono riscrivere in maniera compatta come:

$$\delta\vec{\boldsymbol{F}}_P = -\vec{\boldsymbol{\nabla}} P\,\delta V \tag{18.14}$$

18.2.2 Unità di misura della pressione

Dalla definizione, Eq. (18.10), risulta che la pressione è una forza agente su una superficie unitaria.

L'unità di misura di pressione è il Pascal (Pa):

$$1\ \text{Pa} = 1\ \text{N/m}^2 \tag{18.15}$$

(1 Pa è la pressione che esercita una forza di 1 N applicata ad una superficie di 1 m^2). Nelle trasmissioni meteorologiche si fa spesso uso dell'*ettoPascal*, hPa, definito da

$$1 \text{ hPa} \;=\; 100 \text{ Pa}$$

La "pressione atmosferica standard" (misurata alla latitudine di 45° al livello del mare, alla temperatura di 15°C) è spesso usata come unità di misura di pressione e si indica con Atm. Non è però un'unità S.I. La sua conversione in Pascal è

$$1 \text{ Atm} \;=\; 101\,325 \text{ Pa} \tag{18.16}$$

18.2.3 Equazione della dinamica del fluido

Abbiamo visto — Eq. (18.9) e Eq. (18.14) — che le forze di volume e di pressione sono pari a

$$\delta\vec{\boldsymbol{F}}_g \;=\; \rho\vec{\boldsymbol{g}}\,\delta V \qquad ; \qquad \delta\vec{\boldsymbol{F}}_P \;=\; -\vec{\boldsymbol{\nabla}}P\,\delta V$$

Mettendo insieme tutto possiamo quindi scrivere la forza totale agente su δV

$$\delta\vec{\boldsymbol{F}} \;=\; \left(-\vec{\boldsymbol{\nabla}}P + \rho\vec{\boldsymbol{g}}\right)\delta V \tag{18.17}$$

ovvero, per componenti cartesiane:

$$\begin{aligned}
\delta F_x &= -\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}\,\delta V \\
\delta F_y &= -\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}\,\delta V \\
\delta F_z &= -\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\,\delta V \;-\; \rho g\,\delta V
\end{aligned} \tag{18.18}$$

Per la seconda legge della dinamica, $\delta\vec{\boldsymbol{F}} = \delta m\,\vec{\boldsymbol{a}}$, con $\delta m = \rho\,\delta V$, cosicché:

$$\rho\,\vec{\boldsymbol{a}} \;=\; \rho\,\frac{d\vec{\boldsymbol{u}}}{dt} \;=\; -\vec{\boldsymbol{\nabla}}P + \rho\,\vec{\boldsymbol{g}} \tag{18.19}$$

(interessante notare che questo risultato non dipende più dalla scelta di δV — come era da aspettarsi!)

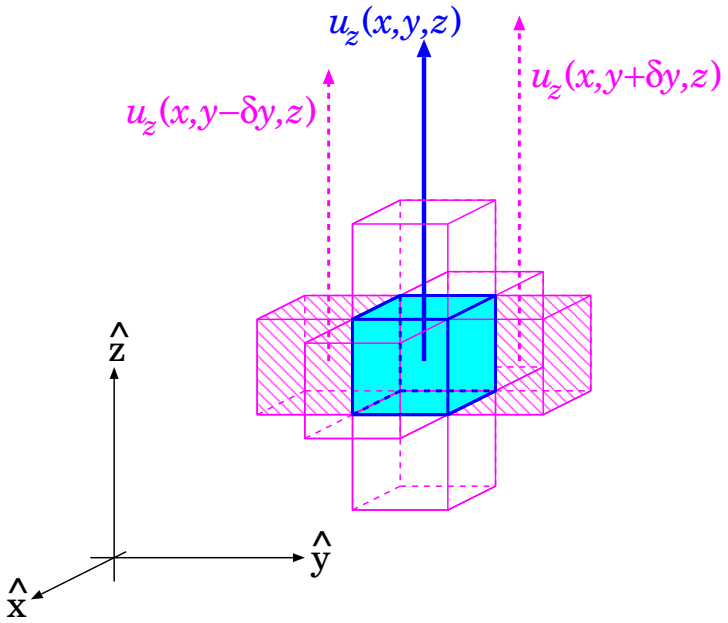


Figura 18.2: *Volumetto di fluido viscoso, centrato in* (x, y, z) *e circondato da 8 volumetti contigui, centrati in* $(x \pm \delta x, y, z)$, $(x, y \pm \delta y, z)$, $(x, y, z \pm \delta z)$. *Sono indicate la componente-z* $u_z(x, y, z)$ *della velocità del volumetto centrale, e le analoghe di due dei volumetti contigui,* $u_z(x, y \pm \delta y, z)$.

18.2.4 Forze viscose (*)

In un fluido viscoso, ogni volumetto δV subisce un trascinamento ad opera dei volumetti contigui, la cui intensità è direttamente proporzionale alla differenza di velocità delle porzioni di fluido a contatto.

Assumiamo di suddividere il fluido in volumetti parallelepipedi di spigoli δx, δy, δz, e concentriamoci su uno di essi, centrato in (x, y, z) che si muove con velocità $\vec{\boldsymbol{u}}(x, y, z)$. Esso è circondato da 8 volumetti simili, centrati rispettivamente in $(x \pm \delta x, y, z)$, $(x, y \pm \delta y, z)$, $(x, y, z \pm \delta z)$, ciascuno dotato di una propria velocità — vd Fig. 18.2.

Concentriamoci, per esempio, sulla forza di trascinamento lungo z, $\delta F_{visc,z} = \delta \vec{\boldsymbol{F}}_{visc} \cdot \hat{\boldsymbol{z}}$, agente su δV. Essa è direttamente proporzionale a tutte le differenze di velocità u_z, rispetto agli elementi contigui, e alle superfici di contatto. Per esempio, il parallelepipedo centrato in $(x + \delta x, y, z)$ presenta una differenza di velocità lungo x pari a $[u_z(x + \delta x, y, z) - u_z(x, y, z)]$ e una superficie di contatto pari a $(\delta y \cdot \delta z)$, quindi il suo contributo al trascinamento

è

$$\delta F_{visc,z}^{(+\delta x)} = \eta \cdot (\delta y \cdot \delta z) \cdot \frac{u_z(x+\delta x, y, z) - u_z(x, y, z)}{\delta x}$$

essendo η una costante di proporzionalità. La proporzionalità diretta con $[u_z(x+\delta x, y, z) - u_z(x, y, z)]$ è stata espressa attraverso $\dfrac{u_z(x, y, z+\delta z) - u_z(x, y, z)}{\delta x}$: l'aggiunta di δx al denominatore può sembrare artificiosa, ma in realtà è necessaria, perché nel limite $\delta x \to 0$ anche $[u_z(x+\delta x, y, z) - u_z(x, y, z)] \to 0$.

In modo analogo, il parallelepipedo centrato in $(x-\delta x, y, z)$ deve produrre un trascinamento pari a:

$$\delta F_{visc,z}^{(-\delta x)} = \eta \cdot (\delta y \cdot \delta z) \cdot \frac{u_z(x-\delta x, y, z) - u_z(x, y, z)}{\delta x}$$

La somma dei due contributi quindi è:

$$\delta F_{visc,z}^{(\pm\delta x)} = \eta \cdot (\delta y \cdot \delta z) \cdot \frac{u_z(x+\delta x, y, z) + u_z(x-\delta x, y, z) - 2u_z(x, y, z)}{\delta x}$$

Ora sviluppiamo $u_z(x \pm \delta x, y, z)$ in serie di Taylor:

$$\begin{aligned} u_z(x \pm \delta x, y, z) &= u_z(x, y, z) \pm \delta x \frac{\partial u_z(x, y, z)}{\partial x} + \frac{1}{2}(\delta x)^2 \frac{\partial^2 u_z(x, y, z)}{\partial x^2} \\ &\quad + \mathcal{O}\left((\delta x)^3\right) \end{aligned}$$

da cui

$$u_z(x+\delta x, y, z) + u_z(x-\delta x, y, z) - 2u_z(x, y, z) = (\delta x)^2 \frac{\partial^2 u_z(x, y, z)}{\partial x^2}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \delta F_{visc,z}^{(\pm\delta x)} &= \eta \cdot (\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z) \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \\ &= \eta\, \delta V \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Possiamo ragionare identicamente per i volumetti contigui centrati in $(x, y \pm \delta y, z)$ e $(x, y, z \pm \delta z)$, ottenendo:

$$\begin{aligned} \delta F_{visc,z}^{(\pm\delta y)} &= \eta\, \delta V \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \\ \delta F_{visc,z}^{(\pm\delta z)} &= \eta\, \delta V \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Il trascinamento totale è quindi

$$\begin{aligned}\delta F_{visc,z} &= \delta F_{visc,z}^{(\pm\delta x)} + \delta F_{visc,z}^{(\pm\delta y)} + \delta F_{visc,z}^{(\pm\delta z)} \\ &= \delta V\,\eta\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)\end{aligned}$$

La somma delle derivate parziali seconde si chiama *operatore laplaciano*:

$$\nabla^2 \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

Abbiamo quindi trovato che

$$\delta F_{visc,z} = \delta V\,\eta\,\nabla^2 u_z$$

Se il fluido è isotropo, devono valere equazioni analoghe anche per $\delta F_{visc,x}$, $\delta F_{visc,y}$:

$$\begin{aligned}\delta F_{visc,x} &= \delta V\,\eta\nabla^2 u_x \\ \delta F_{visc,y} &= \delta V\,\eta\nabla^2 u_y\end{aligned}$$

Tutto questo si può scrivere in forma vettoriale:

$$\delta\vec{\boldsymbol{F}}_{visc} = \delta V\,\eta\nabla^2\vec{\boldsymbol{u}} \tag{18.20}$$

L'equazione della dinamica, Eq. (18.19), si modifica quindi in:

$$\rho\,\vec{\boldsymbol{a}} = \rho\,\frac{d\vec{\boldsymbol{u}}}{dt} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}P + \rho\,\vec{\boldsymbol{g}} + \eta\nabla^2\vec{\boldsymbol{u}} \tag{18.21}$$

18.3 Pressione fluidostatica

Un fluido è considerato in equilibrio quando ciascuno dei suoi volumetti δV in cui l'abbiamo idealmente diviso è in equilibrio rispetto al fluido circostante [2]. Per un fluido in equilibrio, la forza totale $\delta\vec{\boldsymbol{F}}$ agente su δV (cfr Eq. (18.18)) deve essere nulla. Questo significa che le forze di superficie devono bilanciare le forze di volume. Dalle Eq. (18.18) si deduce quindi:

[2] Questo non significa che tutte le sue molecole siano ferme: esse saranno invece in moto caotico e si urteranno continuamente. Però la loro velocità vettoriale media (o "velocità di deriva") $\vec{\boldsymbol{u}} \equiv \langle\vec{\boldsymbol{v}}\rangle$ sarà in media nulla.

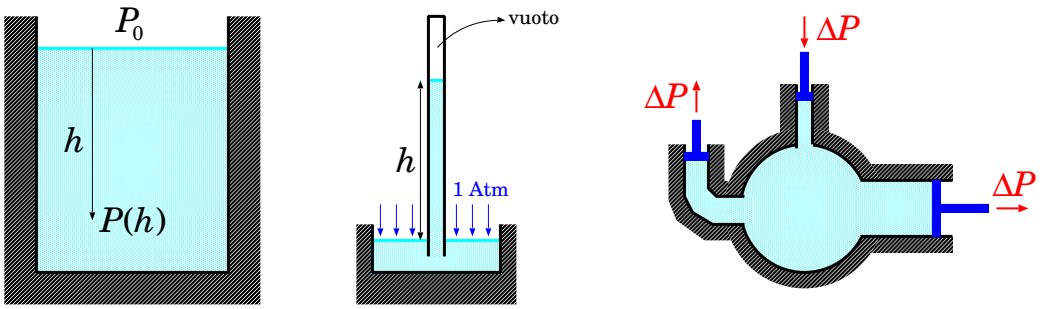


Figura 18.3: *Leggi fluidostatiche: legge di Stevin (a sinistra); barometro di Torricelli (al centro); legge di Pascal (a destra).*

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} &= -\rho g \end{aligned} \tag{18.22}$$

Quindi la pressione varia solo con l'altezza (z).

18.3.1 Liquidi statici, legge di Stevin

Per i liquidi, in cui ρ è uniforme ovunque, la terza delle Eq. (18.22) si integra immediatamente:

$$P(z) = P(z_0) - \rho g\,(z - z_0)$$

Poniamo la quota z_0 alla superficie del liquido e chiamiamo $h = (z_0 - z)$ la profondità. Si ottiene la *legge di Stevin* (Fig. 18.3 (sinistra)): se un liquido alla sua superficie è sottoposto alla pressione P_0, ad una profondità h la pressione risulta

$$P(h) = P_0 + \rho g h \qquad \text{(nei liquidi)} \tag{18.23}$$

Esercizio 18.1. *Un subacqueo si immerge in apnea fino ad una profondità* $h = 15$ m. *Assumendo che alla superficie dell'acqua la pressione sia di* 1 Atm, *quant'è la pressione sentita dal subacqueo?*

Risposta. *Si applica direttamente la legge di Stevin, con* $P_0 = 101\,325$ Pa, $h = 15$ m, $\rho = 1000$ kg/m^3, $g = 9.806$ m/s^2. *Il risultato è*

$P(h) = (101\,325 \text{ Pa}) + (1000 \text{ kg/m}^3)(9.806 \text{ m/s}^2)(h = 15 \text{ m}) = 248\,415 \text{ Pa}$.
Possiamo esprimere il risultato in atmosfere, dividendo per 101 325: $P(h) = \dfrac{248\,415}{101\,325} \text{ Atm} = 2.45 \text{ Atm}$.

Esercizio 18.2. *Una diga di un bacino artificiale è larga $L = 50$ m e ha forma rettangolare; il livello dell'acqua è $h = 80$ m rispetto al fondo dell'invaso. Qual è la forza totale che l'acqua accumulata nell'invaso esercita sulla diga? Si assuma una densità dell'acqua $\rho = 1000$ kg/m^3 e una densità dell'aria $\rho' = 1.3$ kg/m^3.*

Risposta. *La forza dell'acqua sulla diga è dovuta alla pressione, la quale aumenta con la profondità h': detta P_0 la pressione atmosferica che agisce sulla superficie dell'acqua, la pressione dell'acqua è $P(h') = P_0 + \rho g h'$. Immaginiamo di dividere la superficie verticale della diga in tanti strati orizzontali di larghezza L e altezza infinitesima dh'. La forza su ciascuno di essi è $dF' = P(h')\, L\, dh'$, quindi la forza totale sulla diga prodotta dall'acqua è*

$$\begin{aligned} F_{acqua} &= \int_0^h P(h')\, L\, dh' = L \int_0^h dh' \left(P_0 + \rho g h'\right) = LH\, P_0 + L\rho g \left[\frac{(h')^2}{2}\right]_0^h \\ &= LH\, P_0 + \frac{Lh^2}{2}\rho g \end{aligned}$$

Analogamente si può ragionare per la forza prodotta dalla pressione atmosferica a valle della diga:

$$F_{aria} = LH\, P_0 + \frac{Lh^2}{2}\rho' g$$

La forza totale è $F = F_{acqua} - F_{aria} = \dfrac{Lh^2}{2}\left(\rho - \rho'\right) g$. Si nota che P_0 si cancella — come ci si sarebbe aspettato, visto che il suo effetto è uguale a monte e a valle della diga. Inserendo i valori numerici si trova $F = \dfrac{(50 \text{ m})(80 \text{ m})^2}{2}[(1000 - 1.3) \text{ kg/m}^3](9.806 \text{ m/s}^2) = 1.57 \cdot 10^9 \text{ N}$.

18.3.2 Il barometro a mercurio di Torricelli

Un'applicazione storica della legge di Stevin è il *barometro di Torricelli*, ideato per misurare la pressione atmosferica. Il funzionamento è illustrato in Fig. 18.3 (centro). Una bacinella contiene del mercurio (Hg, densità $\rho = 13\,579$ kg/m^3), esposto alla pressione dell'aria. Un tubo lungo e sottile viene riempito completamente di mercurio, tappato, quindi immesso nella bacinella con l'apertura in basso e stappato. Parte del mercurio defluisce dal tubo nella bacinella, lasciando quindi il vuoto nella parte superiore del tubo.

Per la legge di Stevin, la pressione all'interno del mercurio dipende solo dalla quota. In particolare, al livello della superficie esposta

all'aria, deve valere $P_0 = 1$ Atm (da determinare!), sia all'esterno che all'interno del tubo. D'altra parte, applicando sempre la legge di Stevin al mercurio dentro il tubo, si deduce che $P_0 = \rho g h$. Pertanto, misurando h si ottiene P_0. Il valore misurato da Torricelli era $h = 760$ mm ("760 millimetri di mercurio"). Da questo valore si ricaverebbe $1 \text{ Atm} = (13\,579 \text{ kg/m}^3)(9.806 \text{ m/s}^2)(0.76 \text{ m}) \simeq 101\,200$ Pa. Il risultato differisce di una parte su mille dal valore standard — discrepanza accettabile per le misure dell'epoca.

Esercizio 18.3. *La scelta del mercurio, nel barometro di Torricelli, non era casuale: si tratta infatti del materiale liquido più pesante a disposizione. Quanto sarebbe stata alta la colonnina di liquido se si fosse usata dell'acqua?*

Risposta. *La densità dell'acqua è* 1000 kg/m^3. *Occorre trovare un valore di h tale che* $1 \text{ Atm} = 101\,325 \text{ Pa} = (1000 \text{ kg/m}^3)(9.806 \text{ m/s}^2)\, h$, *ovvero* $h = \dfrac{101\,325 \text{ Pa}}{(1000 \text{ kg/m}^3)(9.806 \text{ m/s}^2)} = 10.33$ m. *Decisamente meno pratico!*

18.3.3 Propagazione della pressione: legge di Pascal

Un'altra conseguenza della legge di Stevin è la *legge di Pascal*: se ad un liquido racchiuso in un contenitore si applica in un punto una variazione di pressione ΔP, questa variazione si propaga ovunque nel liquido, con lo stesso valore, indipendentemente dalla quota e dalla direzione. La situazione è illustrata in Fig. 18.3 (destra).

Per capire il motivo, supponiamo che la variazione di pressione venga applicata ad una quota z_0. La legge di Stevin dice che ad ogni quota z la pressione deve essere

$$P(z) = P(z_0) + \rho g (z_0 - z)$$

Questa relazione deve essere vera per qualunque valore di $P(z_0)$, pertanto se questa varia di ΔP, lo stesso deve fare $P(z)$ per qualunque quota z.

Le macchine idrauliche sono importanti applicazioni pratiche della legge di Pascal. Con riferimento sempre alla Fig. 18.3(destra), posso pensare di applicare la pressione ΔP attraverso uno stantuffo con sezione Σ_0, cui è applicata una forza $F_0 = \Delta P \cdot \Sigma_0$. La pressione ΔP si propaga ovunque, anche ad altri stantuffi con sezione Σ'. Su questi quindi si esercita una forza $F' = \Delta P \cdot \Sigma' = \dfrac{\Sigma'}{\Sigma_0} F_0$. Se $\Sigma' > \Sigma_0$, la forza ottenuta, F', può essere resa molto maggiore di quella applicata, F_0.

Attenzione però: non stiamo "creando energia dal nulla"! Se il pistone su cui agisco col la forza F_0 si sposta di una distanza $\Delta \ell_0$, sto compiendo

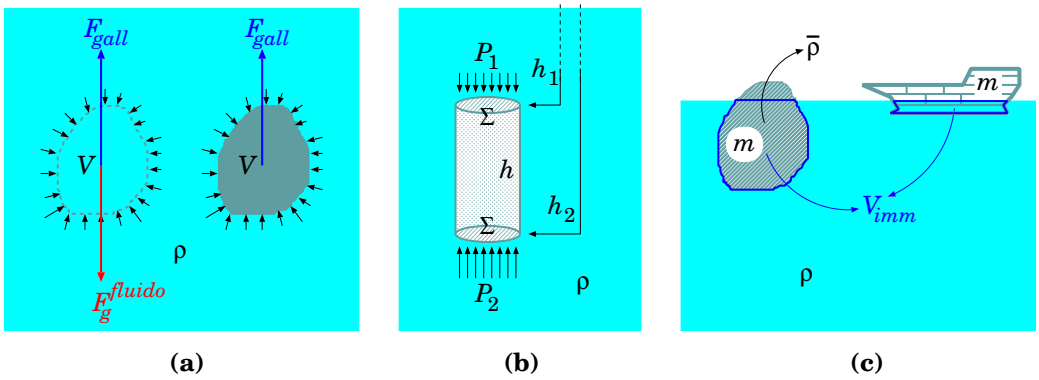


Figura 18.4: *Spinta di Archimede.* **(a)***: le forze di pressione dipendono solo dalla superficie che separa l'oggetto dal fluido, non dalla natura dell'oggetto.* **(b)***: calcolo delle forze di pressione per un oggetto cilindrico.* **(c)***: volume immerso, v_{imm}, nel caso di oggetti galleggianti.*

un lavoro $\mathcal{W}_0 = F_0 \cdot \Delta\ell_0$. Corrispondentemente, il pistone di sezione Σ' si sposterà di $\Delta\ell'$, che può essere calcolato come segue: il pistone di sezione Σ_0 sposta un volume di liquido $\Delta V = \Sigma_0 \Delta\ell_0$, che deve a sua volta spostare lo stantuffo di sezione Σ', quindi deve essere anche $\Delta V = \Sigma' \Delta\ell'$; quindi $\Delta\ell' = \dfrac{\Sigma_0}{\Sigma'}\Delta\ell_0$. Se abbiamo costruito la macchina in modo che $\Sigma_0 < \Sigma'$, ne risulta che $\Delta\ell' < \Delta\ell_0$. Il lavoro fatto dalla forza F' è quindi $\mathcal{W}' = F' \cdot \Delta\ell' = \left(\dfrac{\Sigma'}{\Sigma_0}F_0\right) \cdot \left(\dfrac{\Sigma_0}{\Sigma'}\Delta\ell_0\right) = \mathcal{W}_0$. In conclusione, una macchina idraulica può amplificare una forza, ma non un lavoro.

18.3.4 Galleggiamento: la legge di Archimede

Un oggetto di volume V, immerso in un fluido di densità ρ nel campo gravitazionale $\vec{\boldsymbol{g}} = -g\hat{\boldsymbol{z}}$, riceve dalle forze di superficie del fluido una spinta totale verso l'alto

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{gall} = +\rho g V \hat{\boldsymbol{z}} \tag{18.24}$$

Questa legge è nota come *legge di Archimede*, che la formulò più o meno così: *"un oggetto immerso in un fluido riceve da esso una spinta verso l'alto di intensità pari al peso del fluido che occuperebbe il suo volume"*.

Possiamo fornire una spiegazione intuitiva ed efficace di questa legge. La spinta $\vec{\boldsymbol{F}}_{gall}$ che il fluido applica all'oggetto è una forza di superficie, pertanto essa dipende solo dalla superficie che separa l'oggetto dal fluido, e non dalla natura e composizione dell'oggetto stesso. Consideriamo la Fig. 18.4 (a). Se l'oggetto immerso fosse fatto esattamente della stessa sostanza del fluido,

esso dovrebbe stare in equilibrio — immaginiamoci per esempio che il fluido sia acqua e l'oggetto sia un palloncino sottilissimo pieno d'acqua: non c'è ragione per cui l'acqua circostante dovrebbe spingere in su o in giù l'acqua del palloncino. Ma l'oggetto di fluido sente una forza di gravità pari a $\vec{\boldsymbol{F}}_g^{fluido} = -mg\hat{\boldsymbol{z}} = \rho V g\hat{\boldsymbol{z}}$; se sta in equilibrio, vuol dire che la spinta del fluido circostante deve essere opposta: $\vec{\boldsymbol{F}}_{gall} = -\vec{\boldsymbol{F}}_g^{fluido} = \rho V g\hat{\boldsymbol{z}}$, con il che l'Eq. (18.24) è dimostrata.

Anche la legge di Archimede è una conseguenza della legge di Stevin. È facile capirlo pensando ad un oggetto parallelepipedo, o cilindrico, con altezza h e base Σ — vd Fig. 18.4 (b). Le profondità delle basi superiore e inferiore sono rispettivamente h_1, h_2. Le forze di pressione sulle superfici laterali si bilanciano esattamente. La forza di pressione agente sulle superfici superiore e inferiore sono dirette rispettivamente verso il basso e verso l'alto, e valgono:

$$\vec{\boldsymbol{F}}^{sopra} = -P_1\Sigma\hat{\boldsymbol{z}} \quad ; \quad \vec{\boldsymbol{F}}^{sotto} = +P_2\Sigma\hat{\boldsymbol{z}}$$

La legge di Stevin ci dice inoltre che

$$P_1 = P_0 + \rho g h_1 \quad ; \quad P_2 = P_0 + \rho g h_2$$

Quindi la forza di galleggiamento è:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{F}}_{gall} &= \vec{\boldsymbol{F}}^{sopra} + \vec{\boldsymbol{F}}^{sotto} = (P_2 - P_1)\sigma\hat{\boldsymbol{z}} \\ &= \rho g(h_2 - h_1)\Sigma\,\hat{\boldsymbol{z}} = \rho g h\Sigma\,\hat{\boldsymbol{z}} \\ &= \rho g V\hat{\boldsymbol{z}} \end{aligned}$$

diretta verso l'alto e in accordo quantitativo con l'Eq. (18.24).

Dalla legge di Archimede risulta un effetto di galleggiamento: il peso apparente di un oggetto in un fluido è inferiore a quello reale. Detta m la massa dell'oggetto e $\vec{\boldsymbol{F}}_g = -mg\hat{\boldsymbol{z}}$ la sua forza-peso reale, il suo peso apparente risulta:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{tot} = \vec{\boldsymbol{F}}_g + \vec{\boldsymbol{F}}_{gall} = (\rho V - m)g\hat{\boldsymbol{z}} \tag{18.25}$$

Quindi:

$m > \rho V$	$\vec{\boldsymbol{F}}_{tot}$ verso il basso	oggetto attratto verso il basso, ma più debolmente
$m < \rho V$	$\vec{\boldsymbol{F}}_{tot}$ verso l'alto	oggetto spinto verso l'alto

Nel caso $m < \rho V$, l'oggetto può raggiungere la superficie superiore del fluido ed emergere parzialmente, cosicché il suo volume immerso rimane $V_{imm} < V$. A questo punto la spinta di Archimede si riduce a

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{gall} = +\rho g V_{imm} \hat{\boldsymbol{z}} \tag{18.26}$$

e il corpo si assesta quando nuovamente $\vec{\boldsymbol{F}}_g + \vec{\boldsymbol{F}}_{gall} = 0$, ovvero quando $mg = \rho V_{imm} g$:

$$\rho V_{imm} = m \tag{18.27}$$

Se l'oggetto immerso è ragionevolmente omogeneo, è utile introdurre la sua densità media $\bar{\rho} = \dfrac{m}{V}$, cosicché:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{tot} = \vec{\boldsymbol{F}}_g + \vec{\boldsymbol{F}}_{gall} = (\bar{\rho} - \rho) V \vec{\boldsymbol{g}} \tag{18.28}$$

quindi:

oggetto più denso del fluido	$\bar{\rho} > \rho$	$\vec{\boldsymbol{F}}_{tot}$ verso il basso
oggetto meno denso del fluido	$\bar{\rho} < \rho$	$\vec{\boldsymbol{F}}_{tot}$ verso l'alto

La condizione di galleggiamento Eq. (18.27) diventa ora:

$$\rho V_{imm} = \bar{\rho} V \tag{18.29}$$

Esercizio 18.4. *La densità di un iceberg è $\rho' = 0.917$ g/cm^3, mentre quella dell'acqua in cui galleggia è $\rho = 1$ g/cm^3. Quanta è la frazione di volume dell'iceberg che emerge dall'acqua?*

Risposta. *Chiamiamo V il volume totale dell'iceberg, e V_{imm} il volume immerso. La forza di gravità sull'iceberg è $F_g = -\rho' V g$ (diretta verso il basso), mentre la spinta di Archimede è data solo dalla parte sommersa: $F_{gall} = \rho V_{imm} g$ (diretta verso l'alto). La condizione di equilibrio si ha quando la risultante delle forze si annulla: $F_g + F_{gall} = 0$. Ciò avviene se $\rho V_{imm} = \rho' V$, ovvero $\dfrac{V_{imm}}{V} = \dfrac{\rho'}{\rho} = 0.917$. La frazione di volume dell'iceberg che emerge dall'acqua è quindi $\dfrac{V - V_{imm}}{V} = 0.083$: poco più dell'8%.*

... Da cui il modo di dire "vediamo solo la punta dell'iceberg", tipicamente per significare che la situazione è molto peggiore di quello che appare a prima vista.

Esercizio 18.5. *Un pallone da spiaggia, di raggio* $r = 20$ cm, *costituito da un sottile strato di plastica (densità* $\rho^{plas} = 1300$ kg/m^3*) di spessore* $h = 0.2$ mm *e riempito d'aria (densità* $\rho^{aria} = 1.3$ kg/m^3*), galleggia sull'acqua. Calcolare il volume totale,* V *e il volume immerso* V_{imm}.

Risposta. *Il volume del pallone è* $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 0.0335$ m^3.

Detta $\rho^{acqua} = 1000$ kg/m^3 *la densità dell'acqua, la condizione di galleggiamento è* $\rho^{acqua} V_{imm} = m$, *quindi occorre calcolare la massa* m *del pallone. La superficie del pallone è* $4\pi r^2$; *il volume di plastica è quindi* $4\pi r^2\, h$; *quindi la massa della plastica è* $m^{plas} = 4\pi r^2 h\, \rho^{plas} = 0.130$ kg. *Invece, la massa dell'aria contenuta è* $m^{aria} = \frac{4}{3}\pi r^3\, \rho^{aria} = 0.0435$ kg. *La massa del pallone è* $m = m^{plas} + m^{aria} = 0.174$ kg. *Quindi* $v_{imm} = \frac{m}{\rho^{acqua}} = 1.74 \cdot 10^{-5}$ m^3.

La frazione di volume immerso è $\frac{V_{imm}}{V} = 0.0052$ — *molto piccola, circa* 0.5%: *il* 99.5% *del pallone emerge dall'acqua.*

Continuazione (*)... *Qual è la profondità della parte immersa del pallone? Occorre conoscere la formula del volume di segmento sferico: per una sfera di raggio* r, *il segmento sferico di altezza* h *ha volume* $V^{segm.sfer} = \frac{\pi}{3}h^2(3r - h)$. *Occorre quindi risolvere in* h *l'equazione* $V_{imm} = \frac{\pi}{3}h^2(3r - h)$, *che è di 3° grado, quindi non ovvia! Tuttavia, avendo osservato che* $V_{imm} \ll V$, *è ragionevole supporre che anche* $h \ll r$, *e quindi approssimare* $3r - h \simeq 3r$ — *riservandoci poi di verificare se il valore trovato di* h *soddisfa questa approssimazione. Quindi risolviamo* $V_{imm} = \pi r h^2$, *che dà* $h = \sqrt{\frac{V_{imm}}{\pi r}} = 0.005$ m $= 5$ mm. *Effettivamente, con il valore trovato,* $\frac{h}{3r} = 0.025$, *quindi la nostra approssimazione è "buona" al livello del %.*

Esercizio 18.6. *Una grossa chiatta, di superficie* $\Sigma = 200$ m^2, *con le fiancate verticali e il fondo piatto, quando è scarica è immersa nell'acqua di* 30 cm. *Calcolare la massa della chiatta. La chiatta viene caricata con* 200 ton *di carico, di quanto risulta immersa?*

Risposta. *Chiamiamo* $h_0 = 0.3$ m *la parte immersa della chiatta. Il volume immerso è* $V_{imm} = \Sigma h_0 = 60$ m^3, *la spinta di Archimede è* $F_{gall} = \rho V_{imm} g$. *Questa deve bilanciare esattamente la forza di gravità* $F_g = -m_0 g$. *Quindi la massa della chiatta è* $m_0 = \rho V_{imm} = (1000 \text{ kg/m}^3)(60 \text{ m}^3) = 60\,000$ kg $= 60$ ton.

Dopo il carico, la massa totale è $m_{tot} = 260$ ton $= 260\,000$ kg. *La parte immersa* h_{imm} *si calcola allo stesso modo: il volume immerso* $V_{imm} = \Sigma h_{imm}$ *deve essere tale che la spinta di Archimede bilanci il peso:* $\rho V_{imm} g = m_{tot} g$, *quindi* $V_{imm} = \frac{m_{tot}}{\rho}$ *e* $h_{imm} = \frac{V_{imm}}{\Sigma} = \frac{m_{tot}}{\rho\Sigma} = \frac{260\,000 \text{ kg}}{(1000 \text{ kg/m}^3)(200 \text{ m}^2)} = 1.3$ m.

Esercizio 18.7. *Un oggetto cilindrico di massa $m = 15$ g, sezione $\Sigma = 2$ cm^2 e altezza $h = 15$ cm, è parzialmente immerso in un liquido (alcool, densità $\rho = 810$ kg/m^3), con l'asse disposto verticalmente. Dalla sua posizione di equilibrio di galleggiamento viene spinto leggermente in basso, quindi lasciato andare: si osserva che inizia ad oscillare verticalmente. Che tipo di moto ha? In quanto tempo T compie un'intera oscillazione?*

Risposta. *Le forze in gioco sono: la forza-peso $F_g = -mg$ diretta verso il basso; la forza di Archimede $F_{gall} = +\rho' V_{imm} g$ diretta verso l'alto. Detta Σ la sezione del cilindro, la parte immersa arriva a profondità $h_{imm} = \dfrac{V_{imm}}{\Sigma}$. In generale*

$$F_{tot} \;=\; F_g + F_{gall} \;=\; (-m + \rho V_{imm})g \;=\; (\rho\Sigma h_{imm} - m)g$$

All'equilibrio, $F_{tot} = 0$, quindi $m = \rho\Sigma h_{imm}^{eq}$. Intanto calcoliamo $h_{imm}^{eq} = \dfrac{m}{\rho\Sigma} = 0.0926$ m $= 9.26$ cm — ok, va bene: $h_{imm}^{eq} < h$.

Ora, possiamo riscrivere

$$F_{tot} \;=\; \rho\Sigma(h_{imm} - h_{imm}^{eq})g$$

Conviene introdurre lo spostamento dall'equilibrio:

$$z \;=\; h_{imm}^{eq} - h_{imm}$$

In segno è scelto in modo che $z > 0$ se l'oggetto emerge di più rispetto al punto di equilibrio, $z < 0$ se sprofonda — così è coerente con la scelta del segno per F_{tot}. Quindi

$$F_{tot} \;=\; -\rho g \Sigma\, z$$

L'accelerazione è

$$\frac{d^2 z}{dt^2} \;=\; a \;=\; \frac{F_{tot}}{m} \;=\; -\frac{\rho g \Sigma}{m}\, z$$

Questa è l'equazione di un moto oscillatorio armonico. La frequenza angolare è $\Omega = \sqrt{\dfrac{\rho g \Sigma}{m}} = 10.29$ rad/s, quindi il periodo è $T = \dfrac{2\pi}{\Omega} = 0.61$ s.

Ghiaccio galleggiante che si scioglie

Consideriamo un blocco di ghiaccio di massa che galleggia nell'acqua, contenuta in un recipiente. Col passare del tempo, esso si scioglie. Alla fine, tutto il ghiaccio si sarà sciolto e si sarà mischiato con l'acqua che all'inizio era già liquida. Quindi abbiamo due effetti concorrenti:

- *il ghiaccio che inizialmente emergeva, alla fine sarà fluito nell'acqua;*
- *il ghiaccio inizialmente immerso, sciogliendosi diminuisce di volume.*

Alla fine dello scioglimento, il livello di acqua nel recipiente è cambiato?

Risposta: *No. A causa della legge di Archimede. Vediamo perché.*

Il ghiaccio di massa m avrà un volume totale $V^{ghiaccio} = \frac{m}{\rho^{ghiaccio}}$, ma la sua parte immersa ha volume $V_{imm}^{ghiaccio} = \frac{m}{\rho}$, essendo ρ la densità dell'acqua in cui galleggia. Essendo $\rho^{ghiaccio} < \rho$, allora $V^{ghiaccio} > V_{imm}^{ghiaccio}$ — ovviamente! Quando il ghiaccio si sarà completamente trasformato in acqua, la sua massa m non sarà cambiata, ma la sua densità sarà ora diventata pari a quella dell'acqua, pertanto occuperà un volume $V^{ghiaccio\,sciolto} = \frac{m}{\rho}$. Quindi, $V^{ghiaccio\,sciolto} = V_{imm}^{ghiaccio}$, vale a dire che il ghiaccio, sciogliendosi, andrà a occupare un volume esattamente pari a quello della sua parte immersa prima dello scioglimento.

Osservazione: *è noto che il surriscaldamento globale produce uno scioglimento delle calotte polari, artica e antartica, e questo porterà ad un innalzamento del livello degli oceani. Si stima che, se i ghiacciai dell'Antartide si sciogliessero completamente, gli oceani si alzerebbero di circa* 50 m. *Viceversa, poiché la calotta artica (la "banchisa polare") è costituita interamente da ghiacci galleggianti, il suo scioglimento non provocherebbe nessuna variazione di livello negli oceani.*

18.4 Altimetro a pressione

La pressione atmosferica dipende da "quanto pesa" l'aria che sta sopra di noi. Ci aspettiamo che, salendo di quota, ci sia meno aria sopra di noi, e dunque che la pressione atmosferica diminuisca. Questo è un fatto noto, che può essere utilizzato per misurare la quota, per esempio durante un'escursione in montagna.

La terza delle Eq. (18.22) ci permette di essere più quantitativi. Riscriviamola per comodità

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \tag{18.30}$$

La densità dei gas però non è uniforme: essa è regolata dall'*equazione di stato*

$$PV = nRT \tag{18.31}$$

essendo P la pressione del gas, V il volume che occupa, T la temperatura (in gradi Kelvin), n il *numero di moli*, $R = 8.314$ Nm/K la costante dei gas perfetti. Possiamo ricavare ρ dall'equazione di stato: un volume V che contiene n moli ha una massa $n \cdot A$, essendo A la massa di una mole. Pertanto

$$\rho = \frac{nA}{V} = \frac{A}{RT}P \tag{18.32}$$

L'atmosfera terrestre è composta al 78% di azoto (molecola N_2, massa molare $A_{N_2} = 28$ g) e al 21% di ossigeno (molecola O_2, massa molare $A_{O_2} = 32$ g), con un rimanente 1% di altri gas, dominati dall'argon (molecola monoatomica Ar, massa molare $A_{Ar} = 40$ g). Pertanto la massa molare della miscela si può calcolare come una *media pesata* dei gas componenti, tenendo conto delle loro percentuali.

$$A = \frac{78\,A_{N_2} + 21\,A_{O_2} + 1\,A_{Ar}}{100} = 28.96 \text{ g} = 0.02896 \text{ kg}$$

La densità dell'atmosfera terrestre può essere calcolata dall'Eq. (18.32) per temperatura e pressione fissate. Ci sono diversi standard in proposito, ne elenchiamo alcuni [3] qui in tabella:

standard	temperatura		pressione		densità
	(°C)	(K)	(Atm)	(10^5 Pa)	(kg/m^3)
IUPAC-STP	0	273.15	0.987	1	1.28
SATP	25	298.15	0.987	1	1.17
NIST	20	293.15	1	1.013	1.20

Normalmente si assume $\rho = 1.3$ kg/m^3.

Usando l'Eq. (18.32), l'Eq. (18.30) si può riscrivere come:

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{Ag}{RT}\,P \tag{18.33}$$

che è un'*equazione differenziale* nella funzione incognita $P(z)$. Si potrebbe pensare di integrare questa equazione — e da un punto di vista matematico è possibile: la soluzione sarebbe $P(z) = P_0 \mathrm{e}^{-\frac{Ag}{RT}z}$, provare per credere! Tuttavia sarebbe fuorviante, perché così facendo si sta implicitamente assumendo che la temperatura T sia uguale a qualunque altezza — il che è notoriamente sbagliato!

Pertanto, consci del fatto che l'Eq. (18.33) è applicabile solo per dislivelli Δz sui quali si possa assumere che T è uniforme, procediamo in maniera approssimata, sostituendo la derivata $\frac{dP}{dz}$ con un rapporto di differenze finite

[3] IUPAC="International Union of Pure and Applied Chemistry"; STP="Standard Temperature and Pressure"; SATP="Standard Ambient Temperature and Pressure"; NIST="National Institute of Standards and Technology"

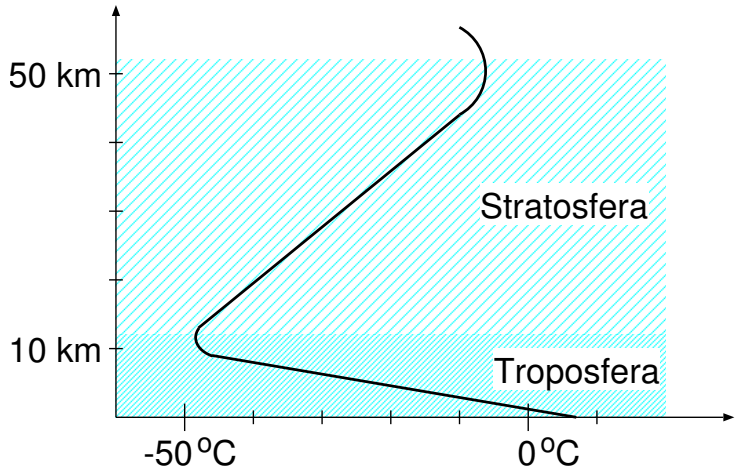


Figura 18.5: *Andamento della temperatura media atmosferica in funzione della quota sul livello del mare.*

$\dfrac{\Delta P}{\Delta z}$, e scrivendo

$$\Delta z \;=\; -\underbrace{\left(\frac{RT}{Ag}\right)}_{\lambda}\frac{\Delta P}{P} \tag{18.34}$$

Ad una temperatura $T = 273$ K (pari a circa 0°C) si ottiene $\lambda \simeq 7990$ m. Per $T = 300$ K (corrispondente a circa 27°C) $\lambda \simeq 8780$ m.

È quindi chiaro che l'Eq. (18.34) può essere usata per calcolare un dislivello Δz, misurando la pressione P alla partenza e le sue variazioni ΔP. Tuttavia occorre conoscere anche la temperatura della colonna d'aria, altrimenti la stima di Δz può essere grossolana.

Possiamo tentare un calcolo un po' più raffinato, introducendo il *gradiente termico medio*, ovvero la variazione media di temperatura con l'altezza. Nella parte bassa dell'atmosfera, la *troposfera* (fino a $\sim$ 13 km di quota, vd Fig. 18.5), la temperatura si abbassa al crescere dell'altezza, di circa 6.5 gradi ogni 1000 metri:

$$\alpha = -\frac{dT}{dz} \;\simeq\; 6.5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K/m}$$

ovvero $T(z) = T_0 - \alpha z$, con $T_0 \simeq 20°\mathrm{C} \simeq 293$ K al livello del mare. L'Eq. (18.33) si può scrivere come:

$$\frac{dP}{P} \;=\; -\frac{Ag}{R}\frac{dz}{T_0 - \alpha z}$$

che si può integrare:

$$\begin{aligned}
\int_{P_0}^{P} \frac{dP'}{P'} &= -\frac{Ag}{R}\int_0^z \frac{dz'}{T_0-\alpha z'} \\
[\ln P']_{P_0}^{P} &= \frac{Ag}{R\alpha}\left[\ln(T_0-\alpha z')\right]_0^z \\
\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) &= \frac{Ag}{R\alpha}\ln\left(\frac{T_0-\alpha z}{T_0}\right) \\
P(z) &= P_0\left(\frac{T_0-\alpha z}{T_0}\right)^{\frac{Ag}{R\alpha}}
\end{aligned}$$

Questa può essere invertita per ricavare l'altezza z sul livello del mare:

$$z = \frac{T_0}{\alpha}\left[1-\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{R\alpha}{Ag}}\right] \qquad \left(\frac{R\alpha}{Ag} \simeq 0.19\right)$$

18.5 Moto stazionario di un liquido non viscoso

Consideriamo un liquido in moto stazionario: questo significa che i parametri del liquido possono cambiare da una posiziona a un'altra, ma *non dipendono dal tempo*. In particolare possiamo assumere che

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{u}} \equiv \vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \quad &; \quad \frac{\partial \vec{\boldsymbol{u}}}{\partial t} = 0 \\
P \equiv P(\vec{\boldsymbol{r}}) \quad &; \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 0
\end{aligned} \tag{18.35}$$

Supponiamo inoltre che il liquido scorra in un tubo sottile, cosicché in ogni sezione Σ del tubo la velocità $\vec{\boldsymbol{u}}$ possa essere considerata uniforme in tutti i punti.

18.5.1 Portata

Il volume di liquido che scorre nell'unità di tempo, $\mathcal{Q} \equiv \frac{dV}{dt}$, si chiama *portata*. Se attraverso una sezione Σ il liquido scorre con velocità u, in un

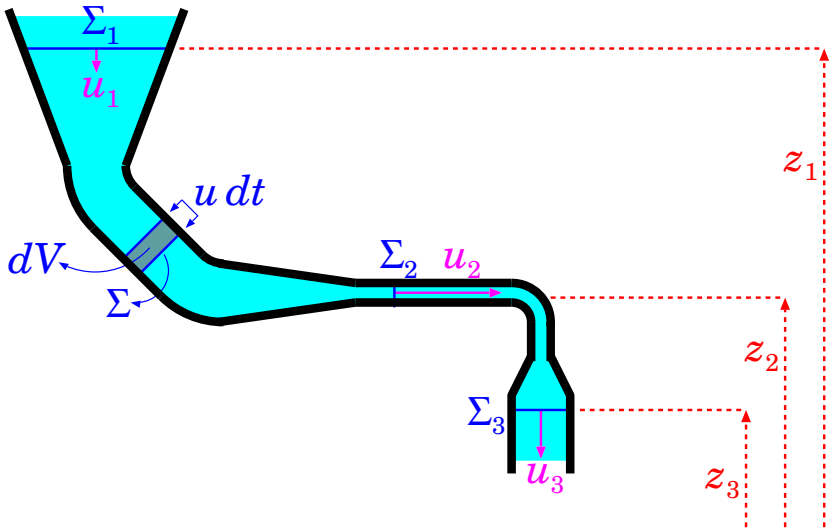


Figura 18.6: *Tubo percorso da un liquido in moto stazionario.*

tempo dt passa un volumetto $dV = \Sigma \cdot u\,dt$ (vd Fig. 18.6), quindi la portata si può calcolare come

$$\mathcal{Q} \;=\; \frac{dV}{dt} \;=\; \Sigma u \qquad\qquad \text{(portata)} \tag{18.36}$$

Essendo il liquido incomprimibile, il volume dV che attraversa una data sezione Σ_1 deve essere lo stesso che attraversa qualunque altra sezione Σ_2. Pertanto la portata attraverso le due sezioni deve essere uguale:

$$\mathcal{Q}_{\Sigma_1} \;=\; \mathcal{Q}_{\Sigma_2} \tag{18.37}$$

Se così non fosse, si avrebbe nel tempo un aumento o una diminuzione del volume di liquido compreso fra le sezioni Σ_1 e Σ_2 — il che è assurdo, visto che questo volume è definito dalla geometria del tubo.

L'Eq. (18.37) può essere riscritta come:

$$\Sigma_1 u_1 \;=\; \Sigma_2 u_2 \tag{18.38}$$

Se la sezione è maggiore, la velocità è più bassa, e viceversa. Nell'esempio di Fig. 18.6, $\Sigma_1 > \Sigma_3 > \Sigma_2$, pertanto deve essere $u_1 < u_3 < u_2$.

18.5.2 Teorema di Bernoulli

Analizziamo la dinamica del movimento del liquido. Consideriamo un volumetto δV di liquido, soggetto alla forza totale (Eq. (18.17)):

$$\delta \vec{\boldsymbol{F}} \;=\; \left(-\vec{\boldsymbol{\nabla}} P + \rho \vec{\boldsymbol{g}}\right) \delta V$$

La massa è $\delta m = \rho\,\delta V$, pertanto l'accelerazione del volumetto è:

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{u}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\delta\vec{\boldsymbol{F}}}{\delta m} = -\frac{\vec{\boldsymbol{\nabla}}P}{\rho} + \vec{\boldsymbol{g}} \tag{18.39}$$

Ciò significa che nel tempo dt la velocità del volumetto è cambiata di una quantità $d\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{a}}\,dt$. Ma nello stesso tempo, il volumetto si è spostato di $d\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{u}}\,dt$, e quindi si viene a trovare in una posizione diversa, dove la velocità media (che è supposta stazionaria, ricordiamo) è definita con un valore diverso, secondo l'Eq. (18.35): $\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{r}}) + d\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{r}} + d\vec{\boldsymbol{r}})$. Quindi possiamo vedere $d\vec{\boldsymbol{u}}$ da due punti di vista diversi: come variazione della velocità a causa delle forze agenti, oppure a causa del cambiamento di posizione. Per l'ipotesi di stazionarietà, i due risultati devono essere identici:

$$\vec{\boldsymbol{a}}\,dt = d\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{r}} + d\vec{\boldsymbol{r}}) - \vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{r}})$$

Se facciamo il prodotto scalare con $\vec{\boldsymbol{u}}$, il primo membro diventa

$$\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}\,dt = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}\cdot\left(-\frac{\vec{\boldsymbol{\nabla}}P}{\rho} + \vec{\boldsymbol{g}}\right)dt = -\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}P}{\rho} + d\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{g}}$$

mentre il secondo diventa:

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{u}}\cdot d\vec{\boldsymbol{u}} &= u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z = d\left(\frac{u_x^2}{2}\right) + d\left(\frac{u_y^2}{2}\right) + d\left(\frac{u_z^2}{2}\right)\\ &= d\left(\frac{u^2}{2}\right)\end{aligned}$$

Ora,

$$d\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}P = dx\frac{\partial P}{\partial x} + dy\frac{\partial P}{\partial y} + dz\frac{\partial P}{\partial z}$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned}P(\vec{\boldsymbol{r}} + d\vec{\boldsymbol{r}}) - P(\vec{\boldsymbol{r}}) &= P(x+dx, y+dy, z+dz) - P(x,y,z)\\ &= [P(x+dx, y+dy, z+dz) - P(x+dx, y+dy, z)]\\ &\quad + [P(x+dx, y+dy, z) - P(x+dx, y, z)]\\ &\quad + [P(x+dx, y, z) - P(x, y, z)]\\ &= \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\end{aligned}$$

quindi

$$d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}} P \;=\; dP$$

Inoltre, ρ per i liquidi è uniforme, quindi $\dfrac{dP}{\rho} = d\left(\dfrac{P}{\rho}\right)$. Infine, $\vec{\boldsymbol{g}} = -g\hat{\boldsymbol{z}}$, quindi $d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{g}} = -g\,dz$. Mettendo tutto insieme si trova:

$$d\left(\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz\right) \;=\; 0 \tag{18.40}$$

e quindi la quantità fra parentesi è uniforme lungo il tubo che trasporta il liquido:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \;\equiv\; \text{costante} \tag{18.41}$$

Questo risultato va sotto il nome di *teorema di Bernoulli.*

La quantità $\left(\dfrac{u^2}{2} + \dfrac{P}{\rho} + gz\right)$ può essere considerata costante in due sensi:

- per due punti diversi (1) e (2) lungo il tubo:

$$\left(\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz\right)_{(1)} = \left(\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz\right)_{(2)}$$

- per un elemento δV di liquido che scorre nel tubo, a due istanti temporali $t_1,\ t_2$:

$$\left(\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz\right)_{(t=t_1)} = \left(\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz\right)_{(t=t_2)}$$

L'equivalenza fra queste due affermazioni deriva dall'ipotesi di stazionarietà: sia P che $\vec{\boldsymbol{u}}$ non devono dipendere dal tempo, ma solo dalla posizione $\vec{\boldsymbol{r}}$. Quindi, la seconda scrittura si può derivare dalla prima, pensando a un elemento di liquido che si trova in (1) all'istante $t = t_1$, e successivamente si sposta in (2) all'istante $t = t_2$.

Per analizzare il flusso di liquido in un tubo, si fa uso del teorema di Bernoulli e della costanza della portata: date due sezioni $\Sigma_1,\ \Sigma_2$, abbiamo

(sezione 1) (sezione 2)

$$\begin{aligned} \Sigma_1 u_1 &= \Sigma_2 u_2 \\ \frac{u_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + gz_1 &= \frac{u_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + gz_2 \end{aligned}$$

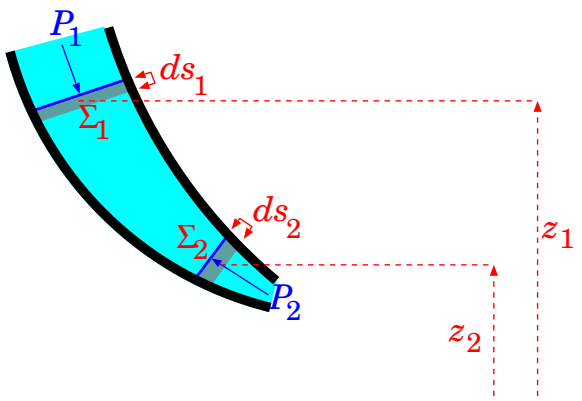


Figura 18.7: *Lavoro delle forze di pressione.*

Normalmente le quote z_1, z_2 e le sezioni Σ_1, Σ_2 sono note, perché dipendono dalla costruzione del tubo (vd Fig. 18.6). L'uso di queste equazioni può essere molteplice:

- si conoscono le pressioni P_1, P_2 e si ricavano le velocità u_1, u_2;
- si conoscono pressione e velocità ad una sezione (per esempio P_1, u_1) e si ricavano quelle attraverso un'altra sezione.

18.5.3 Considerazioni energetiche

Il teorema di Bernoulli si può dedurre anche da considerazioni energetiche. Consideriamo una porzione di liquido fra le due sezioni Σ_1, Σ_2, come in Fig. 18.7. Su di esso agisce la forza di gravità, conservativa, e le forze di pressione, che consideriamo come forze esterne.

Durante il movimento, il liquido che si trova in prossimità della sezione Σ_1 compie uno spostamento ds_1, mentre il liquido in prossimità della sezione Σ_2 compie uno spostamento ds_2. Essendo il liquido incomprimibile, il volume dV di liquido spostato deve essere lo stesso in prossimità di Σ_1 e Σ_2. La relazione fra queste quantità è:

$$\Sigma_1 \, ds_1 \;=\; dV \;=\; \Sigma_2 \, ds_2$$

Le forze di pressione su $\Sigma_!$, Σ_2 sono:

$$\begin{aligned} F_1 &= P_1\,\Sigma_1 \\ F_2 &= -P_2\,\Sigma_2 \end{aligned}$$

dove i segni tengono conto del diverso orientamento delle 2 forze. Il lavoro fatto dalle forze di pressione è:

$$\delta\mathcal{W}^{(est)} = (\Sigma_1 P_1)ds_1 - (\Sigma_2 P_2)ds_2 = (P_1 - P_2)\,dV$$

Questo deve uguagliare la variazione dell'energia meccanica della porzione di liquido che stiamo considerando:

$$\delta\mathcal{W}^{(est)} = dE = d\mathcal{E} + d\mathcal{U}$$

Ora, per calcolare $d\mathcal{E}$, $d\mathcal{U}$ dovremmo considerare gli spostamenti di tutti gli strati di liquido compresi fra Σ_1 e Σ_2. Tuttavia, a causa dell'ipotesi di stazionarietà, ciò è equivalente a supporre che lo strato adiacente a Σ_1 si sposti direttamente fino a diventare adiacente a Σ_2. Quindi:

$$\begin{aligned} d\mathcal{E} &= \frac{dm}{2}\left(u_2^2 - u_1^2\right) = \rho\,dV\left(\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2}\right) \\ d\mathcal{U} &= dm\,g\,(z_2 - z_1) = \rho\,dV\,g\,(z_2 - z_1) \end{aligned}$$

Mettendo insieme tutto e semplificando via il dV si trova:

$$P_1 - P_2 = \rho\left(\frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2}\right) + \rho\,g\,(z_2 - z_1)$$

che è equivalente all'Eq. (18.40).

18.5.4 Esercizi su liquidi in moto stazionario

Esercizio 18.8. *Si vuole travasare dell'olio da un grosso recipiente a delle damigiane, mediante l'uso di un imbuto conico, che ha diametro superiore* $D_1 = 15$ cm *e diametro inferiore* $D_2 = 2$ cm. *La densità dell'olio è* $\rho = 0.9$ g/cm^3. *Il livello dell'olio nell'imbuto viene mantenuto costante a* $h = 10$ cm *durante la mescita. Quanto tempo occorre per riempire una damigiana di 5 litri? Si assuma un flusso stazionario e si trascurino gli attriti.*

Risposta. *Bisogna ovviamente calcolare la portata* $\mathcal{Q}$ *dell'imbuto. Questa è uguale attraverso le sezioni superiore e inferiore:* $\mathcal{Q} = \Sigma_1 u_1 = \Sigma_2 u_2$, *essendo* $\Sigma_{1,2} = \pi\left(\frac{D_{1,2}}{2}\right)^2$. *Quindi occorre conoscere le velocità con cui l'olio fluisce. Il teorema di Bernoulli ci dice che:*

$$\frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} = g(z_1 - z_2)$$

Ora, la pressione ad entrambi gli estremi è quella atmosferica, quindi $P_1 = P_2$. *Inoltre* $z_1 - z_2 = h$ *è noto. Infine, possiamo esprimere* $u_1 = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} u_2 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 u_2$. *Quindi abbiamo:* $u_2^2 \left(1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right) = 2gh$, *ovvero* $u_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1-(D_2/D_1)^4}} = \sqrt{\frac{2(9.806\ \mathrm{m/s^2})(0.1\ \mathrm{m})}{1-(2/15)^4}} = 1.4\ \mathrm{m/s}$. *La portata è* $\mathcal{Q} = \Sigma_2 u_2 = \pi \left(\frac{D_2}{2}\right)^2 u_2 = 3.1415927\,(0.01\ \mathrm{m})^2\,(1.4\ \mathrm{m/s}) = 4.398 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^3/s}$. *Il volume da riempire è* $V = 5\ \ell = 5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3}$, *quindi il tempo necessario è* $\Delta t = \frac{V}{\mathcal{Q}} = 11.37\ \mathrm{s}$.

Esercizio 18.9. *In un tubo orizzontale di sezione variabile scorre dell'alcool etilico* ($\rho = 0.81\ \mathrm{g/cm^3}$). *Ai capi del tubo la pressione* P_1 *è pari a quella atmosferica, il diametro del tubo è* $D_1 = 1\ \mathrm{cm}$ *e la velocità è* $u_1 = 1\ \mathrm{m/s}$. *In una parte centrale il diametro si stringe fino a* D_2*: quanto deve valere* D_2 *perché la pressione* P_2 *si dimezzi rispetto a* P_1*? È possibile trovare un diametro ancora più stretto* D_3 *affinché la pressione si annulli?*

Risposta. *Il tubo è orizzontale, quindi la quota* z *è uguale ovunque, e l'equazione di Bernoulli si scrive:* $\frac{1}{\rho}(P_1 - P_2) = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2}$, *quindi* $u_2^2 = u_1^2 + \frac{2}{\rho}(P_1 - P_2)$. *Per avere* $P_2 = 0.5\,P_1$ *occorre che* $u_2 = \sqrt{u_1^2 + \frac{P_1}{\rho}} = \sqrt{(1\ \mathrm{m/s})^2 + \frac{1.013 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}}{810\ \mathrm{kg/m^3}}} = 11.23\ \mathrm{m/s}$. *Dalla conservazione della portata,* $\pi \left(\frac{D_1}{2}\right)^2 u_1 = \pi \left(\frac{D_2}{2}\right)^2 u_2$, *si trova che* $D_2 = D_1 \sqrt{\frac{u_1}{u_2}} = (1\ \mathrm{cm}) \sqrt{\frac{1\ \mathrm{m/s}}{11.23\ \mathrm{m/s}}} = 0.298\ \mathrm{cm}$.

Per avere $P_3 = 0$, *si ragiona nello stesso modo: deve essere* $u_3 = \sqrt{u_1^2 + 2\frac{P_1}{\rho}} = \sqrt{(1\ \mathrm{m/s})^2 + 2\frac{1.013 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}}{810\ \mathrm{kg/m^3}}} = 15.84\ \mathrm{m/s}$. *Quindi* $D_3 = D_1 \sqrt{\frac{u_1}{u_3}} = (1\ \mathrm{cm}) \sqrt{\frac{1\ \mathrm{m/s}}{15.84\ \mathrm{m/s}}} = 0.251\ \mathrm{cm}$.

Osservazione. *Si potrebbe pensare che, con sezioni ancora più piccole, si ottengano velocità ancora più elevate, dunque pressioni negative — il che è privo di senso fisico! Quello che succede nella realtà, è che per* $P \to 0$ *il liquido inizia a "bollire", producendo dunque bolle di gas. Queste non sono più a densità costante, quindi il sistema non è più nelle condizioni di applicare le equazioni di Bernoulli e della portata.*

Esercizio 18.10. *La superficie dell'acqua di un bacino artificiale si trova a quota* 1800 m *sul livello del mare. Una condotta forzata raccoglie acqua dal fondo del*

bacino e la porta ad una centrale elettrica situata a quota 1200 m *sul livello del mare. Calcolare la velocità di uscita dell'acqua.*

Risposta. *Come sempre si usa l'equazione di Bernoulli, per le quote* $z_1 =$ 1800 m *e* $z_2 = 1200$ m*:*

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + gz_1 \;=\; \frac{u_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + gz_2$$

Abbiamo due incognite, u_1, u_2*, e una sola equazione. Apparentemente mancano i dati per scrivere l'equazione della portata. Tuttavia è logico considerare* $u_1 = 0$*, essendo la sezione a quota* z_1 *(l'intera superficie dello specchio d'acqua) sicuramente mooolto maggiore della sezione a quota* z_2 *(la sezione della condotta al livello della centrale). Per le pressioni, possiamo assumere* $P_2 - P_1 = \rho' g(z_1 - z_2)$*, con* $\rho' = 1.3$ kg/m^3 *la densità dell'aria: si ottiene* $P_2 - P_1 = (1.3 \text{ kg/m}^3)(9.806 \text{ m/s}^2)(600 \text{ m}) = 7649$ Pa.

In conclusione, $u_2 = \sqrt{2\left(g\Delta z - \frac{\Delta P}{\rho}\right)} = 108.4$ m/s.

Una piccola osservazione: se avessimo trascurato la differenza di pressione dovuta all'atmosfera terrestre, avremmo trovato 108.5 m/s.

18.6 Dinamica dei fluidi: equazioni di Eulero (*)

Questo capitolo vuole essere un'introduzione, per i lettori più curiosi (e arditi...), alla trattazione generale della fluidodinamica. Si consiglia prima una conoscenza dei campi vettoriali e degli operatori differenziali definiti su di essi — vedi Capitolo 17.

Finora abbiamo studiato la dinamica du un volumetto δV di fluido, soggetto a forze di volume e di superficie: questo approccio si chiama *punto di vista Lagrangiano*, e il volumetto δV si chiama per questo *elemento Lagrangiano di fluido.*

Un altro approccio è quello di considerare come oggetto di studio tutto il *campo vettoriale* $\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{r}}; t)$ delle velocità di deriva, come funzione della posizione $\vec{\boldsymbol{r}}$ e del tempo t. Questo approccio si chiama *punto di vista Euleriano.*

Una variazione $d\vec{\boldsymbol{u}}$ della velocità dell'elemento Lagrangiano può essere vista come dovuta sia al passare del tempo (dt) che allo spostarsi nello spazio

$(d\vec{\boldsymbol{r}})$: pertanto

$$\begin{aligned} d\vec{\boldsymbol{u}} &= \vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{r}}+d\vec{\boldsymbol{r}};t+dt)-\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{r}};t) \\ &= \vec{\boldsymbol{u}}(x+dx,y+dy,z+dz;t+dt)-\vec{\boldsymbol{u}}(x,y,z;t) \\ &= \frac{\partial\vec{\boldsymbol{u}}}{\partial t}dt \;+\; \frac{\partial\vec{\boldsymbol{u}}}{\partial x}dx \;+\; \frac{\partial\vec{\boldsymbol{u}}}{\partial y}dy \;+\; \frac{\partial\vec{\boldsymbol{u}}}{\partial z}dz \end{aligned}$$

Esprimendo $dx = u_x dt,\ dy = u_y dt,\ dz = u_z dt$

$$d\vec{\boldsymbol{u}} \;=\; \left(\frac{\partial\vec{\boldsymbol{u}}}{\partial t} \;+\; \frac{\partial\vec{\boldsymbol{u}}}{\partial x}u_x \;+\; \frac{\partial\vec{\boldsymbol{u}}}{\partial y}u_y \;+\; \frac{\partial\vec{\boldsymbol{u}}}{\partial z}u_z\right) dt$$

quindi

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{u}}}{dt} \;=\; \frac{\partial\vec{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + u_x\frac{\partial\vec{\boldsymbol{u}}}{\partial x} + u_y\frac{\partial\vec{\boldsymbol{u}}}{\partial y} + u_z\frac{\partial\vec{\boldsymbol{u}}}{\partial z}$$

Si suole chiamare $\dfrac{d\vec{\boldsymbol{u}}}{dt}$ la *derivata totale* di $\vec{\boldsymbol{u}}$ rispetto al tempo — per distinguerla dalla derivata parziale $\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{u}}}{\partial t}$.

Ricordando che l'operatore gradiente è definito come

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \;\equiv\; \left(\frac{\partial}{\partial x}\,,\,\frac{\partial}{\partial y}\,,\,\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

possiamo scrivere in forma compatta

$$u_x\frac{\partial}{\partial x} + u_y\frac{\partial}{\partial y} + u_z\frac{\partial}{\partial z} \;\equiv\; \vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}$$

e quindi

$$\vec{\boldsymbol{a}} \;=\; \frac{d\vec{\boldsymbol{u}}}{dt} \;=\; \frac{\partial\vec{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + \left(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}\right)\vec{\boldsymbol{u}} \tag{18.42}$$

Ora l'equazione della dinamica, Eq. (18.21), si può scrivere come:

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + \left(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}\right)\vec{\boldsymbol{u}}\right] \;=\; -\vec{\boldsymbol{\nabla}}P + \rho\,\vec{\boldsymbol{g}} + \eta\nabla^2\vec{\boldsymbol{u}} \tag{18.43}$$

Questa è l'*equazione di Eulero* per la dinamica di un fluido.

Il significato di questa equazione è il seguente: se ad un dato istante iniziale t_0 conosco il campo vettoriale delle velocità $\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{r}};t_0)$ in ogni punto, e il campo scalare delle pressioni $P(\vec{\boldsymbol{r}};t_0)$, allora posso calcolare in ogni punto

$\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{u}}}{\partial t}$, e quindi dedurre il campo di velocità $\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{r}}; t_0 + dt)$ all'istante $(t_0 + dt)$. Iterando, si può studiare quindi come $\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{r}}; t)$ evolve nel tempo.

Un altro approccio potrebbe essere di studiare le *soluzioni stazionarie*, cioè quelle in cui $\vec{\boldsymbol{u}}$, ρ, P non dipendono dal tempo: $\vec{\boldsymbol{u}} \equiv \vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{r}})$, $P \equiv P(\vec{\boldsymbol{r}})$, $\rho \equiv \rho(\vec{\boldsymbol{r}})$; in particolare, $\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{u}}}{\partial t} = 0$. Inoltre, si suppone che le *condizioni al contorno* siano note, ovvero si conoscono $\vec{\boldsymbol{u}}$, ρ, P in ogni punto della superficie che delimita il volume in cui scorre il fluido (per esempio le pareti di un tubo). Con questi dati, si cerca di calcolare quanto valgono i campi $\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{r}})$, $P(\vec{\boldsymbol{r}})$, $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$ in ogni punto del fluido.

Va notato che, in generale, la soluzione di equazioni di questo genere è molto complessa, e richiede tecniche di calcolo analitico e/o numerico che trascendono lo scopo di questo testo.

L'Eq. (18.43) è vettoriale, pertanto fornisce 3 equazioni — una per ogni componente cartesiana. Le funzioni incognite sono $\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{r}}; t)$ (vettoriale, quindi con 3 componenti cartesiane), $P(\vec{\boldsymbol{r}}; t)$ e $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}; t)$, quindi in totale 5 funzioni incognite. Nel caso che il fluido sia un liquido, ρ diventa una costante e le incognite restano 4. In ogni caso occorre cercare (almeno) un'altra equazione.

Se consideriamo un volume V di spazio, contenente una massa M di fluido, essa vale:

$$M \;=\; \int_V dV' \, \rho(\vec{\boldsymbol{r}}'; t)$$

Se tale massa varia nel tempo, tale variazione deve essere necessariamente dovuta a un flusso di massa attraverso la superficie chiusa Σ che delimita il volume V. Attraverso una porzione infinitesima $\delta\Sigma$ di tale superficie, il volumetto di fluido che può passare in un tempo dt è

$$\delta V = -(\vec{\boldsymbol{u}} dt) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \delta\Sigma$$

e quindi la migrazione di massa è:

$$\delta m = \rho \, \delta V = -\rho \cdot (\vec{\boldsymbol{u}} dt) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \delta\Sigma$$

Pertanto la variazione totale di massa entro V è:

$$\frac{dM}{dt} \;=\; -\int_\Sigma \rho \vec{\boldsymbol{u}} \cdot (\hat{\boldsymbol{n}} d\Sigma) \;=\; -\boldsymbol{\Phi}_\Sigma(\rho \vec{\boldsymbol{u}})$$

Il "teorema della divergenza" consente di scrivere un integrale di flusso come integrale di volume:

$$\boldsymbol{\Phi}_\Sigma(\rho \vec{\boldsymbol{u}}) \;=\; \int_V dV' \, \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\rho \vec{\boldsymbol{u}})$$

quindi troviamo

$$\int_V dV' \, \frac{\partial \rho}{\partial t} \;=\; \frac{dM}{dt} \;=\; -\int_V dV' \, \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\rho \vec{\boldsymbol{u}})$$

Siccome questa equazione deve valere per qualunque scelta di V, occorre che le funzioni integrande siano identiche:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\rho \vec{\boldsymbol{u}}) \;=\; 0 \tag{18.44}$$

Questa è l'*equazione di continuità*. Nel caso dei liquidi, in cui ρ è costante e uniforme ovunque, essa si riduce a

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} \;=\; 0 \qquad \text{(liquidi)} \tag{18.45}$$

Capitolo 19

Moti in campi gravitazionali

La forza di gravità produce attrazione fra qualunque coppia di oggetti dotati di massa. È responsabile della caduta di un oggetto verso il basso, ma anche del moto orbitale della Luna intorno alla Terra, del moto dei pianeti intorno al Sole, dell'aggregazione delle stelle in galassie... Come si vede, una sola legge può descrivere in modo coerente fenomeni a prima vista molto diversi fra loro.

19.1 Gravitazione universale

La *legge della gravitazione universale*, formulata da Isaac Newton, è il primo esempio di "teoria unificata" della fisica.

Essa si formula così: *Due oggetti di masse m_1 e m_2, sufficientemente piccoli rispetto alla distanza D che li separa, si attraggono con una forza proporzionale al prodotto delle masse, e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza*:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{D^2} \tag{19.1}$$

vd Fig. 19.1 (sinistra). *La direzione di tale forza è lungo la retta che congiunge le due masse. La costante di proporzionalità G si chiama "costante gravitazionale universale" o "costante di Newton" ed è indipendente dalla natura delle masse. Il suo valore è:*

$$G = 6.67384 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}} \tag{19.2}$$

Il valore di G è molto piccolo! In effetti, la gravità è la più debole delle forze esistenti in natura. Nell'interazione fra atomi, molecole, ma anche fra oggetti di uso quotidiano, ha effetti del tutto trascurabili.

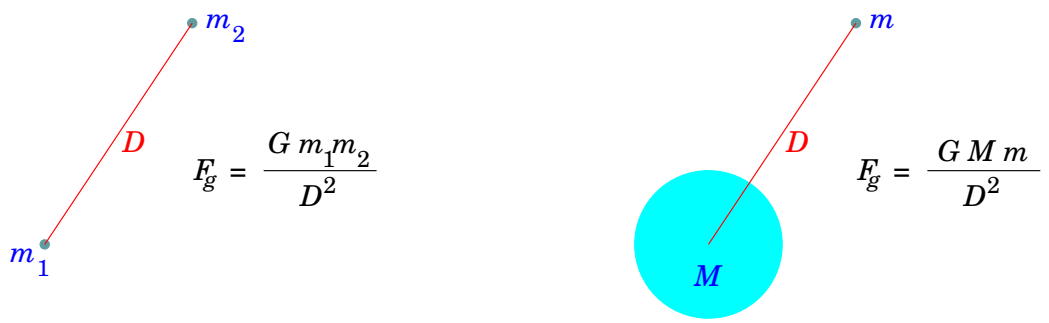


Figura 19.1: *Forza di gravità: a sinistra, fra due masse puntiformi m_1, m_2 a distanza D; a destra, fra una massa estesa sferica M e una massa puntiforme m posta a distanza D dal centro della massa sferica.*

Esercizio 19.1. *Calcolare la forza gravitazionale agente fra due masse di* 1 kg, *poste alla distanza di* 1 m *l'una dall'altra.*

Risposta. *applicando l'Eq. (19.1) si ottiene* $F = 6.67384 \cdot 10^{-11}$ N.

Allora, come fa la gravità a tenere insieme i sistemi planetari? La risposta sta nelle *enormi masse* che caratterizzano i pianeti e soprattutto le stelle.

19.1.1 Massa sferica non puntiforme

Conviene anticipare qui un risultato che dimostreremo più avanti, in Sezione 19.8. Se abbiamo un oggetto *esteso* di massa M, a *simmetria sferica*, e un oggetto di massa m puntiforme, esterno all'oggetto sferico, la forza gravitazionale fra essi è sempre data da

$$F_g = \frac{GMm}{D^2}$$

essendo D la distanza fra il centro di M e m — vd Fig. 19.1 (destra). Quindi, la massa M estesa sferica si comporta come se fosse tutta concentrata nel suo centro.

Esercizio 19.2. *Un oggetto, lasciato cadere in prossimità della superficie terrestre, si muove di moto uniformemente accelerato verso il basso: l'accelerazione misurata è* $g = 9.81$ ms^{-2}. *Approssimando la Terra come una sfera di raggio* $R_\oplus = 6\,371$ km, *calcolarne la massa* $M_\oplus$.

Risposta. *Un oggetto cade con accelerazione g, pertanto se m è la sua massa, è soggetto ad una forza mg. Tale forza è dovuta all'attrazione gravitazionale fra le*

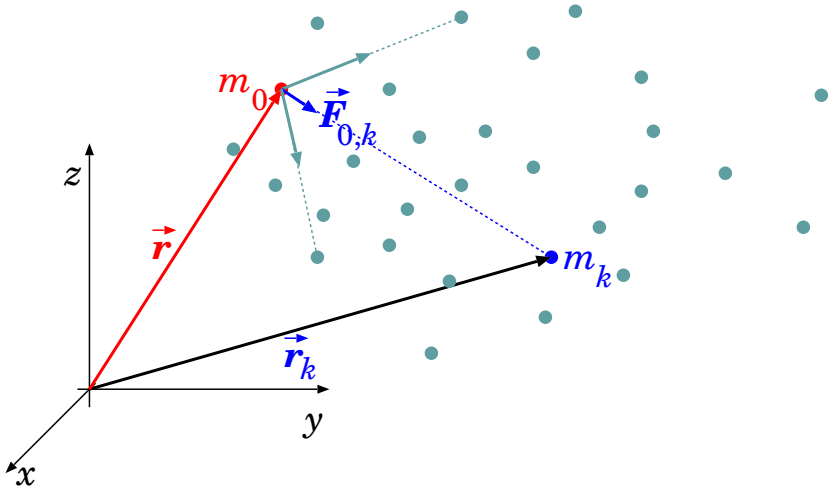


Figura 19.2: *Forze gravitazionali su una massa-sonda m_0, prodotte da masse circostanti $m_1, \ldots, m_N$. In evidenza, la k-esima massa m_k posta in posizione $\vec{r}_k$, che produce una forza $\vec{F}_{0,k}$ sulla massa-sonda m_0.*

due masse in gioco, m e $M_\oplus$, pertanto è calcolabile con l'Eq. (19.1):

$$mg = G\frac{mM_\oplus}{R_\oplus^2} \qquad \Longrightarrow \qquad M_\oplus = \frac{gR_\oplus^2}{G}$$

Osserviamo che il risultato non dipende dalla massa m dell'oggetto. Inserendo i dati si trova

$$M_\oplus = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

La massa della Terra è circa 6000 miliardi di miliardi di tonnellate!

19.2 Il campo gravitazionale

Consideriamo un oggetto puntiforme di massa m_0, posizionato in $\vec{r}$: poiché useremo questa massa per calcolare (o misurare) la forza gravitazionale prodotta da altre masse, chiamiamo m_0 *massa-sonda*.

La massa-sonda m_0 sente la forza gravitazionale prodotta da un insieme di altre masse puntiformi $m_1, \ldots, m_n$, poste rispettivamente nelle posizioni $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n$ — vd Fig. 19.2.

L'intensità della forza gravitazionale prodotta da m_k su m_0 è data dall'Eq. (19.1), in cui la distanza fra le due masse è data da $|\vec{r} - \vec{r}_k|$:

$$F_{0k} = G\frac{m_k m_0}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^2}$$

Questa è un'espressione scalare. Per combinare le azioni di tutte le masse $m_1, \ldots, m_n$ occorre trovare l'espressione vettoriale per la forza. Essa deve essere orientata lungo la direzione che congiunge le masse m_0 e m_k, e diretta verso quest'ultima, poiché è sempre attrattiva. Pertanto $\vec{\boldsymbol{F}}_{0k}$ è diretta come $-(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k)$.

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{0k} = -G\frac{m_k m_0}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k|^3}(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k) \tag{19.3}$$

La forza gravitazionale totale prodotta dal sistema di masse $m_1, \ldots, m_n$ su m_0 è

$$\vec{\boldsymbol{F}}_0(\vec{\boldsymbol{r}}) = -Gm_0 \sum_k \frac{m_k}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k|^3}(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k) \tag{19.4}$$

dove la scrittura $\vec{\boldsymbol{F}}_0(\vec{\boldsymbol{r}})$ enfatizza che essa dipende sia dalla massa m_0 che dalla posizione $\vec{\boldsymbol{r}}$.

Qualunque sia la distribuzione delle masse $m_1, \ldots, m_n$, la forza su m_0 è sempre proporzionale ad m_0. Questo suggerisce di definire un'altra quantità, indipendente dalla massa-sonda: il *campo gravitazionale* definito come $\vec{\boldsymbol{F}}_0(\vec{\boldsymbol{r}})/m_0$:

$$\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -G \sum_k \frac{m_k}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k|^3}(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k) \tag{19.5}$$

Questo dipende solo dalla posizione relativa del punto in cui lo si calcola rispetto al sistema di masse $m_1, \ldots, m_n$ che lo generano.

19.2.1 Massa inerziale e gravitazionale, principio di equivalenza

Abbiamo già osservato più volte che, se la massa-sonda non risente di altre forze oltre a quelle gravitazionali, la sua accelerazione *coincide* con il campo gravitazionale $\vec{\boldsymbol{g}}$:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}_0}{m_0} = \vec{\boldsymbol{g}}$$

Questa caratteristica è unica per la forza gravitazionale. La ragione risiede nella *identità fra la massa come inerzia dell'oggetto e come capacità di sentire forze gravitazionali.* Queste due proprietà si chiamano rispettivamente *massa*

inerziale e *massa gravitazionale*; potremmo definirle così:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \underbrace{m}_{\hookrightarrow \text{ massa inerziale}} \vec{\boldsymbol{a}} \qquad (\vec{\boldsymbol{F}} \text{ forza qualunque})$$

$$\vec{\boldsymbol{F}}_g = \underbrace{m_g}_{\hookrightarrow \text{ massa gravitazionale}} \vec{\boldsymbol{g}} \qquad (\vec{\boldsymbol{F}}_g \text{ forza gravitazionale})$$

In linea di principio, sarebbero due quantità diverse, ma la loro identità è stata provata sperimentalmente con altissima precisione: è una legge di natura, nota come *principio di equivalenza* [1]:

$$m \equiv m_g \qquad \text{(principio di equivalenza)}$$

19.3 Energia gravitazionale

La forza gravitazionale è conservativa. Quindi ammette un'energia potenziale $\mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}})$, tale che l'energia meccanica $E = \mathcal{E} + \mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}})$ sia costante per un oggetto in moto nel campo gravitazionale.

Abbiamo già visto questo risultato nel Capitolo 13 (in particolare Sezione 13.7, Eq. (13.22)). Ripetiamo il ragionamento, per autoconsistenza di questo capitolo.

19.3.1 Campo centrale

Consideriamo il campo gravitazionale centrale generato da una massa M, per semplicità posta nell'origine O del nostro riferimento. La forma del campo gravitazionale diventa relativamente semplice:

$$\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -GM\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3} \tag{19.6}$$

Vogliamo calcolare il lavoro $\mathcal{W}$ fatto dalla forza gravitazionale $\vec{\boldsymbol{F}} = m_0\vec{\boldsymbol{g}}$ lungo una linea Γ dalla posizione (1) alla posizione (2). Cominciamo con il

[1] Su questo principio Einstein fondò la Relatività Generale: si tratta di una teoria estremamente predittiva, che spiega quantitativamente una serie di osservazioni astrofisiche molto diverse fra loro, dall'anomalia dell'orbita di Mercurio, all'esistenza dei buchi neri, alle orbite di oggetti massicci come stelle di neutroni, fino alle onde gravitazionali, recentemente osservate.

calcolo del lavoro elementare $\delta\mathcal{W}$ per uno spostamento da $\vec{\boldsymbol{r}}$ a $\vec{\boldsymbol{r}} + d\vec{\boldsymbol{r}}$:

$$\delta\mathcal{W} \quad = \quad \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = -GMm_0 \frac{\vec{\boldsymbol{r}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}$$

Abbiamo già visto (vedi Sezione 13.7) come trattare forme differenziali del tipo $\vec{\boldsymbol{r}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$ o $r\,dr$:

$$\vec{\boldsymbol{r}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = d\left(\frac{\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{r}}}{2}\right) = d\left(\frac{r^2}{2}\right) = r\,dr$$

Pertanto si trova:

$$\delta\mathcal{W} \quad = \quad \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = -GMm_0 \frac{dr}{r^2}$$

È un risultato notevole! Il lavoro elementare dipende solo dalla distanza radiale r e dalla sua variazione dr, *non dalla direzione di* $d\vec{\boldsymbol{r}}$. La ragione di questo è che il campo $\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ ha direzione radiale e dipendenza radiale. Qualunque campo $\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = f(r)\hat{\boldsymbol{r}}$ darebbe questo risultato.

Ora possiamo integrare il lavoro elementare sulla linea Γ da (1) a (2):

$$\mathcal{W}_{(1)\to(2)} \quad = \quad \int_\Gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = -GMm_0 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = GMm_0 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

(il calcolo dell'integrale è stato effettuato usando la funzione primitiva di $1/r^2$, che è $-1/r$). In breve, $\mathcal{W}$ non dipende dalla curva Γ ma solo dagli estremi (1) e (2) — anzi, solo dalle loro distanze radiali r_1, r_2 dal centro.

Quindi un campo gravitazionale centrale prodotto da una massa puntiforme M è conservativo. L'energia potenziale $\mathcal{U}$ deve soddisfare la relazione

$$\mathcal{U}(1) - \mathcal{U}(2) = \mathcal{W}_{(1)\to(2)} = GMm_0 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

La scelta ovvia è:

$$\mathcal{U}(r) = -\frac{GMm_0}{r} \tag{19.7}$$

19.3.2 Generalizzazione

Essendo conservativa la forza gravitazionale prodotta da una massa puntiforme, anche quella prodotta da un sistema di masse lo è.

In effetti, se $\vec{\boldsymbol{F}} = \sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i$, allora il lavoro lungo una curva Γ da A a B è

$$\mathcal{W} = \int_\Gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{d}}\vec{\boldsymbol{r}} = \int_\Gamma \left(\sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i \right) \cdot \vec{\boldsymbol{d}}\vec{\boldsymbol{r}} = \sum_i \int_\Gamma \vec{\boldsymbol{F}}_i \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$$

(per l'ultimo passaggio: l'integrale di una somma è pari alla somma degli integrali — vd regole in Sezione 3.3). Ora $\vec{\boldsymbol{F}}_i$ è prodotta dalla massa i-esima, che si trova nella posizione $\vec{\boldsymbol{r}}_i$. Pertanto, dall'Eq. (19.7), per traslazione,

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \vec{\boldsymbol{F}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{d}}\vec{\boldsymbol{r}} &= \mathcal{U}(|\vec{\boldsymbol{r}}_A - \vec{\boldsymbol{r}}_i|) - \mathcal{U}(|\vec{\boldsymbol{r}}_B - \vec{\boldsymbol{r}}_i|) \\ &= G m_i m_0 \left(\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}_B - \vec{\boldsymbol{r}}_i|} - \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}_A - \vec{\boldsymbol{r}}_i|} \right) \end{aligned}$$

quindi

$$\mathcal{W} = G m_0 \sum_i m_i \left(\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}_B - \vec{\boldsymbol{r}}_i|} - \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}_A - \vec{\boldsymbol{r}}_i|} \right)$$

Il lavoro dipende solo dai punti estremi $\vec{\boldsymbol{r}}_A$ e $\vec{\boldsymbol{r}}_B$, e non dalla curva Γ. L'energia potenziale gravitazionale è

$$\mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -G m_0 \sum_i \frac{m_i}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_i|} \tag{19.8}$$

19.3.3 Energia potenziale vicino alla superficie terrestre

In prossimità della superficie terrestre, siamo abituati a scrivere la forza di gravità (o forza-peso) e la corrispondente energia potenziale come

$$\vec{\boldsymbol{F}}_g = -mg\hat{\boldsymbol{z}} \qquad ; \qquad \mathcal{U} = mgh \qquad\qquad \text{(forza-peso)}$$

Come si conciliano queste espressioni con

$$\vec{\boldsymbol{F}}_g = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \qquad ; \qquad \mathcal{U}_g = -\frac{GMm}{r}$$

trovate per il campo centrale?

In prossimità della superficie terrestre, ad un'altezza h da essa, possiamo scrivere la distanza r dal centro della Terra come

$$r = R + h$$

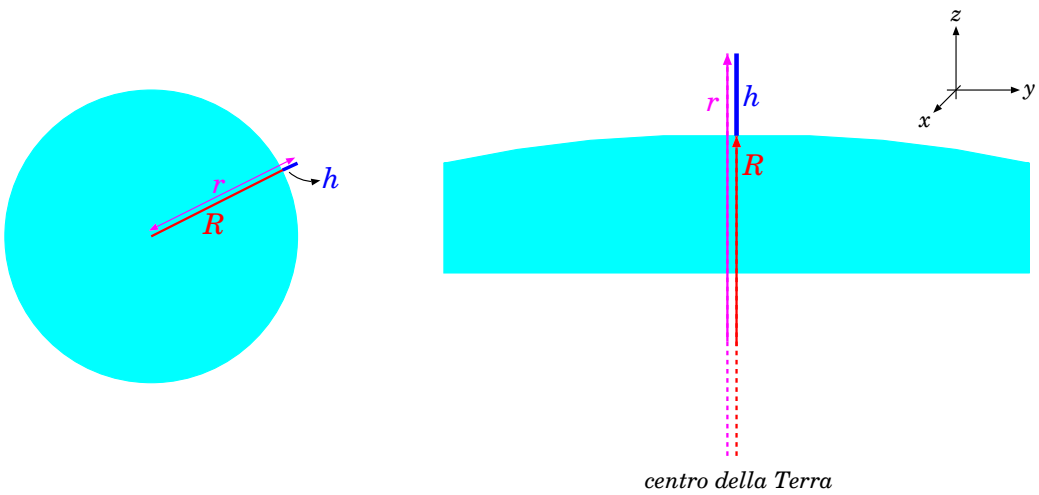


Figura 19.3: *Relazione fra altezza h dal suolo, raggio R del pianeta, e distanza r dal centro del pianeta.*

essendo R il raggio della Terra — vd Fig. 19.3. L'asse z è scelto orientato in verticale verso l'alto, pertanto localmente $\hat{\boldsymbol{z}} \equiv \hat{\boldsymbol{r}}$. Alla superficie deve essere $-mg\hat{\boldsymbol{z}} = -\dfrac{GMm}{R^2}\hat{\boldsymbol{r}}$, ovvero

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

Ora trattiamo l'energia potenziale:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_g &= -\frac{GMm}{R+h} = -\frac{GMm}{R\left(1+\dfrac{h}{R}\right)} = -\frac{GMm}{R}\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-1} \\
&\simeq -\frac{GMm}{R}\left(1-\frac{h}{R}\right) = -\frac{GMm}{R} + \frac{GMm}{R^2}h \\
&= -\frac{GMm}{R} + mgh
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo ritrovato la familiare espressione mgh, più un termine additivo $-\dfrac{GMm}{R}$: questo però non deve preoccuparci, perché l'energia potenziale è sempre definita a meno di una costante additiva, che dipende da dove è stato scelto il suo "zero".

A scanso di equivoci: l'energia potenziale generata da un oggetto sferico è sempre $\mathcal{U}_g = -\dfrac{GMm}{r}$. L'espressione $\mathcal{U} = mgh$ è un'approssimazione, valida

solo per $h \ll R$ — ricordiamo che il raggio della Terra è $R = 6370$ km, e quindi, al limite, anche sul Monte Everest ($h = 8.8$ km) l'approssimazione è ragionevole! Già non lo è più se consideriamo satelliti in orbita, tipicamente a $h \gtrsim 200$ km.

Accuratezza dell'approssimazione mgh

Usando i dati della Terra, vediamo come si discostano i valori di $\mathcal{U}_g^{approx} = mgh$ rispetto a quelli esatti ottenuti come $\mathcal{U}_g = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$, a diverse altezze h dal suolo, per una massa $m = 1$ kg:

h	$\mathcal{U}_g$ $GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$	$\mathcal{U}_g^{approx}$ mgh	Δ_{rel} $\frac{\mathcal{U}_g^{approx} - \mathcal{U}_g}{\mathcal{U}_g}$	
100 m	980.58 J	980.60 J	$1.57 \cdot 10^{-5}$	
1000 m	9804.5 J	9806.0 J	$1.57 \cdot 10^{-4}$	
8840 m	86565 J	86685 J	$1.39 \cdot 10^{-3}$	*M.te Everest*
200 km	1.902 MJ	1.961 MJ	0.031	*orbita LEO*
400 km	3.690 MJ	3.922 MJ	0.063	*ISS*
36000 km	53.07 MJ	353.01 MJ	5.65	*orbita GEO*

Ad altezze comparabili con i rilievi terrestri, la discrepanza introdotta da mgh arriva al massimo allo 0.1%, sul Monte Everest. Per orbite basse ("LEO") già si commetterebbe un errore di alcuni %, mentre per l'orbita geostazionaria ("GEO") l'espressione mgh è totalmente inadeguata!

19.4 Potenziale gravitazionale

L'energia potenziale $\mathcal{U}$ è sempre proporzionale alla massa-sonda m_0, pertanto è utile definire il *potenziale gravitazionale* come:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\mathcal{U}(\vec{r})}{m_0} \tag{19.9}$$

Per il campo centrale:

$$\Phi(r) = \frac{\mathcal{U}(r)}{m_0} = -\frac{GM}{r} \qquad \text{(campo centrale)} \tag{19.10}$$

mentre per un generico sistema di masse m_i poste nelle posizioni $\vec{r}_i$:

$$\Phi(\vec{r}) = -G\sum_i \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \tag{19.11}$$

Così come la relazione fra forza e energia potenziale è:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\mathcal{U} \tag{19.12}$$

analogamente la relazione fra il campo gravitazionale $\vec{\boldsymbol{g}}$ e il potenziale gravitazionale Φ è

$$\vec{\boldsymbol{g}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\Phi \tag{19.13}$$

Confrontando le due equazioni per il campo $\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ e il potenziale $\Phi(\vec{\boldsymbol{r}})$:

$$\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -G\sum_k \frac{m_k}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k|^3}(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k) \qquad ; \qquad \Phi(\vec{\boldsymbol{r}}) = -G\sum_i \frac{m_i}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_i|}$$

si vede che il calcolo di $\Phi(\vec{\boldsymbol{r}})$ è di gran lunga più semplice, perché implica la somma di quantità scalari. Dovendo calcolare $\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})$ generato da un sistema di masse, in generale è più conveniente calcolare $\Phi(\vec{\boldsymbol{r}})$ e poi fare $\vec{\boldsymbol{g}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\Phi$.

19.5 Il Sistema Solare

Il Sistema Solare è costituito dal Sole, *al centro*, da quattro piccoli pianeti rocciosi (Mercurio, Venere, Terra, Marte), quattro grandi pianeti gassosi (Giove, Saturno, Urano, Nettuno), diversi "planetoidi" (Cerere, Plutone, Eris, Sedna, ...), i satelliti dei pianeti (la Luna, Phobos e Deimos che orbitano intorno a Marte, le decine di satelliti dei pianeti gassosi), e infine una miriade di oggetti più piccoli (asteroidi, comete, ...) dislocati fino a distanze molto grandi. Le orbite degli otto pianeti e quella di Plutone sono rappresentate in scala, in Fig. 19.4: sono tutte *approssimativamente* circolari e *approssimativamente* co-planari.

In realtà sono *ellittiche*, con il Sole in un fuoco, e alcune (specialmente quella di Plutone) si discostano sensibilmente dal piano orbitale della Terra. Un'orbita ellittica è caratterizzata da una distanza minima r_{min} e una distanza massima r_{max} dal centro di gravità (il Sole, nel caso dei pianeti). I punti di minima e massima distanza si chiamano *perielio* e *aphelio*. Un'orbita ellittica è parametrizzata dall'*eccentricità*, definita come

$$\epsilon = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}} \qquad \text{(eccentricità)}$$

Plutone e gli altri planetoidi sono quelli con l'eccentricità più elevata. Eris ha il perielio a $r_{min} \sim 6 \cdot 10^9$ km e l'aphelio a $r_{max} \sim 16 \cdot 10^9$ km; per Sedna $r_{min} \sim 11 \cdot 10^9$ km e l'aphelio a $r_{max} \sim 140 \cdot 10^9$ km! I parametri dei principali oggetti del Sistema Solare sono riassunti in Tabella 19.1.

oggetto celeste		distanza dal Sole		massa			periodo orbitale		eccen.	incl.
		(10^6 km)	(A.U.)	(kg)	($M_\oplus$)	($M_\odot$)	(giorni)	(anni)		(gradi)
Sole	☉			$1.989 \cdot 10^{30}$	333 000					
Mercurio	☿	57.9	0.390	$3.301 \cdot 10^{23}$	0.0552	$0.166 \cdot 10^{-6}$	88.87	0.243	0.206	7.00
Venere	♀	108.2	0.723	$4.867 \cdot 10^{24}$	0.815	$2.448 \cdot 10^{-6}$	224.70	0.615	0.007	3.39
Terra	⊕	149.6	1	$5.972 \cdot 10^{24}$	1	$3.003 \cdot 10^{-6}$	365.25	1	0.017	0.00
Marte	♂	227.9	1.524	$6.417 \cdot 10^{23}$	0.107	$0.323 \cdot 10^{-6}$	686.97	1.881	0.093	1.85
Giove	♃	778.3	5.203	$1.899 \cdot 10^{27}$	318	$954.8 \cdot 10^{-6}$	4 332.59	11.862	0.048	1.31
Saturno	♄	1 427.0	9.539	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.2	$285.9 \cdot 10^{-6}$	10 759.22	29.457	0.054	2.48
Urano	♅	2 871.0	19.18	$8.682 \cdot 10^{25}$	14.5	$43.66 \cdot 10^{-6}$	30 799.10	84.323	0.047	0.77
Nettuno	♆	4 497.1	30.06	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.1	$51.51 \cdot 10^{-6}$	60 190.03	164.791	0.009	1.77
Plutone	♇	5 913.0	39.53	$1.471 \cdot 10^{22}$	0.0025	$0.007 \cdot 10^{-6}$	90 465	247.680	0.249	17.14

Tabella 19.1: *Parametri dei principali oggetti del Sistema Solare: masse, distanze dal Sole e periodi orbitali. L'acronimo A.U. ("astronomical units") indica la distanza Sole-Terra.*

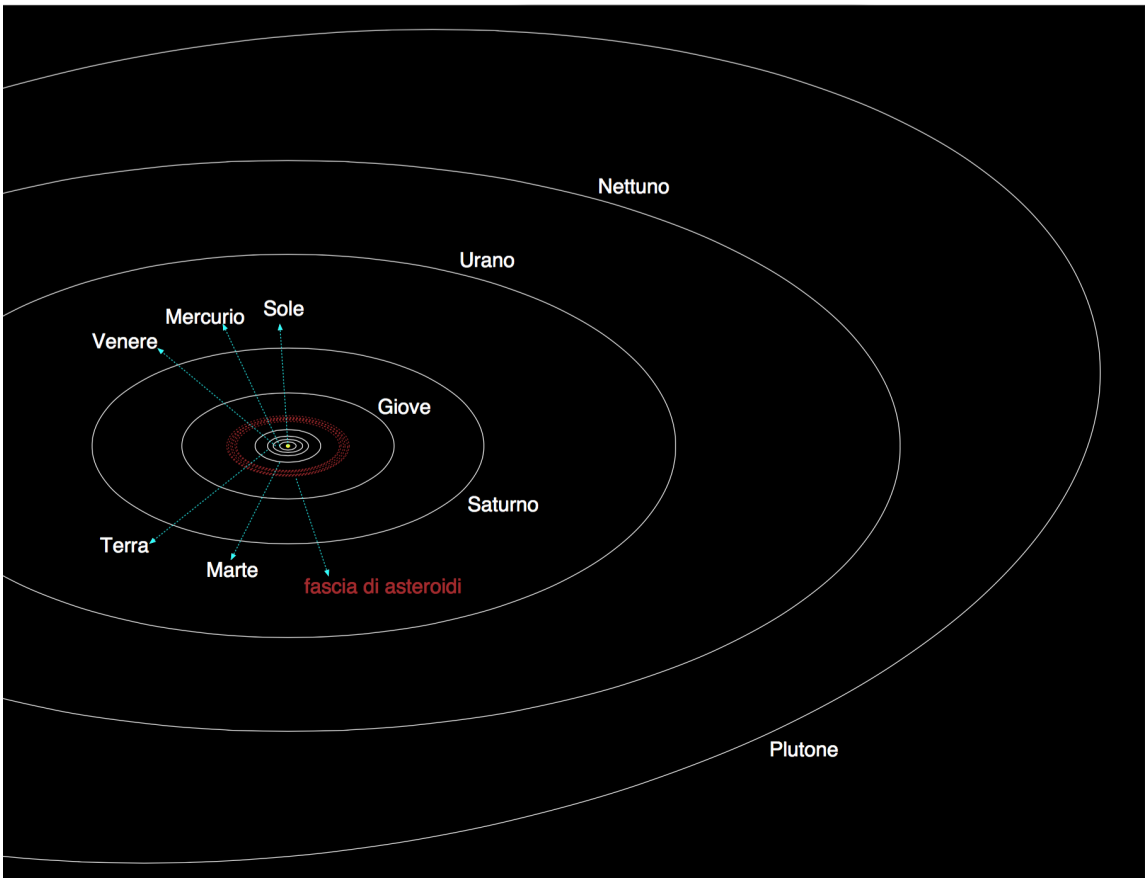


Figura 19.4: *Orbite dei pianeti del Sistema Solare.*

A rigore, tutti gli oggetti del Sistema Solare contribuiscono a generare il campo gravitazionale, secondo l'Eq. (19.5). Nella pratica, i satelliti risentono solo dell'attrazione gravitazionale del "loro" pianeta: l'orbita della Luna è controllata sostanzialmente dal campo gravitazionale generato dalla Terra. Viceversa, allontanandosi da un pianeta, l'effetto gravitazionale di gran lunga dominante è quello del Sole, che contiene più del 99.9% della massa totale del Sistema Solare. Per convincersi di queste affermazioni, basta costruire una mappa del potenziale gravitazionale generato dai corpi del Sistema Solare, facendo uso dell'Eq. (19.11):

$$\Phi(\vec{\boldsymbol{r}}) = -G \sum_i \frac{m_i}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_i|}$$

Il risultato è in Fig. 19.5. Si assume che tutti i pianeti giacciano su un piano (approssimazione abbastanza ragionevole). Il Sole sta al centro, le coordinate sul piano orizzontale sono espresse in unità di distanza

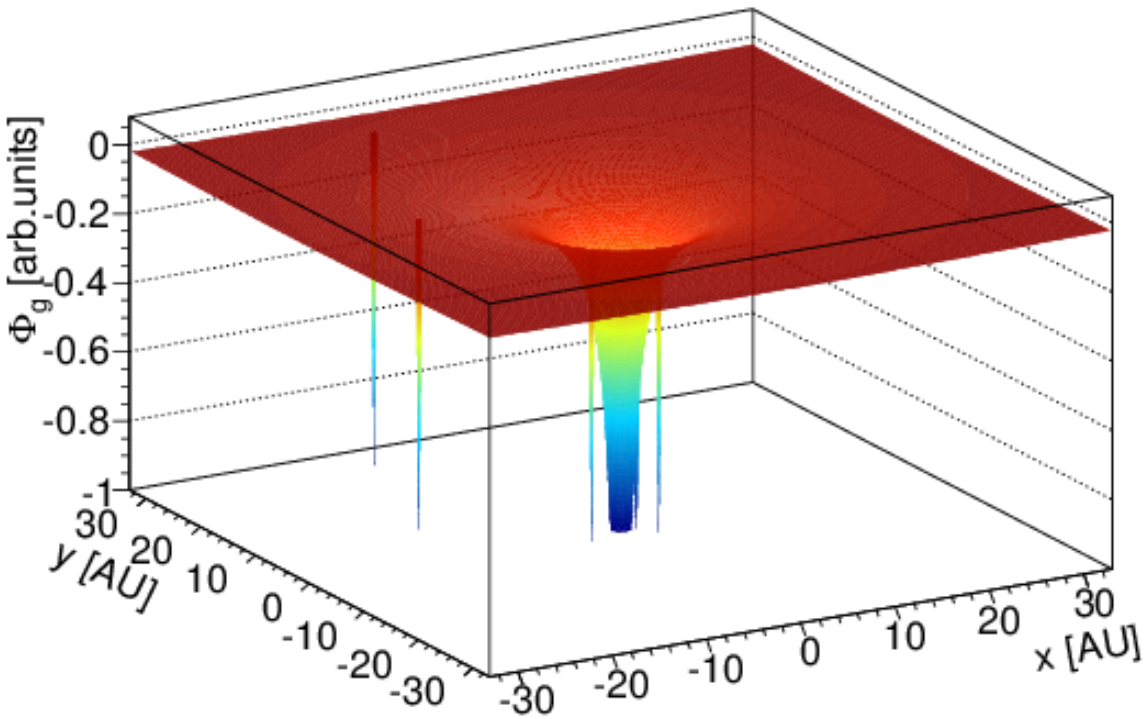


Figura 19.5: *Potenziale gravitazionale Φ_g del Sistema Solare.*

Sole-Terra (A.U., "astronomical units"). L'asse verticale rappresenta il potenziale gravitazionale. Il grosso "pozzo gravitazionale" al centro è l'effetto gravitazionale del Sole; gli effetti dei singoli pianeti sono visibili come i piccoli "pozzetti" aghiformi. In figura sono ben visibili quelli di Giove, Saturno, Urano e Nettuno. Quelli dei 4 pianeti interni nella figura si confondono col pozzo del Sole: bisognerebbe ingrandire di più la zona centrale per vederli. È chiaro che, fatte salve le immediate vicinanze di un pianeta, tutto l'effetto gravitazionale è dato dal Sole.

Per queste ragioni, in prima approssimazione è utile e motivato concentrarsi sul campo gravitazionale generato da un solo corpo celeste (pianeta o stella che sia). Per esempio, il moto dei pianeti è descrivibile con buona approssimazione come se l'unica forza agente su ciascuno di essi fosse l'attrazione gravitazionale del Sole. Analogamente, il moto dei satelliti (naturali o artificiali) intorno a un pianeta è in prima approssimazione

descrivibile come se l'unica forza su ciascuno di essi fosse l'attrazione gravitazionale del pianeta. Questa approssimazione, poi, diventa via via più inefficace man mano che il sistema si complica. Per esempio, sistemi come quelli dei satelliti di Giove o Saturno sono molto più complessi: i satelliti più grossi (Ganimede, Europa, Callisto, Io per Giove; Titano per Saturno) perturbano le orbite dei satelliti minori; nel caso di Saturno, alcuni satelliti, pur piccolissimi, perturbano gli anelli del pianeta, che sono a loro volta formati da frammenti di rocce e ghiaccio.

È utile anche ricordare che il pianeta Nettuno, prima di essere osservato al telescopio, era stato ipotizzato per spiegare anomalie osservate nell'orbita di Urano, inspiegabili con la sola attrazione del Sole, ma anche aggiungendo tutte le correzioni dovute alle attrazioni degli altri pianeti allora noti (principalmente, Giove e Saturno). Due astronomi, Adams e Le Verrier, fecero i calcoli delle perturbazioni all'orbita ellittica ideale, per Giove, Saturno, e Urano. Poi confrontarono le loro previsioni con le osservazioni e si accorsero che, mentre per Giove e Saturno tutto era consistente, l'orbita di Urano mostrava delle accelerazioni e delle decelerazioni non previste. Spiegarono questo fatto ipotizzando l'esistenza di un ulteriore pianeta e ne calcolarono la posizione, quindi contattarono l'Osservatorio di Berlino, che puntò il telescopio... *et voilà*! Era il 24 settembre 1846. Questo è un esempio di come un modello fisico, costruito su numerose osservazioni, consente di fare una previsione che, se confermata dall'osservazione, rende il modello ancora più affidabile.

19.6 Campo gravitazionale di un oggetto esteso (*)

Finora abbiamo considerato il campo generato da uno o più oggetti puntiformi. Generalizzando l'Eq. (19.5) si può ottenere il campo gravitazionale di un oggetto esteso.

In linea di principio, si potrebbe pensare al corpo esteso come formato da atomi, e utilizzare l'Eq. (19.5) per calcolare la somma vettoriale dei campi gravitazionali generati da ciascun atomo [2]... Ovviamente è un approccio poco pratico!

Si può quindi pensare alla materia come "diluita" nello spazio — vd Fig. 19.6 — in modo tale che un volumetto dV' molto piccolo — al limite

[2] ... o meglio ancora, generati da tutti gli elettroni negli atomi, e da tutti i quarks nei nuclei...!!

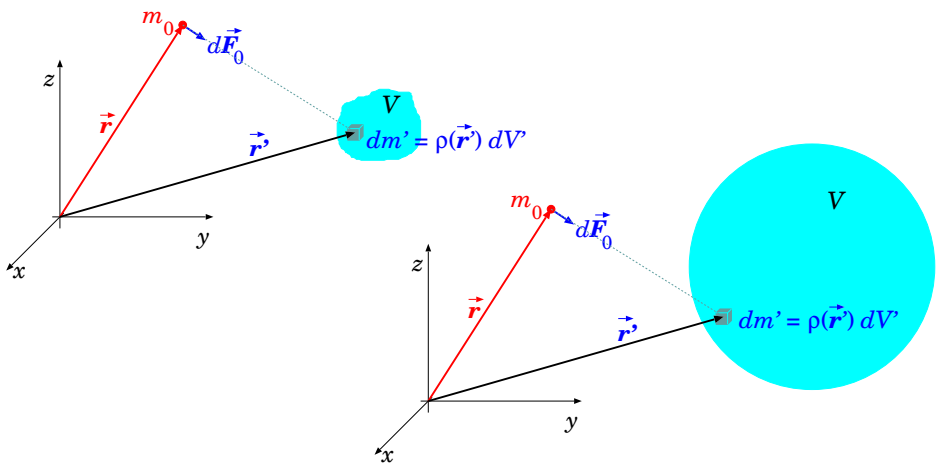


Figura 19.6: *Calcolo del campo gravitazionale generato da un oggetto esteso, mediante la scomposizione in elementi infinitesimi di volume dV' e massa dm'.*

infinitesimo — di materia contenga una massa dm'. L'idea intuitiva è che dm' sia direttamente proporzionale a dV' — $dm' \propto dV'$. La costante di proporzionalità viene chiamata *densità*, ρ, quindi:

$$dm' \;=\; \rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\, dV' \tag{19.14}$$

La dipendenza dalla posizione $\vec{\boldsymbol{r}}'$ del volumetto dV' sta a ricordare che in generale la densità non è costante. Si pensi a un pianeta come la Terra, che possiede un nucleo di ferro, uno strato roccioso (il "mantello" e la "crosta") e poi uno strato gassoso (l'atmosfera): ovviamente ρ cambia sensibilmente da un luogo all'altro.

Il contributo del volumetto dV' al campo gravitazionale in una posizione $\vec{\boldsymbol{r}}$ è:

$$d\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -G\frac{dm'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|^3}\left(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'\right) = -G\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\, dV'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|^3}\left(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'\right)$$

(vd Fig. 19.6). La sommatoria nell'Eq. (19.5) può essere generalizzata ad un integrale sul volume totale V dell'oggetto esteso:

$$\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -G\int_V dV'\,\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|^3}\left(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'\right) \tag{19.15}$$

L'Eq. (19.15), formalmente sempre valida, in generale implica calcoli complessi, che vanno risolti al computer con metodi numerici. Tuttavia, vi è

un risultato molto interessante, che vale quando l'oggetto esteso ha simmetria sferica: in tal caso il campo gravitazionale da esso generato all'esterno è *uguale* a quello che genererebbe se tutta la sua massa fosse concentrata in un punto nel centro. La motivazione risiede nel *teorema di Gauss*, che discuteremo nella Sezione 19.7; il caso a simmetria sferica è stato anticipato in Sezione 19.1.1, e sarà trattato in Sezione 19.8.

Si può fare un ragionamento analogo anche per il potenziale gravitazionale. Il contributo di una massa $dm' = \rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\, dV'$ posta in $\vec{\boldsymbol{r}}'$ è:

$$d\Phi(\vec{\boldsymbol{r}}) = -G\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}dV'$$

pertanto l'Eq. (19.11) si può generalizzare così:

$$\Phi(\vec{\boldsymbol{r}}) = -G\int_V dV'\,\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|} \tag{19.16}$$

Anche in questo caso, l'integrazione è spesso difficile e va fatta con metodi numerici. D'altronde, questo calcolo è più facile di quello dell'Eq. (19.15), perché coinvolge quantità scalari, anziché vettoriali. Può risultare quindi conveniente calcolare prima $\Phi(\vec{\boldsymbol{r}})$, e quindi

$$\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\Phi$$

19.7 Teorema di Gauss per il campo gravitazionale

Nota: per comprendere questa sezione è necessario aver studiato e capito il concetto di *flusso di un campo vettoriale*, spiegato nella Sezione 17.4. È anche necessario conoscere il concetto di *angolo solido*, introdotto in Sezione 4.6.

Il teorema di Gauss dice che il flusso del campo gravitazionale $\vec{\boldsymbol{g}}$ attraverso una superficie *chiusa* $\Sigma_{\rm ch}$ è uguale alla massa totale racchiusa all'interno della superficie, $M^{(\rm int)}$, moltiplicata per $-4\pi G$:

$$\boldsymbol{\Phi}_{\Sigma_{\rm ch}}(\vec{\boldsymbol{g}}) = \oint_{\Sigma_{\rm ch}} d\vec{\boldsymbol{\Sigma}}\cdot\vec{\boldsymbol{g}} = -4\pi G\cdot M^{(\rm int)} \tag{19.17}$$

Per dimostrare il teorema, consideriamo anzitutto il campo gravitazionale generato da una massa puntiforme m_k. Senza perdita di generalità, possiamo

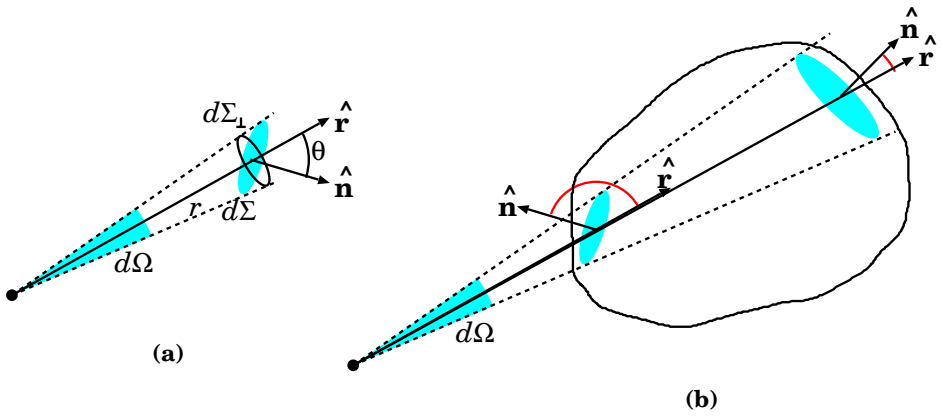


Figura 19.7: *Illustrazioni per la dimostrazione del teorema di Gauss*

scegliere l'origine dove la massa è localizzata, cosicché il campo nel punto $\vec{\boldsymbol{r}}$ è:

$$\vec{\boldsymbol{g}}_k = -\frac{Gm_k}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

e il suo flusso attraverso una superficie infinitesima $d\vec{\boldsymbol{\Sigma}}$ è:

$$\vec{\boldsymbol{g}}_k \cdot d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} = -\frac{Gm_k}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, d\Sigma$$

Ora, come mostrato in Fig. 19.7(a), $\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, d\Sigma = \cos\theta\, d\Sigma = d\Sigma_\perp$ è pari alla proiezione di $d\Sigma$ perpendicolare alla direzione radiale $\hat{\boldsymbol{r}}$, quindi, chiamando $d\Omega$ l'angolo solido sotto cui $d\Sigma$ è vista dall'origine, $d\Sigma_\perp = r^2\, d\Omega$, e:

$$\vec{\boldsymbol{g}}_k \cdot d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} = -Gm_k\, d\Omega$$

Quando si integra su tutta la superficie Σ_{ch}, se l'origine (e la massa m_k) è all'interno della superficie, l'intero angolo solido è 4π, e il risultato è:

$$\boldsymbol{\Phi}_{\Sigma_{\text{ch}}}(\vec{\boldsymbol{g}}_k) = -4\pi G m_k \qquad (m_k \text{ all'interno di } \Sigma_{\text{ch}})$$

mentre, se l'origine è esterna, possiamo sempre dividere Σ_{ch} in coppie di superfici infinitesime che sono sottese dallo stesso angolo solido $d\Omega$ e dànno contributi opposti al flusso (vedi Fig. 19.7(b)), cosicché il flusso totale è nullo:

$$\boldsymbol{\Phi}_{\Sigma_{\text{ch}}}(\vec{\boldsymbol{g}}_k) = 0 \qquad (m_k \text{ all'esterno di } \Sigma_{\text{ch}})$$

Ora possiamo generalizzare il calcolo ad un generico campo gravitazionale $\vec{\boldsymbol{g}}$, prodotto da un qualunque sistema di masse. Per masse puntiformi

$m_1, \ldots, m_n$ decomponiamo $\vec{\boldsymbol{g}} = \sum_k \vec{\boldsymbol{g}}_k$ e quindi suddividiamo a loro volta le masse esterne a $\Sigma_{\rm ch}$ da quelle interne:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}(\vec{\boldsymbol{g}}) &= \sum_k \boldsymbol{\Phi}(\vec{\boldsymbol{g}}_k) \\
&= \sum_{k \text{ esterne}} \underbrace{\boldsymbol{\Phi}(\vec{\boldsymbol{g}}_k)}_{=0} + \sum_{k \text{ interne}} \underbrace{\boldsymbol{\Phi}(\vec{\boldsymbol{g}}_k)}_{=-4\pi G m_k} \\
&= -4\pi G \sum_{k \text{ interne}} m_k
\end{aligned}$$

che dimostra l'Eq. (19.17).

Il risultato può anche essere esteso a una distribuzione di masse con densità ρ: in tal caso il teorema di Gauss si formula così:

$$\boldsymbol{\Phi}_{\Sigma_{\rm ch}}(\vec{\boldsymbol{g}}) = -4\pi G \int_{(\text{dentro } \Sigma_{\rm ch})} dV' \rho(\vec{\boldsymbol{r}}') \tag{19.18}$$

19.8 Campo gravitazionale generato da un oggetto sferico

Finora abbiamo trattato il campo gravitazionale come generato da masse puntiformi — col che si intende molto piccole rispetto alle distanze fra esse.

Parlando del campo generato da un pianeta, o dal Sole, l'approssimazione è buona? Per esempio: il raggio del Sole è circa $0.7 \cdot 10^6$ km, la distanza media di Mercurio dal centro del Sole è di circa $60 \cdot 10^6$ km (circa 86 volte il raggio del Sole). Possiamo considerare il Sole come "puntiforme"?

O ancora peggio: l'accelerazione di gravità $g = 9.8$ m/s^2, che rileviamo sulla superficie della Terra, può essere davvero descritta dalla legge $GM_\oplus/R_\oplus^2$?? La Terra, vista dalla sua superficie, non può certo apparire puntiforme!

In effetti, una massa M sferica di raggio R genera al suo esterno (cioè per distanze $r > R$ dal proprio centro) un campo gravitazionale *identico* a quello che genererebbe se fosse tutta concentrata al centro.

Consideriamo un oggetto esteso sferico, di raggio R e di massa M, dotato di simmetria sferica: ciò significa che la sua densità dipende solo dalla sua distanza r' dal centro, non dalla direzione:

$$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}') \equiv \rho(r') \tag{19.19}$$

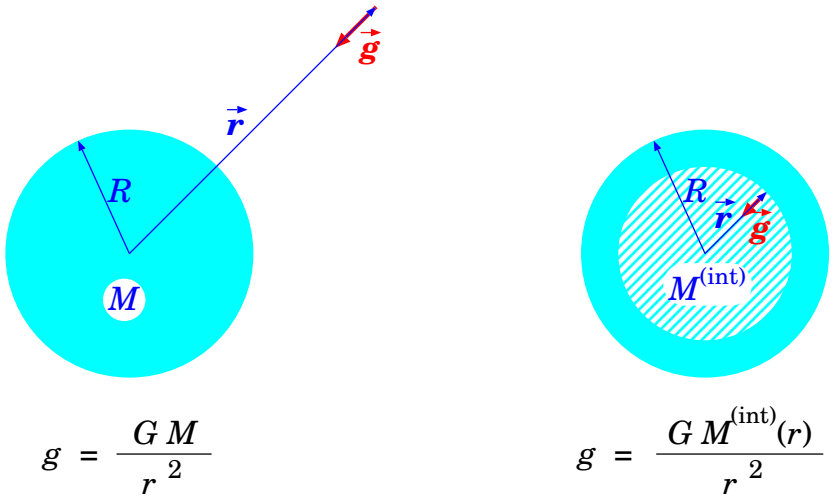


Figura 19.8: *Campo generato da una massa estesa a simmetria sferica: a sinistra, esternamente alla massa; a destra, all'interno della massa.*

come in Fig. 19.8. È una buona approssimazione per tutti gli oggetti celesti auto-gravitanti: potranno avere una densità che varia anche sensibilmente con la distanza dal centro, ma omogenea su ogni guscio sferico.

In tal caso, la forma del campo gravitazionale in un generico punto $\vec{r}$ — misurato rispetto al centro dell'oggetto esteso — prende una forma notevole:

$$\vec{g}(\vec{r}) \;=\; \begin{cases} -\dfrac{GM}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{r}} & (\text{se } r \geq R) \\[2ex] -\dfrac{GM^{(\mathrm{int})}(r)}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{r}} & (\text{se } r \leq R) \end{cases} \tag{19.20}$$

essendo $M^{(\mathrm{int})}(r)$ la parte della massa M contenuta all'interno di una sfera di raggio r. Questa può essere calcolata così: un guscio sferico, di raggio r' e spessore dr', ha volume $dV' = 4\pi\,(r')^2\,dr'$ e quindi massa

$$dm' \;=\; \rho(r')\,dV' \;=\; 4\pi\,(r')^2\,\rho(r')\,dr'$$

Quindi:

$$M^{(\mathrm{int})}(r) = 4\pi \int_0^r (r')^2\,\rho(r')\,dr' \tag{19.21}$$

In Fig. 19.9 sono mostrati i campi gravitazionali per 3 oggetti a simmetria sferica: un guscio, una sfera a densità uniforme, e una sfera formata di strati a diversa densità: quest'ultimo caso è un buon modello per un pianeta.

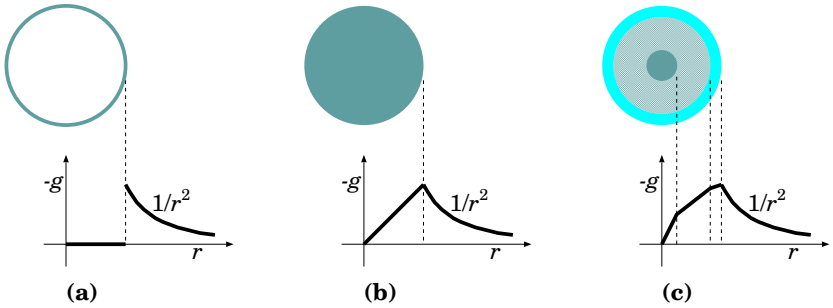


Figura 19.9: *Esempi di campo gravitazionale per 3 configurazioni a simmetria sferica: (a) guscio sferico; (b) sfera a densità uniforme; (c) sfera con strati di densità decrescente dal centro verso la superficie. Ad una data distanza r, solo la massa interna $M^{(\mathrm{int})}(r)$ contribuisce a generare $g(r)$. Nei grafici, l'asse verticale rappresenta $-g$: il campo $\vec{\boldsymbol{g}}$ è sempre diretto verso il centro della sfera.*

Il risultato dell'Eq. (19.20) può essere dimostrato rapidamente grazie al teorema di Gauss, come in Sezione 19.8.1. Si può anche procedere con il calcolo diretto, passando per il potenziale gravitazionale, come spiegato in Sezione 19.8.2: è un approccio molto più lungo, ma un esempio istruttivo di come l'uso del potenziale possa rendere percorribile un calcolo altrimenti terrificante!

19.8.1 Dimostrazione, con il teorema di Gauss

Data la simmetria della massa sferica, il campo $\vec{\boldsymbol{g}}$ da essa generato deve essere *centrale*:

$$\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = g(r)\hat{\boldsymbol{r}}$$

Pertanto se prendiamo una superficie sferica chiusa Σ_{ch} di raggio r centrata nel centro della massa sferica, il flusso di $\vec{\boldsymbol{g}}$ attraverso di essa deve essere

$$\boldsymbol{\Phi}_{\Sigma_{\mathrm{ch}}}(\vec{\boldsymbol{g}}) = 4\pi r^2 g(r)$$

(spiegazione: $\vec{\boldsymbol{g}}$ è radiale, mentre il versore $\hat{\boldsymbol{n}}$ ortogonale alla superficie Σ_{ch} coincide con $\hat{\boldsymbol{r}}$, dunque anch'esso radiale; inoltre essendo $g(r)$ uniforme ovunque sulla superficie Σ_{ch}, è sufficiente moltiplicarlo per l'area della sfera, cioè $4\pi r^2$).

Il teorema di Gauss ci dice che $\boldsymbol{\Phi}_{\Sigma_{\mathrm{ch}}}(\vec{\boldsymbol{g}}) = -4\pi G M^{(\mathrm{int})}$, quindi confrontando:

$$g(r) = -\frac{GM^{(\mathrm{int})}}{r^2} \qquad ; \qquad \vec{\boldsymbol{g}} = -\frac{GM^{(\mathrm{int})}}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

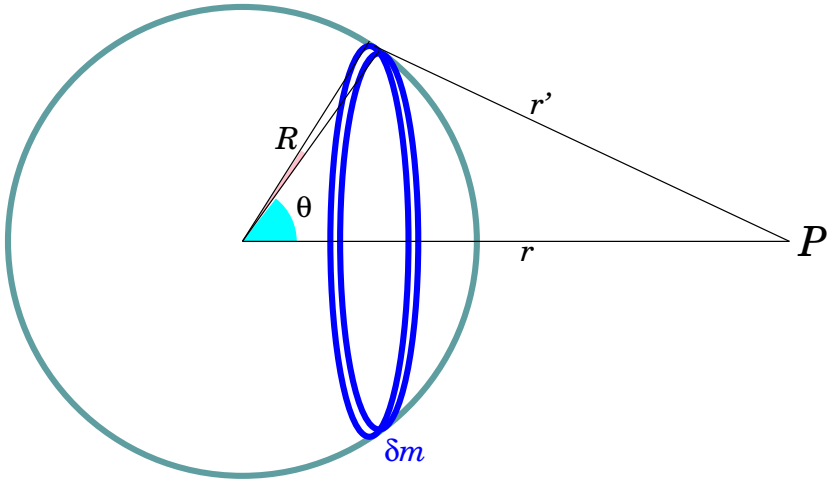


Figura 19.10: *Schema per il calcolo del potenziale gravitazionale per un guscio sferico.*

Se $r > R$ (cioè siamo esterni alla massa sferica) $M^{(\text{int})}$ coincide con tutta la massa.

Se invece ci troviamo all'interno della massa sferica ($r < R$) allora solo la quantità di massa più interna contribuisce al campo gravitazionale, mentre quella esterna non dà nessun effetto.

19.8.2 Dimostrazione, usando il potenziale gravitazionale (*)

L'integrale dell'Eq. (19.16) si può calcolare nel caso di un oggetto esteso a *simmetria sferica*, ovvero tale che la densità ρ dipenda solo dalla distanza dal suo centro geometrico: $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}') \equiv \rho(r')$.

Analizziamo anzitutto il campo di un *guscio sferico*, di raggio R e massa totale m [3]. Conviene lavorare con il potenziale gravitazionale, $\Phi(r)$, essendo r la distanza fra un generico punto P e il centro del guscio — vd Fig. 19.10. Riportiamo qui il risultato, posponendo la dimostrazione alla Sezione 19.8.3:

$$\Phi(r) = \begin{cases} -\dfrac{Gm}{r} & (\text{se } r \geq R) \\ \\ -\dfrac{Gm}{R} & (\text{se } r \leq R) \end{cases} \tag{19.22}$$

[3] Si tratta di un oggetto ideale, inesistente su scala planetaria, ma utile come passaggio intermedio nei calcoli.

È un risultato notevole: all'esterno del guscio, il potenziale gravitazionale è uguale a quello che sarebbe generato da una massa m tutta concentrata nel centro. Quindi anche il campo gravitazionale $\vec{\boldsymbol{g}}$ deve essere dello stesso tipo. Invece, all'interno del guscio, il potenziale è costante; quindi il campo $\vec{\boldsymbol{g}}$ deve essere nullo.

$$\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \begin{cases} -\dfrac{Gm}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{r}} & (\text{se } r > R) \\ 0 & (\text{se } r < R) \end{cases} \tag{19.23}$$

Ora possiamo calcolare il campo gravitazionale prodotto da un oggetto a simmetria sferica, di raggio R, con densità $\rho(r')$. Possiamo pensare all'oggetto come costituito da tanti gusci sferici: il generico guscio, di raggio r' e spessore dr', ha volume $dV' = 4\pi\,(r')^2\,dr'$, e quindi massa:

$$dm' = 4\pi\,(r')^2\,dr'\,\rho(r')$$

La massa totale dell'oggetto sferico è

$$M = \int_{r'=0}^{r'=R} dm' = 4\pi \int_0^R dr'\,(r')^2\,\rho(r')$$

Dall'Eq. (19.23), sappiamo che solo i gusci sferici con $r' < r$ contribuiscono al campo gravitazionale, ciascuno con un contributo:

$$d\vec{\boldsymbol{g}}'(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\frac{G\,dm'}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

Se $r > R$, tutti i gusci sferici contribuiscono, quindi:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \int_{r'=0}^{r'=R} d\vec{\boldsymbol{g}}'(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\frac{G}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \int_{r'=0}^{r'=R} dm' \\ &= -\frac{GM}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \qquad\qquad (r > R) \end{aligned}$$

Se invece $r < R$, solo i gusci sferici con $r' < r$ contribuiscono:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \int_{r'=0}^{r'=r} d\vec{\boldsymbol{g}}'(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\frac{G}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \int_{r'=0}^{r'=r} dm' \\ &= -\frac{G}{r^2}\underbrace{\left(4\pi \int_0^r (r')^2\,\rho(r')\,dr'\right)}_{M^{(\text{int})}(r)}\hat{\boldsymbol{r}} \qquad\qquad (r < R) \end{aligned}$$

La quantità

$$M^{(\mathrm{int})}(r) = 4\pi \int_0^r (r')^2 \, \rho(r') \, dr'$$

è la parte di massa dell'oggetto contenuta nella sfera di raggio r: solo la massa interna contribuisce a generare campo gravitazionale a distanza r dal centro. In sintesi:

$$\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \;=\; \begin{cases} -\dfrac{GM}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{r}} & (\text{se } r \geq R) \\[2ex] -\dfrac{GM^{(\mathrm{int})}(r)}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{r}} & (\text{se } r \leq R) \end{cases}$$

che è quanto scritto nell'Eq. (19.20).

19.8.3 Potenziale gravitazionale generato da un guscio sferico — dimostrazione (*)

Individuiamo l'asse che collega il centro del guscio con il punto P in cui vogliamo calcolare Φ — vd Fig. 19.10. Dividiamo poi il guscio in tanti anelli coassiali: ciascun anello è individuato dall'angolo polare θ. I punti di ciascun anello sono distanti da P:

$$r' \;=\; \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta}$$

(teorema di Carnot). Chiamiamo dm la massa dell'anello: il suo contributo a Φ è:

$$d\Phi \;=\; -\frac{G\,dm}{r'}$$

Ora si tratta di sommare i contributi di tutti gli anelli che costituiscono il guscio sferico, cioè calcolare un integrale del tipo:

$$\Phi \;=\; -G \int \frac{dm}{r'}$$

Ciascun anello ha raggio $\rho = R\sin\theta$ e larghezza $R\,d\theta$, dunque superficie $d\Sigma = (2\pi\rho)(R\,d\theta) = 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta$. Se chiamiamo $\sigma = \dfrac{m}{4\pi R^2}$ la densità superficiale di massa — supposta costante — la massa dm dell'anello è:

$$dm \;=\; \sigma\, d\Sigma \;=\; \frac{m}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta \;=\; \frac{m}{2}\,\sin\theta\, d\theta$$

L'integrale per Φ diventa:

$$\Phi = -\frac{Gm}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\theta}}$$

Introduciamo $\epsilon = \dfrac{R}{r}$ e $\xi = \cos\theta$. Allora $d\xi = -\sin\theta\,d\theta$ e gli estremi di ξ sono $+1$ (per $\theta = 0$) e -1 (per $\theta = \pi$). L'integrale si può trasformare con i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned}
\Phi &= -\frac{Gm}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{r\sqrt{1+\epsilon^2-2\epsilon\cos\theta}} \\
&= -\frac{Gm}{2r}\int_{\xi=+1}^{\xi=-1}\frac{-d\xi}{\sqrt{1+\epsilon^2-2\epsilon\xi}} \\
&= -\frac{Gm}{2r}\int_{\xi=-1}^{\xi=+1}\frac{d\xi}{\sqrt{1+\epsilon^2-2\epsilon\xi}} \\
&= -\frac{Gm}{2r}\int_{\xi=-1}^{\xi=+1}\frac{1}{\sqrt{2\epsilon}}\frac{d\xi}{\sqrt{\frac{1+\epsilon^2}{2\epsilon}-\xi}} \\
&= -\frac{Gm}{2r\sqrt{2\epsilon}}\int_{\xi=-1}^{\xi=+1}\frac{d\xi}{\sqrt{\frac{1+\epsilon^2}{2\epsilon}-\xi}} \\
&= -\frac{Gm}{2r\sqrt{2\epsilon}}\left[-2\sqrt{\frac{1+\epsilon^2}{2\epsilon}-\xi}\right]_{\xi=-1}^{\xi=+1} \\
&= \frac{Gm}{r\sqrt{2\epsilon}}\left(\sqrt{\frac{1+\epsilon^2}{2\epsilon}-1} - \sqrt{\frac{1+\epsilon^2}{2\epsilon}+1}\right) \\
&= \frac{Gm}{r\sqrt{2\epsilon}}\left(\frac{\sqrt{1+\epsilon^2-2\epsilon} - \sqrt{1+\epsilon^2+2\epsilon}}{\sqrt{2\epsilon}}\right) \\
&= \frac{Gm}{r\,2\epsilon}\left(|1-\epsilon| - |1+\epsilon|\right)
\end{aligned}$$

Ora, per risolvere i valori assoluti, occorre distinguere due casi:

- se $r \geq R$, cioè P è esterno al guscio, $\epsilon \leq 1$ e si ottiene

$$\Phi = \frac{Gm}{r\,2\epsilon}(-2\epsilon) = -\frac{Gm}{r}$$

- se $r \leq R$, cioè P è interno al guscio, $\epsilon \geq 1$ e si ottiene

$$\Phi = \frac{Gm}{r\,2\epsilon}(-2) = -\frac{Gm}{r\epsilon} = -\frac{Gm}{R}$$

Quindi abbiamo trovato il risultato anticipato nell'Eq. (19.22).

19.9 Orbite circolari in un campo centrale

In un campo gravitazionale centrale

$$\vec{g}(\vec{r}) = -GM\frac{\vec{r}}{r^3}$$

sono possibili *orbite circolari*, con una velocità costante in modulo, e una velocità angolare ω, che dipendono dal raggio r dell'orbita.

Un'orbita circolare di raggio r percorsa a velocità v è caratterizzata da una velocità angolare ω e un'accelerazione centripeta a_n date da:

$$\omega = \frac{v}{r} \quad ; \quad a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Pertanto deve esistere una forza centripeta, diretta verso il centro, $F_n = ma_n = m\omega^2 r$, che deve essere fornita dall'attrazione gravitazionale della massa M: $F_g = \dfrac{GMm}{r^2}$. Uguagliando le due espressioni si ottiene:

$$m\omega^2 r = m\frac{GM}{r^2}$$

ovvero:

$$\omega^2 r^3 = GM \tag{19.24}$$

Si può anche scrivere un'espressione equivalente in cui, al posto di ω, compare il periodo orbitale $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \tag{19.25}$$

19.10 Esercizi sulle orbite circolari

Esercizio 19.3. *La Luna impiega 27.322 giorni per compiere un'orbita completa intorno alla Terra. Assumendo che l'orbita sia perfettamente circolare, calcolare la distanza Terra-Luna* $r_{\oplus☾}$.

Risposta. *La Luna compie una traiettoria circolare, quindi è soggetta ad una accelerazione centripeta* $a = \omega^2 r_{\oplus☾}$. *La velocità angolare è calcolabile dal periodo* $T = 27.322$ giorni $= 2\,360\,621$ s *(1 giorno=24 ore; 1 ora=60 minuti; 1 minuto=60 secondi* $\Longrightarrow$ *1 giorno=86 400 secondi)*

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2.6617 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$$

Detta m la massa della Luna, la forza centripeta $m\omega^2 r$ deve essere uguale alla forza gravitazionale fra Terra e Luna:

$$m\omega^2 r_{\oplus☾} = G\frac{mM_\oplus}{r^2_{\oplus☾}} \qquad \Longrightarrow \qquad r_{\oplus☾} = \sqrt[3]{\frac{GM_\oplus}{\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{GM_\oplus T^2}{4\pi^2}}$$

Facendo uso di $M_\oplus = 5.97 \cdot 10^{24}$ kg calcolata nell'esempio precedente, ed inserendo gli altri dati, troviamo:

$$r_{\oplus☾} = 3.83 \cdot 10^8 \text{ m} = 383\,000 \text{ km}$$

Esercizio 19.4. *La distanza Terra-Sole è misurata pari a $r_{\oplus\odot} = 149.60 \cdot 10^6$ km. La Terra impiega un anno (cioè circa 365.25 giorni) a compiere un'intera orbita intorno al Sole. Assumendo che l'orbita sia perfettamente circolare, calcolare la massa del Sole $M_\odot$.*

Risposta. *L'accelerazione centripeta della Terra intorno al Sole è $a = \omega^2 r_{\oplus\odot}$, essendo $\omega = 2\pi/T$, e $T = 31\,557\,600$ s (ricordiamo che 1 giorno=86 400 secondi). Uguagliando la forza centripeta $M_\oplus \omega^2 r_{\oplus\odot}$ all'attrazione gravitazionale si trova:*

$$M_\oplus \omega^2 r_{\oplus\odot} = G\frac{M_\odot M_\oplus}{r^2_{\oplus\odot}} \qquad \Longrightarrow \qquad M_\odot = \frac{\omega^2 r^3_{\oplus\odot}}{G} = \frac{4\pi^2 r^3_{\oplus\odot}}{GT^2}$$

Inserendo i dati si trova:

$$M_\odot = 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

La massa del Sole è 2 miliardi di miliardi di miliardi di tonnellate! Ovvero, circa 333 000 masse terrestri!

Esercizio 19.5. *A causa del principio di azione-reazione, se il Sole attrae la Terra anche la Terra attrae il Sole. In effetti entrambi ruotano intorno ad un centro comune, il loro baricentro. Qual è il raggio dell'orbita solare? NOTA: questo esercizio è abbastanza accademico: infatti per calcolare il moto del Sole bisognerebbe, insieme alla Terra, considerare tutti gli altri pianeti del Sistema Solare. Qui stiamo "facendo finta" che il sistema Terra-Sole sia isolato.*

Risposta. *La distanza Terra-Sole è $r_{\oplus\odot} = 149.60 \cdot 10^6$ km. Chiamiamo $r_\oplus$ e $r_\odot$ rispettivamente i raggi delle orbite terrestre e solare. Essi sono le distanze dal baricentro comune, pertanto devono soddisfare la relazione $r_\oplus M_\oplus = r_\odot M_\odot$. Inoltre $r_\oplus + r_\odot = r_{\oplus\odot}$. Eliminando $r_\oplus$ fra le due equazioni si trova:*

$$r_\odot\left(1 + \frac{M_\odot}{M_\oplus}\right) = r_{\oplus\odot} \qquad \Longrightarrow \qquad r_\odot = \left(\frac{M_\oplus}{M_\oplus + M_\odot}\right) r_{\oplus\odot}$$

Nella somma $M_\oplus + M_\odot$ la massa della Terra è del tutto trascurabile! Con ottima approssimazione possiamo scrivere

$$r_\odot \simeq \frac{M_\oplus}{M_\odot} r_{\oplus\odot} = 3 \cdot 10^{-6} \cdot r_{\oplus\odot} = 449 \text{ km}$$

In un anno il Sole compirebbe un'orbita di raggio 449 km *— molto piccola rispetto al proprio raggio, che è* 696 000 km*: per rendere l'idea, è 109 volte il raggio della Terra, oppure quasi il doppio della distanza Terra-Luna.*

Osservazione. *Proviamo a ripetere il ragionamento considerando il Sole e Giove, che è il pianeta più grosso del Sistema Solare, e trascurando tutti gli altri pianeti. La distanza Sole-Giove è* $r_{♃\odot} \simeq 779 \cdot 10^6$ km*, la massa di Giove è* $M_{♃} = 1.899 \cdot 10^{27}$ kg *(circa 318 volte la massa terrestre). In questo caso, il raggio dell'orbita solare intorno al baricentro Sole-Giove è:*

$$r_\odot \simeq \frac{M_{♃}}{M_{♃} + M_\odot} r_{♃\odot} = \frac{1}{1049} 779 \cdot 10^6 \text{ km} \simeq 742\,000 \text{ km}$$

Il centro attorno cui orbita il Sole è appena esterno alla sua superficie.

Esercizio 19.6. *Un satellite artificiale si chiama "geostazionario" (GEO = "geosynchronous equatorial orbit") se ha un'orbita equatoriale, ed il suo periodo orbitale coincide con il periodo di rotazione terrestre, cosicché il satellite sta sempre sulla verticale dello stesso luogo sulla superficie terrestre. A che altezza dal suolo si trova? Con che velocità si muove?*

Risposta. *Detto* r *il raggio della sua orbita, la sua accelerazione centripeta deve essere* $a_n = \omega^2 r = \dfrac{GM}{r^2}$*. Confrontando con l'accelerazione di gravità alla superficie terrestre,* $g = \dfrac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}$*, troviamo* $\omega^2 r = g\dfrac{R_\oplus^2}{r^2}$ *con* $R_\oplus = 6\,371$ km *e* $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{86\,400 \text{ s}} = 7.27 \cdot 10^{-5}$ rad/s*. Quindi*

$$r = \left(\frac{gR_\oplus^2}{\omega^2}\right)^{1/3} = 4.223 \cdot 10^7 \text{ m} \simeq 42\,000 \text{ km}$$

L'altezza dal suolo è $r - R_\oplus = 3.586 \cdot 10^7$ m $\simeq 36\,000$ km*. La velocità orbitale è* $v = \omega r \simeq 3$ km/s*.*

Esercizio 19.7. *La Stazione Spaziale Internazionale (International Space Station, ISS) ha una massa* $m = 450\,000$ kg *e si muove su un'orbita approssimativamente circolare intorno alla Terra, ad un'altezza dal suolo* $h = 420$ km*. Come molti dei satelliti artificiali, si trova su un'orbita piuttosto bassa (LEO = "low Earth orbit"), se paragonata al raggio della Terra.*

Si calcoli il periodo T *della sua orbita e la sua velocità* v*. Assumendo che tutte le sue componenti siano state lanciate da basi equatoriali, quanta energia è stata necessaria per metterla in orbita?*

Risposta. *Il raggio dell'orbita della ISS è* $r = R_\oplus + h \simeq (6371 + 420)$ km $= 6.791 \cdot 10^6$ m*. Potremmo calcolare il periodo dalla relazione* $\dfrac{GM_\oplus}{r^2} = \dfrac{4\pi^2}{T^2} r$*, ma possiamo anche semplificarci la vita, se confrontiamo l'accelerazione centripeta*

$a_n = \omega^2 r = \dfrac{GM_\oplus}{r^2}$ della ISS con l'accelerazione di gravità $g = \dfrac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}$. Eliminando $GM_\oplus$ fra queste due espressioni si trova:

$$\omega^2 r = g\frac{R_\oplus^2}{r^2} = 8.63 \text{ m/s}^2$$

da cui $\omega = \sqrt{g\dfrac{R_\oplus^2}{r^3}} = 1.13 \cdot 10^{-3}$ rad/s e quindi $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 5\,570$ s — la ISS compie un'orbita intera intorno alla Terra in circa un'ora e mezza! In effetti, a volte è possibile vederla ad occhio nudo, la sera quando siamo già in ombra ma la ISS è ancora illuminata dai raggi solari: appare come una stella molto brillante ed in rapidissimo movimento, che "sorge" e "tramonta" in pochi minuti. La sua velocità orbitale è $v = \omega r = 7.65 \cdot 10^3$ m/s — circa 27,500 km/h, ovvero un po' più di 7 km/s. Veloce, no? Per confronto, un aereo di linea viaggia ad una velocità di crociera di 900 km/h.

Per la domanda sull'energia ragioniamo così: quando il materiale era ancora a Terra, la sua energia meccanica era $E_0 = \mathcal{U}_0 + \mathcal{E}_0 = -\dfrac{GMm}{R_\oplus} + \dfrac{m}{2}(\omega_\oplus R_\oplus)^2$, dove il secondo termine, di energia cinetica, è calcolato considerando la rotazione terrestre, con $\omega_\oplus = \dfrac{2\pi}{T_\oplus} = \dfrac{2\pi}{86\,400 \text{ s}} = 7.27 \cdot 10^{-5}$ rad/s. Abbiamo rispettivamente

$$\mathcal{U}_0 = -\frac{GMm}{R_\oplus} = -2.815 \cdot 10^{13} \text{ J} \quad ; \quad \mathcal{E}_0 = \frac{m}{2}(\omega_\oplus R_\oplus)^2 = 4.827 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Analogamente da quando la ISS si trova in orbita,

$$\mathcal{U} = -\frac{GMm}{r} = -2.641 \cdot 10^{13} \text{ J} \quad ; \quad \mathcal{E} = \frac{m}{2}(\omega r)^2 = 1.325 \cdot 10^{13} \text{ J}$$

L'energia ceduta alla ISS per metterla in orbita è dunque $\Delta E = (\mathcal{U} + \mathcal{E}) - (\mathcal{U}_0 + \mathcal{E}_0) = 1.494 \cdot 10^{13}$ J. È interessante calcolare separatamente le variazioni di energia potenziale e cinetica: $\Delta\mathcal{U} = 0.174 \cdot 10^{13}$ J e $\Delta\mathcal{E} = 1.320 \cdot 10^{13}$ J. Contrariamente a quanto ci si poteva aspettare, la maggior parte di energia non viene impiegata nel "sollevare" la ISS fino all'orbita, ma nel darle la velocità sufficiente a rimanere sull'orbita!

19.11 Orbite ellittiche: le Leggi di Keplero

Come già accennato, in realtà le traiettorie di orbite chiuse, in un campo gravitazionale centrale, sono *ellittiche*.

Più precisamente, le orbite dei pianeti nel Sistema Solare sono governate da leggi empiriche, formulate da Johannes von Kepler negli anni 1609–19, e che si enunciano così:

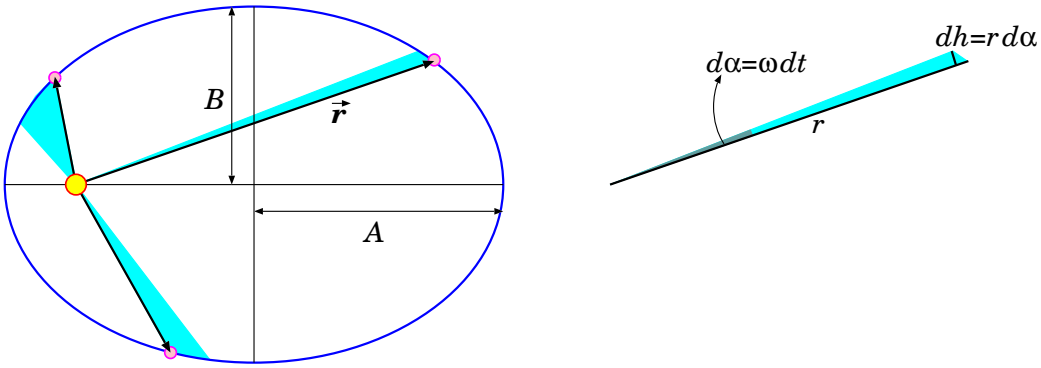


Figura 19.11: *Orbite planetarie attorno al Sole (l'eccentricità è molto esagerata, per motivi illustrativi). La "legge delle aree" di Keplero è illustrata dalle zone azzurre, che hanno aree uguali se percorse in tempi uguali.*

[K1] le orbite dei pianeti sono ellissi, con il Sole posto in un fuoco;

[K2] la velocità orbitale è tale che il raggio vettore Sole-pianeta traccia aree uguali in tempi uguali — qualitativamente diremmo che quando il pianeta è più vicino al Sole si muove più rapidamente;

[K3] per tutti i pianeti, il periodo orbitale T e il semiasse maggiore A dell'orbita sono tali che $T^2 \propto A^3$:

$$\frac{A^3}{T^2} = K \tag{19.26}$$

essendo K una costante universale per tutti i pianeti.

La legge [K2] — la cosiddetta "legge delle aree", si può formulare come relazione fra la distanza r dal Sole e la velocità angolare istantanea ω. Infatti, guardando un qualunque "triangoloide" azzurro della Fig. 19.11, l'angolo al centro percorso in un tempo dt è pari a $d\alpha = \omega\, dt$, la "base" del triangolo è r, e l'"altezza" è $dh = r\, d\alpha$ — a rigore, $r\, d\alpha$ sarebbe un archetto di cerchio, ma essendo $d\alpha$ scelto infinitesimo, l'archetto tende a un segmento ortogonale a r. Quindi, l'area del triangoloide è calcolabile come

$$d\Sigma = \frac{r\, dh}{2} = \frac{r^2\omega}{2} dt \tag{19.27}$$

Ora, consideriamo due punti (1) e (2) dell'orbita, e due aree $d\Sigma_1$, $d\Sigma_2$ descritte nello stesso tempo dt. La legge [K2] dice che $d\Sigma_1 = d\Sigma_2$, quindi deve essere $r_1^2\omega_1 = r_2^2\omega_2$. Pertanto la legge può essere riformulata come

$$r^2\omega = \text{costante} \tag{19.28}$$

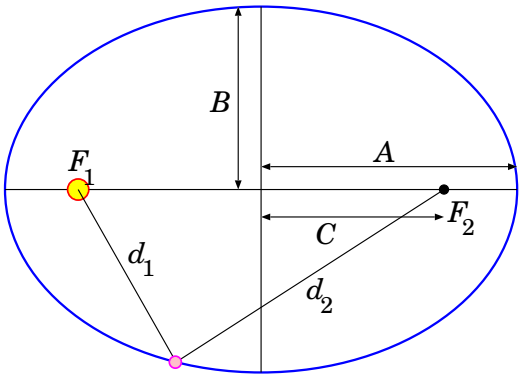


Figura 19.12: *Proprietà geometriche dell'ellisse.*

Abbiamo già incontrato questo risultato, parlando di forze radiali (Sezione 15.2.3) e di campi centrali (Sezione 15.2.4): è conseguenza della conservazione del momento angolare: in particolare, viene dall'Eq. (15.15), che qui riportiamo:

$$\omega r^2 = \frac{L}{m} \qquad \text{(campo gravitazionale centrale)} \tag{19.29}$$

Le 3 leggi di Keplero sono deducibili dalla legge di Newton della gravitazione universale, Eq. (19.1). La deduzione verrà trattata nella Sezione 19.14.

Il caso dell'orbita circolare, trattato nella Sezione 19.9, è ovviamente un caso-limite dell'orbita ellittica. Esso soddisfa la condizione $T^2 \propto A^3$ — si ottiene dall'Eq. (19.25), ricordando che in tal caso il semiasse maggiore coincide con il raggio dell'orbita, $A \equiv R$. Inoltre, anche la legge delle aree è soddisfatta: infatti, nell'orbita circolare, ω e $r \equiv R$ sono entrambi costanti.

19.11.1 Proprietà geometriche dell'ellisse

Ricordiamo qui le proprietà geometriche di una ellisse.

Dati due punti F_1 e F_2 e una distanza $2A$, un'ellisse è un luogo di punti tali che la somma delle distanze da F_1 e F_2 sia $2A$.

La forma dell'ellisse è come in Fig. 19.12. L'asse maggiore è di lunghezza $2A$ — per rendersene conto basta applicare la definizione a uno dei punti estremi dell'ellisse — quelli in cui l'ellisse interseca l'asse maggiore.

L'asse minore dell'ellisse è di lunghezza $2B$. La distanza fra i due fuochi si chiama $2C$. Prendendo un punto dell'ellisse all'intersezione dell'asse minore,

si vede subito che

$$A^2 = B^2 + C^2$$

Le distanze minima e massima da uno dei fuochi sono:

$$\begin{aligned} r_{min} &= A - C \\ r_{max} &= A + C \end{aligned}$$

da cui si deduce che l'eccentricità è:

$$\epsilon = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}} = \frac{C}{A} = \sqrt{1 - \left(\frac{B}{A}\right)^2}$$

L'area dell'ellisse è

$$\Sigma = \pi\, AB = \pi\, A^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}$$

19.12 Come è stata scoperta la gravitazione universale?

Ai tempi di Newton, la conoscenza osservativa dei moti celesti era molto approfondita. Galileo aveva dimostrato con l'osservazione che i pianeti girano intorno al Sole, ed aveva scoperto quattro satelliti orbitanti intorno a Giove: all'epoca chiamati "lune Medicee", oggi nominati Io, Europa, Ganimede, Callisto, o collettivamente "satelliti Galileiani". Inoltre Johannes Kepler aveva analizzato in grande dettaglio il moto dei pianeti, deducendo le tre famose leggi — vd Sezione 19.11.

Inoltre, la distanza Terra-Luna era nota, con una certa precisione. In effetti, il raggio della Terra è noto sin dall'antichità (misura di Eratostene, IV secolo a.C.). Dall'osservazione dell'ombra della Terra durante le eclissi di Luna, si poteva dedurre la proporzione fra raggio terrestre e raggio lunare, dunque anche il raggio della Luna era calcolabile. Infine, misurando l'angolo sotto il quale si osserva il disco lunare dalla Terra (circa 0.5°) si poteva risalire alla distanza Terra-Luna.

Newton dunque aveva molti dati empirici alla mano: la formulazione della gravitazione universale è stata il risultato dell'unificazione di tutte queste osservazioni in un'unica teoria. Non solo: come si è detto, essa è in grado di spiegare anche la caduta di oggetti verso la superficie terrestre.

Senza ripercorrere la via storica che ha portato Newton alla formulazione, cerchiamo in modo logico di capire come arrivarci, con alcune semplificazioni. Poiché avremo a che fare con forze prodotte da un oggetto ("sorgente") su un altro ("sonda"), useremo notazioni del tipo $F^{(\text{sorgente})}_{(\text{sonda})}$.

- Semplifichiamo le leggi di Keplero, assumendo che le orbite siano circolari — è un caso limite, naturalmente. Con raggio orbitale r costante, la legge delle aree dice banalmente che la velocità angolare ω non cambia lungo l'orbita. Chiamando M la massa del Sole e m quella del pianeta, la forza centripeta sul pianeta deve essere

$$F = m\omega^2 r = m\frac{4\pi^2}{T^2}r$$

  La terza legge per orbite circolari può essere riscritta come $T^2 = \dfrac{r^3}{K_\odot}$, cosicché per sostituzione di T^2 troviamo:

$$F^\odot = 4\pi^2 K_\odot \frac{m}{r^2} \tag{19.30}$$

  La legge della proporzionalità inversa al quadrato della distanza è già trovata. La costante $K_\odot$ è la stessa per tutti i pianeti, ma in generale dipende dall'attrazione del Sole: in questa fase del ragionamento non sappiamo ancora come.

- L'osservazione dei quattro satelliti Galileiani mostra orbite con raggi diversi e periodi diversi, ma tutte obbediscono ad una legge $T^2 = \dfrac{r^3}{K_{♃}}$. Quindi anche l'attrazione di Giove deve seguire una legge $1/r^2$.

- Dal moto della Luna intorno alla Terra, che avviene con periodo di 27.3 giorni, e dal raggio dell'orbita $r_{\oplus☾} \simeq 384\,000$ km, si deduce che l'accelerazione centripeta della Luna deve essere

$$a_☾ = \frac{4\pi^2}{T^2} r_{\oplus☾} \simeq 2.7 \cdot 10^{-3}\ \text{m/s}^2$$

  L'accelerazione alla superficie terrestre (quindi a $R_\oplus \simeq 6\,400$ km dal centro della Terra) è $g = 9.81\ \text{m/s}^2$. Se l'attrazione terrestre che tiene in orbita la Luna fosse della stessa natura di quella che fa cadere gli oggetti a terra, e avesse sempre una dipendenza da $\dfrac{1}{r^2}$, dovremmo aspettarci che

$$a_☾ \cdot r^2_{\oplus☾} = g \cdot R^2_\oplus$$

In effetti, troviamo che

$$\begin{aligned} a_{☾} \cdot r^2_{\oplus☾} &= 4.0 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m^3 s^{-2}} \\ g \cdot R^2_{\oplus} &= 4.0 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m^3 s^{-2}} \end{aligned}$$

quindi effettivamente anche i valori di $a_{☾}$ e g sono in accordo con una legge $1/r^2$, che questa volta riguarda l'attrazione della Terra.

$$F^{\oplus} = 4\pi^2 K_{\oplus} \frac{m}{r^2} \tag{19.31}$$

- Il principio di azione-reazione ci viene incontro: se il Sole attrae la Terra, anche la Terra deve attrarre il Sole con forza uguale e contraria. La forza che il Sole esercita sulla Terra è:

$$F^{\odot}_{\oplus} = 4\pi^2 K_{\odot} \frac{m_{\oplus}}{r^2}$$

Ipotizzando che la forza che la Terra esercita sul Sole sia della stessa natura di quella esercitata sulla Luna e sugli oggetti vicini alla sua superficie, essa deve essere pari a:

$$F^{\oplus}_{\odot} = 4\pi^2 K_{\oplus} \frac{M_{\odot}}{r^2}$$

Uguagliando $F^{\odot}_{\oplus} = F^{\oplus}_{\odot}$ si ottiene:

$$m_{\oplus} K_{\odot} = M_{\odot} K_{\oplus} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{K_{\odot}}{K_{\oplus}} = \frac{M_{\odot}}{m_{\oplus}}$$

Quindi le K che quantificano l'attrazione sono proporzionali alle masse degli oggetti che causano l'attrazione:

$$4\pi^2 K_{\odot} = G M_{\odot} \qquad ; \qquad 4\pi^2 K_{\oplus} = G M_{\oplus}$$

In particolare, la forza Terra-Sole risulta:

$$F_{\oplus\odot} = G \frac{M_{\odot} M_{\oplus}}{r^2_{\oplus\odot}} \tag{19.32}$$

La costante universale G è ancora ignota.

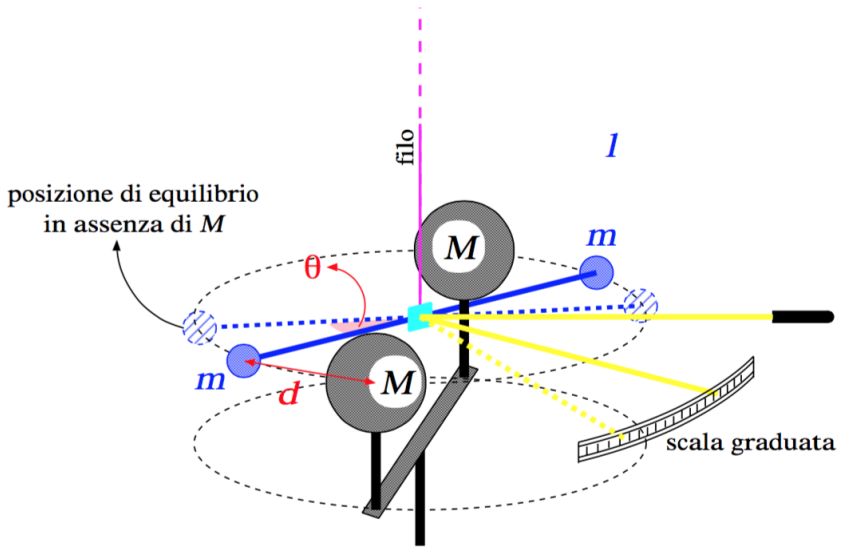


Figura 19.13: *Schema della bilancia di torsione di Cavendish, utilizzata per misurare la costante G.*

19.12.1 Misura della costante G

Il valore di G è piuttosto difficile da ottenere, essendo la gravità così debole rispetto ad altre forze. L'idea di base è di partire dall'Eq. (19.1), e misurare la forza agente fra masse note poste a distanza nota.

L'apparato utilizzato è una *bilancia di torsione*, come in Fig. 19.13. Due masse leggere m, sospese agli estremi dell'apparato mobile, con bracci di lunghezza ℓ, risentono l'attrazione gravitazionale di altre due masse M molto più grosse.

L'apparato mobile è sospeso da un filo che ha costante di torsione elastica k, cioè se il filo subisce una torsione di un angolo θ, esso esercita un'azione elastica di richiamo dell'apparato descritta dal momento torcente:

$$M_{el} = -k\theta \tag{19.33}$$

La costante elastica k del filo viene determinata facendo oscillare (in torsione) l'apparato mobile: detto I il momento di inerzia dell'apparato mobile, si dovrebbe avere un moto armonico descritto dall'equazione

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = M_{el} = -k\theta$$

dunque con frequenza angolare $\Omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$, ovvero periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \tag{19.34}$$

Il momento di inerzia può essere calcolato per un apparato mobile in cui l'asta che sostiene le masse m abbia massa trascurabile: in tal caso $I = 2m\ell^2$. Misurando T si ricava k.

Le masse m subiscono forze gravitazionali

$$F_g = G\frac{Mm}{d^2} \tag{19.35}$$

ad opera delle masse M, essendo d la distanza che le separa. Il sistema viene montato in modo tale che la congiungente m-M sia ortogonale ai bracci ℓ, cosicché il momento torcente gravitazionale è

$$M_g = 2\ell F_g = G \cdot \frac{2\ell mM}{d^2} \tag{19.36}$$

La condizione di equilibrio, che non produce rotazioni, si ha quando il momento torcente totale è nullo:

$$0 = M_g + M_{el} = G \cdot \frac{2\ell mM}{d^2} - k\theta \tag{19.37}$$

Pertanto, conoscendo $m,\ M,\ k$ e misurando $\theta,\ d$ si può ricavare G.

La misura di θ viene effettuata osservando lo spostamento di un fascio di luce riflesso da uno specchietto montato sull'apparato mobile, per evitare un contatto diretto che potrebbe perturbare la misura.

Questa misura fu condotta per la prima volta dal fisico inglese Henry Cavendish a fine '700.

19.13 Moti in un campo gravitazionale centrale

Consideriamo il campo generato da una massa M, e per comodità scegliamo l'origine O del nostro riferimento coincidente con la posizione di M. L'espressione del campo gravitazionale è data nell'Eq. (19.6):

$$\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -GM\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}$$

Il moto di una massa-sonda in un campo gravitazionale centrale ammette sempre una soluzione analitica. Abbiamo già trattato il caso particolare dell'orbita circolare. Qui analizziamo i casi più generali.

19.13.1 Costanti del moto

Il moto in un campo gravitazionale centrale è caratterizzato da due *costanti del moto*:

- l'energia meccanica:

$$E = \mathcal{E} + \mathcal{U}(r) = \frac{m}{2}v^2 - \frac{GMm}{r} \tag{19.38}$$

- il momento angolare, $\vec{\boldsymbol{L}}$; in particolare:

$$L = |\vec{\boldsymbol{L}}| = m\omega r^2 \tag{19.39}$$

La conservazione del momento angolare deriva dalla centralità del campo di forza, e garantisce che l'orbita giaccia su un piano che contiene il centro di gravità (come spiegato in Sezione 15.2.3).

Questa considerazione ci consente di lavorare con le coordinate polari r, ϕ, introdotte nella Sezione 4.5.1, Eq. (4.16)

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \end{aligned} \tag{19.40}$$

La *velocità angolare* ω e la *velocità radiale* v_r sono date da:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \quad ; \quad v_r = \frac{dr}{dt}$$

Calcoliamo le componenti v_x, v_y della velocità in coordinate polari:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{d(r\cos\phi)}{dt} \\ &= \frac{dr}{dt}\cos\phi + r\frac{d(\cos\phi)}{dt} = v_r\cos\phi - r\sin\phi\frac{d\phi}{dt} \\ &= v_r\cos\phi - \omega r\sin\phi \\ v_y &= \frac{d(r\sin\phi)}{dt} \\ &= \frac{dr}{dt}\sin\phi + r\frac{d(\sin\phi)}{dt} = v_r\sin\phi + r\cos\phi\frac{d\phi}{dt} \\ &= v_r\sin\phi + \omega r\cos\phi \end{aligned} \tag{19.41}$$

19.13.2 Regione cinematicamente accessibile

L'energia potenziale è sempre definita negativa:

$$\mathcal{U}(r) = -\frac{GMm}{r} < 0$$

Nel limite $r \to +\infty$, cioè quando l'oggetto orbitante si allontani infinitamente dal centro di gravità, l'energia potenziale tende ad annullarsi: $\mathcal{U}(r) \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$.

Inoltre sappiamo che l'energia cinetica è sempre positiva: $\mathcal{E} \geq 0$. D'altra parte, per ogni moto dotato di momento angolare, l'energia cinetica non può mai annullarsi — altrimenti sarebbe $v = 0$ e quindi si annullerebbe il momento angolare. Più in dettaglio: scomponiamo la velocità $\vec{\boldsymbol{v}}$ nelle sue componenti radiale e azimuthale:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{dr}{dt} \\ v_\phi &= \omega r = \frac{L}{mr} \end{aligned}$$

Ora,

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}\left(v_r^2 + v_\phi^2\right) \geq \frac{m}{2}v_\phi^2 = \frac{L^2}{2mr^2}$$

ovvero

$$\mathcal{E} \geq \frac{L^2}{2mr^2}$$

Quindi, detta E l'energia meccanica del sistema,

$$\mathcal{E} = E - \mathcal{U}(r) = E + \frac{GMm}{r}$$

la disuguaglianza trovata per $\mathcal{E}$ diventa:

$$\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \leq E \tag{19.42}$$

Questa disequazione definisce la *regione cinematicamente accessibile* al moto.

La situazione è quella illustrata in Fig. 19.14(a sinistra). Sia l'energia potenziale, $\mathcal{U}(r) = -\dfrac{GMm}{r}$, che il termine $\dfrac{L^2}{2mr^2}$ sono raffigurati in funzione della distanza r dal centro di gravità. La prima è negativa ed attrattiva, mentre il secondo è positivo e produce un effetto repulsivo: per questo viene

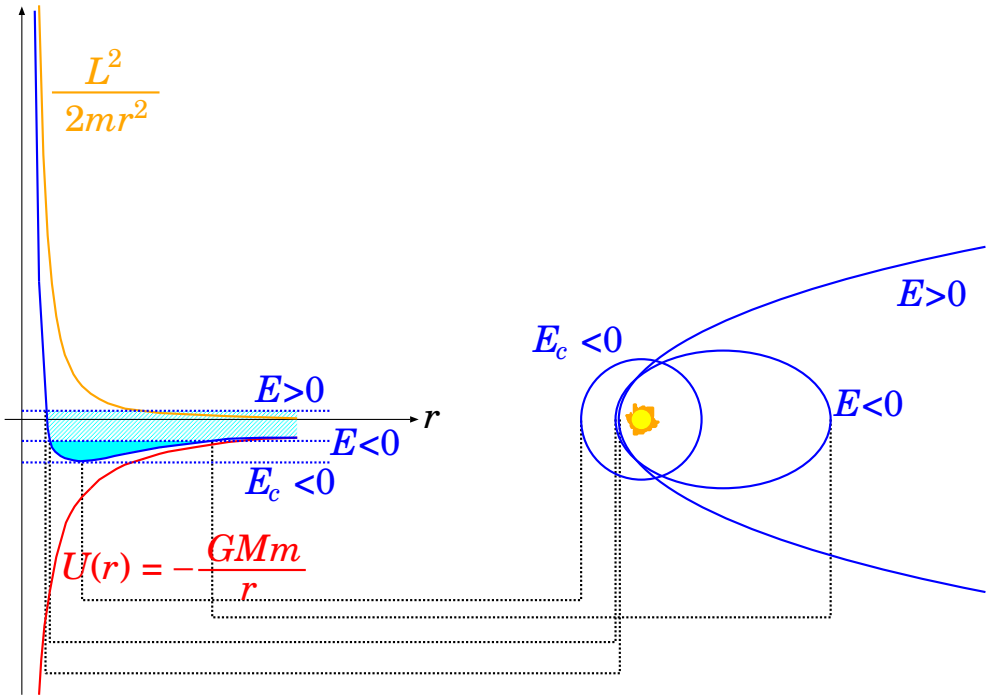


Figura 19.14: *A sinistra: grafico dell'energia potenziale $\mathcal{U}(r)$ (in rosso), del "potenziale centrifugo" $\frac{L^2}{2mr^2}$ (in verde), e della loro somma (in blu), in funzione della distanza r dal centro di gravità. La regione cinematicamente accessibile è indicata con colore uniforme per un caso $E < 0$ (moto confinato), e con un tratteggio per $E > 0$ (moto non confinato). A destra: esempi di orbite nel campo gravitazionale. Per $E < 0$ le orbite sono chiuse ed ellittiche (circolari come caso-limite), mentre per $E > 0$ sono aperte (paraboliche o iperboliche).*

chiamato *potenziale centrifugo*. I due termini hanno dunque caratteristiche opposte. Tuttavia, a causa della diversa dipendenza da r, a grande distanze domina l'energia potenziale ($\propto -\frac{1}{r}$), mentre più vicino al centro di gravità è preponderante il potenziale centrifugo ($\propto +\frac{1}{r^2}$).

Per un'energia meccanica $E < 0$ il moto è confinato e presenta una distanza minima e una distanza massima. Queste si possono ricavare direttamente dall'Eq. (19.42), nel caso-limite dell'uguaglianza. Si ottiene

$$-2mEr^2 - 2GMm^2r + L^2 = 0$$

le cui due soluzioni sono:

$$\begin{aligned} r_{min} &= \frac{GMm^2 - \sqrt{(GMm^2)^2 + 2mEL^2}}{-2mE} \\ r_{max} &= \frac{GMm^2 + \sqrt{(GMm^2)^2 + 2mEL^2}}{-2mE} \end{aligned} \qquad (\ E < 0\ ) \qquad (19.43)$$

Nel caso-limite in cui $(GMm^2)^2 + 2mEL^2 = 0$, le due soluzioni diventano identiche: $r_{min} = r_{max}$. Quindi un solo valore di r è possibile, e l'orbita diventa necessariamente circolare. Questo avviene per

$$\begin{aligned} E_c &= -\frac{G^2M^2m^3}{2L^2} \\ r_c &= -\frac{GMm}{2E_c} = \frac{L^2}{GMm^2} \end{aligned} \qquad (19.44)$$

Per un'energia meccanica $E > 0$ il moto non è confinato, l'oggetto può arrivare a distanza infinita, però esiste sempre un valore minimo della distanza, oltre il quale non è possibile avvicinarsi ulteriormente. Questo valore si trova come fatto per il caso $E < 0$, però ora, con $E > 0$, solo una delle soluzioni dell'Eq. (19.43) è positiva, e quindi fisicamente sensata:

$$r_{min} = \frac{-GMm^2 + \sqrt{(GMm^2)^2 + 2mEL^2}}{2mE} \qquad (\ E > 0\ ) \qquad (19.45)$$

È interessante notare che, sia per orbite confinate ($E < 0$) che per orbite aperte ($E > 0$), l'oggetto non può mai raggiungere il centro di gravità. Il *potenziale centrifugo* lo impedisce. In particolare, i pianeti, pur attratti dal Sole, non possono cadervi sopra, così come la Luna non può cadere sulla Terra.

19.13.3 Parametri dell'orbita ellittica

Nel caso di orbite confinate, dalle Eq. (19.43) si possono ricavare alcuni parametri utili dell'orbita ellittica:

$$A = \frac{r_{min} + r_{max}}{2} = \frac{GMm^2}{-2mE} \qquad (19.46)$$

$$
\begin{aligned}
\epsilon &= \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{min} + r_{max}} = \frac{\sqrt{(GMm^2)^2 + 2mEL^2}}{GMm^2} \\
\epsilon^2 &= 1 + \frac{2mEL^2}{(GMm^2)^2} = 1 - \frac{L^2}{A\,GMm^2}
\end{aligned} \tag{19.47}
$$

19.14 Soluzione generale del moto in un campo centrale

Le proprietà esposte nelle sezioni precedenti consentono di semplificare di molto la soluzione delle equazioni del moto.

19.14.1 Equazione radiale

Anzitutto, grazie alla conservazione del momento angolare, il problema da tridimensionale diventa bidimensionale, e può essere trattato con le coordinate:

$$
\begin{aligned}
x &= r\,\cos\phi \\
y &= r\,\sin\phi
\end{aligned}
$$

Inoltre, l'Eq. (19.29)

$$
\omega = \frac{L}{mr^2}
$$

consente di ridurre ulteriormente il problema ad una dimensione: quella radiale, r. Introduciamo le seguenti notazioni:

$$
\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} \quad ; \quad \ddot{r} \equiv \frac{d^2r}{dt^2}
$$

Riscriviamo le equazioni della velocità, Eq. (19.41):

$$
\begin{aligned}
v_x &= \dot{r}\cos\phi - \frac{L}{mr}\sin\phi \\
v_y &= \dot{r}\sin\phi + \frac{L}{mr}\cos\phi
\end{aligned} \tag{19.48}
$$

e poi deriviamole rispetto a t, per ottenere le componenti dell'accelerazione. Pronti? Attenti ai calcoli!

$$\begin{aligned}
a_x = \frac{dv_x}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\cos\phi - \frac{L}{mr}\sin\phi\right) \\
&= \ddot{r}\cos\phi - \dot{r}\omega\sin\phi - \frac{L}{mr}\omega\cos\phi + \frac{L}{mr^2}\dot{r}\sin\phi \\
a_y = \frac{dv_y}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\sin\phi + \frac{L}{mr}\cos\phi\right) \\
&= \ddot{r}\sin\phi + \dot{r}\omega\cos\phi - \frac{L}{mr}\omega\sin\phi - \frac{L}{mr^2}\dot{r}\cos\phi
\end{aligned}$$

Ricordando che $\omega = \dfrac{L}{mr^2}$, i termini in $\dot{r}$ si annullano, lasciando:

$$\begin{aligned}
a_x &= \left(\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2r^3}\right)\cos\phi \\
a_y &= \left(\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2r^3}\right)\sin\phi
\end{aligned} \tag{19.49}$$

Ora ragioniamo sulla forza centrale: $\vec{\boldsymbol{F}} = F(r)\hat{\boldsymbol{r}}$, quindi per componenti:

$$\begin{aligned}
ma_x = F_x &= F(r)\cos\phi \\
ma_y = F_y &= F(r)\sin\phi
\end{aligned}$$

Per confronto con le Eq. (19.49) si ottiene:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \ddot{r} = \frac{F(r)}{m} + \frac{L^2}{m^2r^3} \tag{19.50}$$

Questa è l'*equazione radiale del moto in un campo centrale.* Risolvendola, si trova la legge oraria $r = r(t)$ che dice come evolve nel tempo la distanza dal centro di forza. Dopodiché la velocità angolare, $\omega(t) = \dfrac{L}{m\cdot(r(t))^2}$, può essere integrata per ottenere la legge oraria $\phi = \phi(t)$.

19.14.2 Traiettoria

Senza risolvere l'equazione del moto, Eq. (19.50), si può comunque scrivere un'equazione differenziale per la traiettoria, che metta in relazione r, ϕ. Osserviamo che per una qualunque grandezza $A(\phi)$ si può porre

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\phi}\cdot\frac{d\phi}{dt} = \frac{dA}{d\phi}\omega = \frac{L}{mr^2}\cdot\frac{dA}{d\phi}$$

In altre parole possiamo scrivere una *identità operatoriale*

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{L}{mr^2}\frac{d}{d\phi} \qquad \text{(valida per moti in campo centrale)} \tag{19.51}$$

Applicando due volte l'identità Eq. (19.51) si ottiene:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}r\right) = \frac{L}{mr^2}\frac{d}{d\phi}\left(\frac{L}{mr^2}\frac{d}{d\phi}r\right) = \frac{L^2}{m^2}\frac{1}{r^2}\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)$$

Introducendo $u \equiv \frac{1}{r}$ abbiamo $du = -\frac{dr}{r^2}$, quindi

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{L^2}{m^2}u^2\frac{d^2u}{d\phi^2} \qquad \left(u \equiv \frac{1}{r}\right)$$

Sostituendo nell'Eq. (19.50) si ottiene

$$-\frac{L^2}{m^2}u^2\frac{d^2u}{d\phi^2} = \frac{F(1/u)}{m} + \frac{L^2}{m^2}u^3$$

ovvero

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\frac{m}{L^2}\frac{F(1/u)}{u^2} \qquad \left(u \equiv \frac{1}{r}\right)$$

Questa equazione prende una forma particolarmente semplice nel caso gravitazionale, essendo $F(r) = -\frac{GMm}{r^2}$, ovvero $F(1/u) = -GmMu^2$. Pertanto,

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{Gm^2M}{L^2} \equiv K \tag{19.52}$$

la cui soluzione (provare per credere!) è

$$u(\phi) = K_0\cos\phi + K$$

dove K_0 dipende dalle condizioni iniziali e per convenzione viene scelto ≥ 0. Passando al raggio r si trova:

$$r(\phi) = \frac{1}{K + K_0\cos\phi} \qquad \left(K \equiv \frac{Gm^2M}{L^2}\right) \tag{19.53}$$

Distinguiamo diversi casi:

- $K_0 = 0$: in questo caso, r è ovviamente indipendente da ϕ, quindi l'orbita è *circolare*, con raggio

$$r = \frac{1}{K} = \frac{L^2}{Gm^2M} \tag{19.54}$$

- $0 < K_0 < K$: in tal caso il denominatore è sempre positivo ed il moto è confinato: c'è un raggio massimo e uno minimo:

$$r_{max} = \frac{1}{K - K_0} \quad ; \quad r_{min} = \frac{1}{K + K_0} \tag{19.55}$$

- $K_0 = K$: il denominatore può annullarsi per $\cos\phi = -1$, quindi il raggio diventa infinito: esiste sempre un raggio minimo $r_{min} = \dfrac{1}{2K}$ ma non un raggio massimo, l'orbita si allontana indefinitamente dal centro di gravità.

- $K_0 > K$: in tal caso il denominatore può annullarsi per $\cos\phi = -\dfrac{K}{K_0}$, ma può anche diventare negativo se $\cos\phi < -\dfrac{K}{K_0}$: poiché questa situazione non è fisica — darebbe $r < 0$ — questa zona angolare è proibita, il moto deve essere confinato a $\cos\phi \geq -\dfrac{K}{K_0}$

L'Eq. (19.53) descrive una traiettoria conica (cioè ellittica, o parabolica, o iperbolica) con il centro di gravità in un fuoco. Per capirlo, passiamo alle coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi = \frac{\cos\phi}{K_0\cos\phi + K} \\ y &= r\sin\phi = \frac{\sin\phi}{K_0\cos\phi + K} \end{aligned}$$

Dalla 1^a si può ricavare

$$\cos\phi = \frac{Kx}{1 - K_0 x}$$

e anche

$$K_0\cos\phi + K = \frac{\cos\phi}{x} = \frac{K}{1 - K_0 x}$$

Lavorando poi sulla 2^a:

$$\begin{aligned} \sin\phi &= y(K_0\cos\phi + K) = \frac{Ky}{1 - K_0 x} \\ 1 - \cos^2\phi = \sin^2\phi &= \left(\frac{Ky}{1 - K_0 x}\right)^2 \\ 1 - \left(\frac{Kx}{1 - K_0 x}\right)^2 &= \left(\frac{Ky}{1 - K_0 x}\right)^2 \\ (1 - K_0 x)^2 - (Kx)^2 &= (Ky)^2 \end{aligned}$$

La geometria analitica ci insegna che un'equazione di 2° grado nelle coordinate x, y descrive effettivamente una conica [4]. Più nel dettaglio, occorre esplicitare i coefficienti di x^2, y^2, xy, per trovare una forma del tipo $ax^2 + bxy + cy^2$; poi si calcola $\Delta = b^2 - 4ac$: se $\Delta > 0$ la traiettoria è un'iperbole, se $\Delta = 0$ è una parabola, se $\Delta < 0$ è un'ellisse [5]. Nel nostro caso abbiamo

$$(K^2 - K_0^2)x^2 + K^2y^2 = 1 - 2K_0x$$

e quindi $\Delta = 4(K_0^2 - K^2)K^2$. Ricordando che K, K_0 sono entrambi ≥ 0, abbiamo i 3 casi:

- $K_0 < K \implies \Delta < 0$: traiettoria ellittica
- $K_0 = K \implies \Delta = 0$: traiettoria parabolica
- $K_0 > K \implies \Delta > 0$: traiettoria iperbolica

Ovviamente, nel primo caso il moto è confinato, mentre negli altri due non lo è — a conferma di quanto abbiamo già discusso.

19.14.3 La 3^a legge di Keplero

Riconsideriamo il caso dell'orbita ellittica: possiamo calcolare l'eccentricità, $\epsilon = \dfrac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$, facendo uso delle Eq. (19.55), da cui troviamo $\epsilon = \dfrac{K_0}{K}$. Quindi possiamo riscrivere la soluzione generale, Eq. (19.53), come:

$$r(\phi) = \left(\frac{L^2}{Gm^2M}\right)\frac{1}{1 + \epsilon\cos\phi} \tag{19.56}$$

[4] Una curva conica è ottenuta intersecando un cono con un piano. L'equazione cartesiana di un cono, con asse lungo z, si scrive $z^2 = k^2(x^2 + y^2)$, dunque un'equazione di 2° grado in (x, y, z). Il piano che lo interseca è della forma $z = \alpha x + \beta y$, dunque un'equazione di 1° grado in (x, y, z). Eliminando la z, si ottiene un'equazione di 2° grado in (x, y).

[5] L'equazione completa sarebbe $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. Vogliamo vedere se la curva arriva a distanze infinite (iperbole o parabola) o se è confinata (ellisse). Se esistono punti che si allontanano indefinitamente, per essi la parte $dx + ey + f$ diventa trascurabile, pertanto l'equazione si approssima arbitrariamente bene con $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$. Introduciamo $t = \dfrac{y}{x}$, dividiamo l'equazione per x^2, troviamo $ct^2 + bt + a = 0$, da risolvere per t. Il discriminante è $\Delta = b^2 - 4ac$. Per $\Delta > 0$ abbiamo due soluzioni distinte t_1, t_2, che indicano 2 direzioni distinte lungo le quali la curva va all'infinito: sono i 2 asintoti dell'iperbole; per $\Delta = 0$ le due soluzioni coincidono: è il caso della parabola; infine per $\Delta < 0$ non esistono soluzioni, ovvero la curva non va all'infinito: quindi si tratta di un'ellisse.

Abbiamo visto che il raggio vettore del pianeta in orbita descrive aree uguali in tempi uguali:

$$d\Sigma = \frac{r^2 d\phi}{2} = \frac{r^2\omega}{2}\,dt = \frac{L}{2m}\,dt$$

L'area totale di un'orbita ellittica, di semiassi $A,\ B$, è

$$\Sigma = \pi AB$$

In una ellisse, la relazione fra l'eccentricità e i semiassi è $\epsilon = \dfrac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A}$, da cui $B = A\sqrt{1-\epsilon^2}$. Quindi l'area dell'orbita diventa

$$\Sigma = \pi A^2\sqrt{1-\epsilon^2}$$

Il tempo T necessario a percorrerla è dato da

$$\begin{aligned} \Sigma &= \int_0^T dt\,\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{L}{2m}\,T \\ T &= \frac{2m}{L}\cdot\pi AB = 2\pi\frac{m}{L}\,A^2\,\sqrt{1-\epsilon^2} \end{aligned}$$

Utilizzando l'Eq. (19.47) si trova $1-\epsilon^2 = \dfrac{L^2}{A\,GMm^2}$. Quindi

$$T = \frac{2m}{L}\cdot\pi A^2\cdot\frac{L}{\sqrt{A\,GMm^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{A^3}{GM}}$$

ovvero

$$\frac{A^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \tag{19.57}$$

e anche la 3^a legge di Keplero è dimostrata.

19.15 Problemi di voli spaziali

Velocità di fuga da un pianeta

La velocità di fuga v_∞ da un pianeta è definita come la velocità minima necessaria perché un oggetto, lanciato in verticale, possa raggiungere una distanza infinita. Perché il moto non sia confinato l'energia meccanica deve essere $E \geq 0$. Quindi la velocità di fuga si calcola nel caso-limite $E = 0$.

Detta M la massa del pianeta e R il suo raggio, alla superficie del pianeta (senza contare la rotazione!) l'energia meccanica di un oggetto di massa m è:

$$E = \mathcal{E} + \mathcal{U} = \frac{m}{2}v^2 - \frac{GMm}{R}$$

La velocità di fuga si ottiene imponendo $E = 0$, *quindi* $v_\infty^2 = 2\dfrac{GM}{R}$, *da cui*

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Se invece vogliamo considerare anche la rotazione del pianeta, con velocità angolare ω, *mettiamoci nel caso più vantaggioso: un lancio dall'equatore. Quindi la velocità ha una componente orizzontale* $v_h = \omega R$ *e una verticale* v_∞. *Dopo il lancio, il momento angolare* L *si conserva; al momento del lancio* $L = m\omega R^2 = mRv_h$. *L'energia meccanica al momento del lancio si scrive*

$$E = \frac{m}{2}\left(v_h^2 + v_\infty^2\right) - \frac{GMm}{R}$$

Imponendo $E = 0$ *si trova*

$$\left(\frac{L}{mR}\right)^2 + v_\infty^2 = \frac{2GM}{R}$$

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2GM}{R} - \left(\frac{L}{mR}\right)^2} = \sqrt{\frac{2GM}{R} - (\omega R)^2} \qquad \textit{(all'equatore)}$$

In linea di principio, sarebbe più vantaggioso lanciare da una base astronautica equatoriale, poiché la velocità di fuga è minore. In pratica, la differenza è trascurabile. Consideriamo l'esempio della Terra: $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $R = 6370$ km, $\omega = 7.27 \cdot 10^{-5}$ rad/s. *Si trova:*

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 11.2 \text{ km/s}$$

La correzione per la rotazione è $\omega R = 463$ m/s, *molto più piccola di* v_∞, *pertanto dà effetto trascurabile.*

Velocità di fuga dal Sole, partendo dall'orbita di un pianeta

Il risultato, trovato per la velocità di fuga da un pianeta, non tiene conto della presenza del Sole: abbiamo visto infatti che il "pozzo gravitazionale" del pianeta è dominante solo in prossimità del pianeta stesso. Volendo fuggire dal Sistema Solare, occorre utilizzare una formula analoga, ma usando come M *la massa del Sole e al posto di* R *la distanza Sole-pianeta. Per esempio, per la Terra,*

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{r_\oplus}} = 42.2 \text{ km/s}$$

Questa è la velocità che si dovrebbe dare a una sonda spaziale che dovesse uscire dal Sistema Solare, una volta che abbia già abbandonato il pozzo gravitazionale

terrestre. *Considerando la velocità orbitale della Terra,* 30 km/s, *la sonda dovrebbe essere lanciata con velocità* 12 km/s *tangenzialmente alla Terra stessa.*

Viaggio Terra-Marte — traiettoria di Hohmann

Supponiamo che le orbite della Terra e di Marte siano circolari, con raggi rispettivamente $r_\oplus = 149.6 \cdot 10^6$ km *e* $r_♂ = 227.9 \cdot 10^6$ km. *Si vuole lanciare un'astronave dalla Terra, che parta tangente all'orbita terrestre, e con un'orbita ellittica raggiunga al proprio aphelio l'orbita di Marte. Con che velocità* $v_\oplus$ *deve partire? Con che velocità* $v_♂$ *raggiungerà l'orbita di Marte? Quanto tempo impiega l'astronave per giungere a destinazione?*

Risposta. *L'orbita dell'astronave è tangente a quella della Terra al suo perielio, pertanto la sua velocità è ortogonale al raggio Sole-astronave. L'ortogonalità si ha anche all'aphelio. Pertanto il momento angolare, che è conservato, si può scrivere*

$$L = m_0 r_\oplus v_\oplus = m_0 r_♂ v_♂$$

(essendo m_0 *la massa dell'astronave). La conservazione dell'energia meccanica inoltre mi dà:*

$$E = \frac{m_0}{2} v_\oplus^2 - \frac{GM_\odot m_0}{r_\oplus} = \frac{m_0}{2} v_♂^2 - \frac{GM_\odot m_0}{r_♂}$$

Abbiamo un problema con due equazioni e due incognite: $v_\oplus$ *e* $v_♂$. *Possiamo eliminare* $v_♂$ *dalla prima equazione — la più semplice — ottenendo*

$$v_♂ = \frac{r_\oplus}{r_♂} v_\oplus$$

La seconda equazione diventa:

$$\begin{aligned}
v_\oplus^2 \left[1 - \left(\frac{r_\oplus}{r_♂} \right)^2 \right] &= 2GM_\odot \left(\frac{1}{r_\oplus} - \frac{1}{r_♂} \right) \\
v_\oplus^2 \frac{r_♂^2 - r_\oplus^2}{r_♂^2} &= 2GM_\odot \frac{r_♂ - r_\oplus}{r_♂ r_\oplus} \\
v_\oplus^2 \frac{r_♂ + r_\oplus}{r_♂} &= 2GM_\odot \frac{1}{r_\oplus} \\
v_\oplus &= \sqrt{\frac{2GM_\odot r_♂}{r_\oplus (r_♂ + r_\oplus)}}
\end{aligned}$$

Inserendo i dati per $G = 6.67384 \cdot 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}, $M_\odot = 1.99 \cdot 10^{30}$ kg, $r_\oplus$, $r_♂$ *si trova*

$$\begin{aligned}
v_\oplus &= 3.274 \cdot 10^4 \text{ m/s} \simeq 32.7 \text{ km/s} \\
v_♂ &= 2.149 \cdot 10^4 \text{ m/s} \simeq 21.5 \text{ km/s}
\end{aligned}$$

Per rispondere all'ultima domanda usiamo la 3ª legge di Keplero: il periodo T, lungo un'orbita completa di semiasse maggiore $A = \dfrac{r_\oplus + r_♂}{2} = 188.8 \cdot 10^6$ km, soddisfa l'equazione $T^2 = K_\odot A^3$; analogamente l'orbita terrestre ha un periodo $T_\oplus = 1$ anno che soddisfa $T_\oplus^2 = K_\odot r_\oplus^3$. Per confronto, $T = T_\oplus \left(\dfrac{A}{r_\oplus}\right)^{3/2} = 1.42$ anni. Questo sarebbe il periodo di un'orbita completa, ma visto che ci interessa solo l'andata dalla Terra a Marte, cioè dal perielio all'aphelio, il tempo è la metà.

In conclusione, il viaggio dalla Terra a Marte dura 0.71 anni, ovvero 8 mesi e mezzo.

Fionda gravitazionale

La "fionda gravitazionale" — o "gravity assist" — è una tecnica usata per accelerare una sonda spaziale, fino a farle raggiungere pianeti esterni. Dare subito l'energia cinetica necessaria a raggiungere l'orbita esterna con una traiettoria di Hohmann sarebbe troppo dispendioso. Pertanto si lancia la sonda verso un pianeta, per effettuare un "fly-by" durante il quale la sonda viene "trainata" e deviata dalla gravità del pianeta. Lo scopo è di aumentare l'energia cinetica della sonda, in modo da farla allontanare di più dal Sole.

Come esempio, consideriamo le missioni Pioneer 10 e 11, e le missioni Voyager 1 e 2. Le traiettorie sono rappresentate in Fig. 19.15, e le date principali sono riassunte nella tabella seguente:

missione	*lancio*	*fly-by*			
		Giove	*Saturno*	*Urano*	*Nettuno*
Pioneer 10	*15/07/1972*	*3/12/1973*			
Pioneer 11	*5/04/1773*	*2/12/1974*	*1/09/1979*		
Voyager 1	*5/09/1977*	*5/03/1979*	*12/11/1980*		
Voyager 2	*20/08/1977*	*9/07/1979*	*25/08/1981*	*24/01/1986*	*25/08/1989*

Problema: se la gravità è conservativa, come fa ad aumentare l'energia cinetica della sonda, da prima a dopo del fly-by? Osserviamo intanto che il pianeta non è fermo, per cui non possiamo limitarci a considerare solo l'energia della sonda...

Per capire il problema, studiamo il moto in due diversi sistemi di riferimento: SR nel Sistema Solare, e SR' solidale con il pianeta — che si muove con velocità $\vec{v}_P$ rispetto a SR. Chiamiamo $\vec{v}_{in}$, $\vec{v}_{out}$ le velocità della sonda prima e dopo il fly-by, in entrambi i casi quando è sufficientemente lontana da poter trascurare la gravità del pianeta. Nel SR' tali velocità sono $\vec{v}'_{in}$, $\vec{v}'_{out}$. Nel SR' il pianeta appare fermo, e per la conservazione dell'energia deve essere $\mathcal{E}'_{in} = \mathcal{E}'_{out}$, ovvero $(v'_{in})^2 = (v'_{out})^2$. Nel SR, invece, il pianeta si muove, quindi in generale sarà

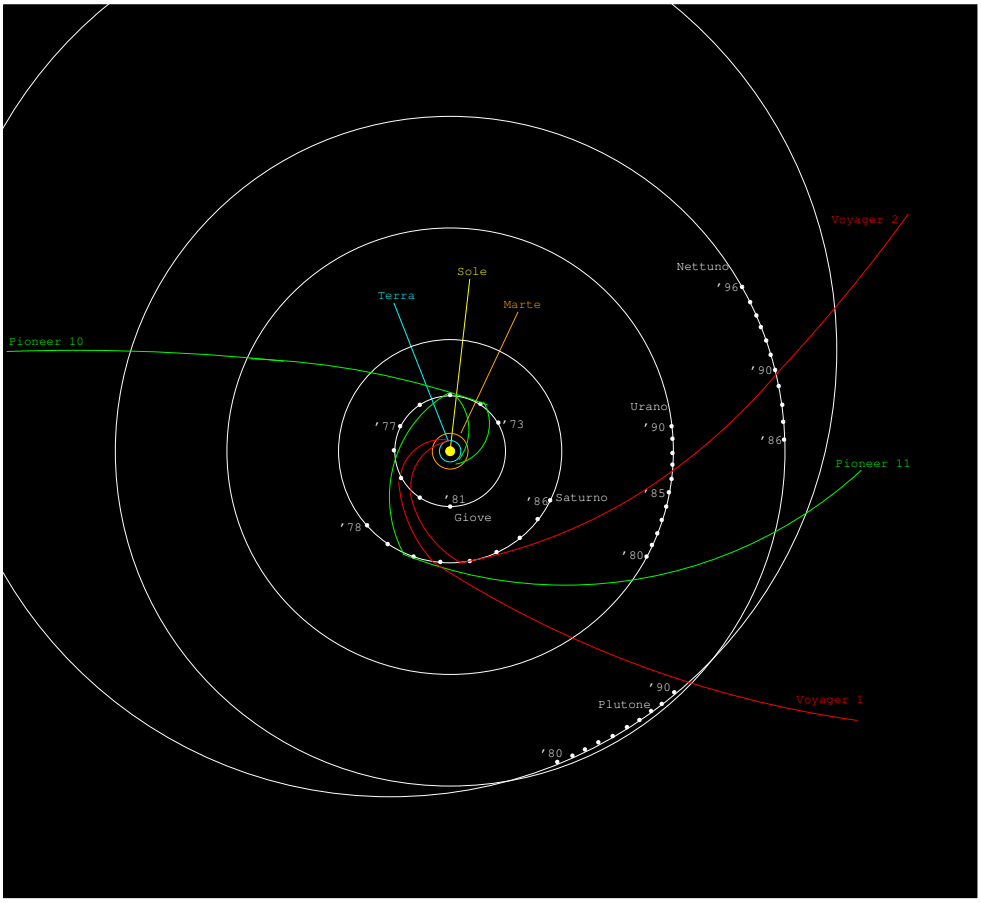


Figura 19.15: *Traiettorie delle sonde spaziali Pioneer e Voyager.*

$(v_{in})^2 \neq (v_{out})^2$:

$$\begin{aligned}
v_{out}^2 - v_{in}^2 &= \left(\vec{\boldsymbol{v}}'_{out} + \vec{\boldsymbol{v}}_P\right)^2 - \left(\vec{\boldsymbol{v}}'_{in} + \vec{\boldsymbol{v}}_P\right)^2 \\
&= \left[(v'_{out})^2 + v_P^2 + 2\vec{\boldsymbol{v}}'_{out} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_P\right] - \left[(v'_{in})^2 + v_P^2 + 2\vec{\boldsymbol{v}}'_{in} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_P\right] \\
&= 2\left(\vec{\boldsymbol{v}}'_{out} - \vec{\boldsymbol{v}}'_{in}\right) \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_P \\
\Delta\mathcal{E} &= \frac{m}{2}\left(v_{out}^2 - v_{in}^2\right) \\
&= m\left(\vec{\boldsymbol{v}}'_{out} - \vec{\boldsymbol{v}}'_{in}\right) \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_P
\end{aligned}$$

Nel SR′, $v'_{in} = v'_{out} = v'$. *Possiamo chiamare* θ'_{in}, θ'_{out} *gli angoli formati da* $\vec{\boldsymbol{v}}'_{in}$, $\vec{\boldsymbol{v}}'_{out}$ *con* $\vec{\boldsymbol{v}}_P$. *Quindi*

$$\Delta\mathcal{E} = mv'v_P(\cos\theta'_{out} - \cos\theta'_{in})$$

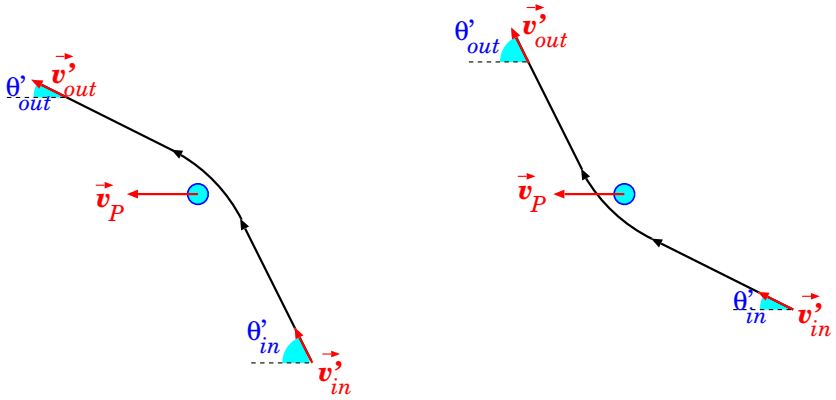


Figura 19.16: *Schema della fionda gravitazionale. A sinistra,* $\cos\theta'_{out} > \cos\theta'_{in}$ *e c'è un guadagno di energia cinetica; a destra invece* $\cos\theta'_{out} < \cos\theta'_{in}$ *e c'è una perdita.*

Il guadagno di energia cinetica dipende dagli angoli θ'_{in}, θ'_{out} *— vedi Fig. 19.16. Si può avere un aumento o una perdita di energia, a seconda di come avviene il fly-by: se la sonda passa "dietro" al pianeta viene accelerata, se passa "davanti" viene frenata. Infine, osserviamo che l'energia meccanica del sistema pianeta-sonda si deve conservare: la sonda acquisisce (o perde) energia cinetica a spese (o a vantaggio) di quella del pianeta, ma l'effetto sul pianeta è del tutto invisibile, a causa della sua massa enormemente maggiore di quella della sonda.*

19.16 Maree

Le maree sono dovute ad effetti gravitazionali. Nel caso della Terra, esse sono dovute principalmente alla Luna, e secondariamente al Sole. Il livello del mare tende a salire quando la Luna è alta (e questo è intuitivo, la gravità della Luna "attrae" il mare verso di sè), ma anche dal lato opposto della Terra — e questo non è per niente intuitivo...

Per studiare bene il fenomeno, occorre considerare che la Terra *non è un sistema inerziale*, in quanto soggetta alla gravità della Luna, quindi esistono anche forze fittizie.

Con riferimento alla Fig. 19.17, chiamiamo r_0 la distanza del baricentro della Luna dal baricentro della Terra, e M, m le masse della Terra e della Luna. Inoltre chiamiamo r la distanza di un generico oggetto di massa m_0 dal centro della Luna — questo oggetto potrebbe essere per esempio una porzione di acqua nel mare.

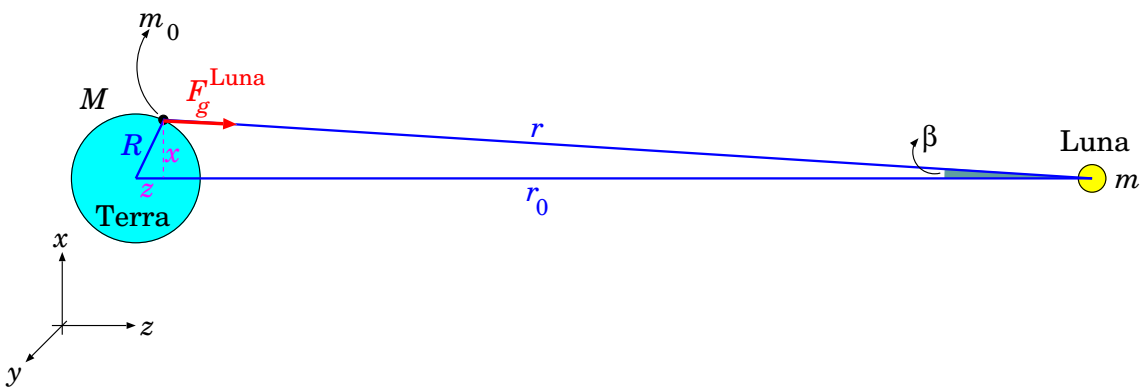


Figura 19.17: *Parametri nel calcolo delle maree.*

Adottiamo un SR $(O; x, y, z)$ con centro nel centro della Terra e asse z orientato verso il centro della Luna. Il baricentro della Luna si trova in $(0, 0, r_0)$.

Poniamo m_0 nella posizione $(x, 0, z)$ — abbiamo posto $y = 0$, ma questo non è un problema, poiché il problema è simmetrico per rotazione intorno all'asse Terra–Luna. Calcoliamo le forze agenti su m_0. Abbiamo l'attrazione gravitazionale terrestre, il cui modulo è:

$$F_g^{\text{Terra}} = \frac{GMm_0}{x^2 + y^2 + z^2} \tag{19.58}$$

Poi abbiamo la gravità della Luna, che in modulo vale:

$$F_g^{\text{Luna}} = \frac{Gmm_0}{r^2} \tag{19.59}$$

Scrivendola per componenti:

$$F_{g,z}^{\text{Luna}} = F_g^{\text{Luna}} \cos\beta \quad ; \quad F_{g,x}^{\text{Luna}} = -F_g^{\text{Luna}} \sin\beta$$

Ora, l'angolo β, formato fra le congiungenti Luna–Terra e Luna–m_0, è molto piccolo. Sicuramente $\tan\beta \leq \frac{R}{r_0}$; per il problema in esame, $R = 6370$ km e $r_0 = 384\,000$ km, quindi $\tan\beta \leq 0.0166$ rad $= 0.95°$. Possiamo quindi approssimare

$$\cos\beta \simeq 1 \quad ; \quad \sin\beta \simeq \tan\beta \simeq \beta \simeq \frac{x}{r_0}$$

Inoltre [6]:

$$r \simeq r_0 - z$$

[6] $r_0 = z + r\cos\beta$, con $\cos\beta \simeq 1$

Quindi

$$
\begin{aligned}
F_g^{\text{Luna}} &= \frac{Gmm_0}{(r_0-z)^2} = \frac{Gmm_0}{r_0^2\left(1-\dfrac{z}{r_0}\right)^2} \\
&\simeq \frac{Gmm_0}{r_0^2}\left(1+2\frac{z}{r_0}\right)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
F_{g,z}^{\text{Luna}} &\simeq F_g^{\text{Luna}} \\
&\simeq \frac{Gmm_0}{r_0^2}\left(1+2\frac{z}{r_0}\right) \\
F_{g,x}^{\text{Luna}} &\simeq -F_g^{\text{Luna}}\,\frac{x}{r_0} \\
&\simeq -\frac{Gmm_0}{r_0^2}\left(1+2\frac{z}{r_0}\right)\frac{x}{r_0} \\
&\simeq -\frac{Gmm_0}{r_0^2}\,\frac{x}{r_0}
\end{aligned}
\tag{19.60}
$$

(nell'ultimo passaggio abbiamo trascurato il termine $\propto \dfrac{z}{r_0}\dfrac{x}{r_0} \leq \left(\dfrac{R}{r_0}\right)^2$)

Infine, esiste anche la forza fittizia, dovuta all'accelerazione che tutta la Terra subisce a causa della Luna. Tale accelerazione è diretta verso $+\hat{\boldsymbol{z}}$ e vale:

$$
a_z^{(SR)} = \frac{Gm}{r_0^2}
$$

quindi la forza fittizia è [7]:

$$
F_z^{\text{fitt}} = -m_0\, a_z^{(SR)} = -\frac{Gmm_0}{r_0^2} \tag{19.61}
$$

[7] L'asse z è stato scelto come *istantaneamente* orientato verso la Luna, ma il suo orientamento è fisso nello spazio — non segue il moto orbitale della Luna. Abbiamo fatto questa scelta perché ci interessano qui solo gli effetti gravitazionali della Luna, e questi dipendono solo dalla sua distanza istantanea dalla Terra, non suo moto. Per questa ragione, nel calcolo della forza fittizia non compaiono tutti i termini rotatori.

La forza di marea è l'effetto combinato di $\vec{\boldsymbol{F}}_g^{\text{Luna}}$ e $\vec{\boldsymbol{F}}^{\text{fitt}}$. Lungo x c'è solo $\vec{\boldsymbol{F}}_g^{\text{Luna}}$:

$$F_x^{\text{marea}} = F_{g,x}^{\text{Luna}} = -\frac{Gmm_0}{r_0^3}\,x$$

mentre lungo z

$$\begin{aligned} F_z^{\text{marea}} &= F_{g,z}^{\text{Luna}} + F_z^{\text{fitt}} \\ &\simeq \frac{Gmm_0}{r_0^2}\left(1+2\frac{z}{r_0}\right) - \frac{Gmm_0}{r_0^2} = 2\,\frac{Gmm_0}{r_0^3}\,z \end{aligned}$$

Possiamo ora estendere anche alla componente y, che sarà analoga alla componente x:

$$\begin{aligned} F_x^{\text{marea}} &= -\frac{Gmm_0}{r_0^3}\,x \\ F_y^{\text{marea}} &= -\frac{Gmm_0}{r_0^3}\,y \\ F_z^{\text{marea}} &= 2\,\frac{Gmm_0}{r_0^3}\,z \end{aligned} \tag{19.62}$$

La forza di marea produce uno schiacciamento nel piano (x, y) e un allungamento nella direzione z.

L'effetto è inversamente proporzionale al *cubo* della distanza dalla Luna, e direttamente proporzionale alla distanza dal centro della Terra. Se siamo sulla faccia della Terra che "guarda verso la Luna", $z > 0$ e $F_z^{\text{marea}} > 0$, ovvero l'acqua appare attratta dalla Luna. Se invece siamo sulla faccia opposta, $z < 0$ e $F_z^{\text{marea}} < 0$, ovvero l'acqua appare respinta dalla Luna. In realtà, la Luna attrae sempre, e la forza fittizia "respinge" sempre, però nel primo caso prevale l'attrazione lunare, mentre nel secondo prevale la "repulsione" della forza fittizia. In entrambi i casi, l'acqua sale.

Si tratta comunque di valori molto piccoli. Nel sistema Terra–Luna, $m = 7.3 \cdot 10^{22}$ kg, e assumendo $|z| = R$ troviamo $|F_z^{\text{marea}}| = 2\frac{Gm}{r_0^3}R \simeq 1.1 \cdot 10^{-6}$ m/s^2. Le accelerazioni di marea sono 7 ordini di grandezza più piccole di $g = 9.806$ m/s^2: non producono effetti osservabili sui singoli oggetti.

Tuttavia, l'effetto complessivo produce cambiamenti nel livello del mare.

Esempio: livello delle maree in un pianeta-oceano

Immaginiamo un pianeta interamente sommerso da un oceano. Di quanto sale l'acqua?

La superficie dell'acqua si dispone in modo da essere equipotenziale, ma qui l'energia potenziale deve descrivere sia la gravità del pianeta che la forza di marea. L'energia potenziale della gravità del pianeta è

$$\mathcal{U}_g^{\text{pianeta}} = -\frac{GMm_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

La forza di marea può essere facilmente descritta da un'energia potenziale

$$\mathcal{U}^{\text{marea}} = \frac{Gmm_0}{2r_0^3}\left(x^2+y^2-2z^2\right)$$

(è facile verificare che $\vec{\boldsymbol{F}}^{\text{marea}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\mathcal{U}^{\text{marea}}$*). Quindi possiamo definire un potenziale efficace*

$$\Phi = \frac{\mathcal{U}_g^{\text{pianeta}} + \mathcal{U}^{\text{marea}}}{m_0} = G\left[\frac{m}{2r_0^3}\left(x^2+y^2-2z^2\right) - \frac{M}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]$$

Chiamiamo h l'altezza dell'acqua rispetto al raggio R del pianeta:

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = R+h$$

Consideriamo alcuni punti particolari:

- *lungo l'asse pianeta–luna:*

$$h = h_2 \quad ; \quad x = y = 0 \quad ; \quad z = \pm(R+h_2)$$

- *sul piano trasverso all'asse pianeta–luna:*

$$h = h_1 \quad ; \quad z = 0 \quad ; \quad x^2+y^2 = (R+h_1)^2$$

La condizione equipotenziale diventa quindi:

$$\frac{m}{2r_0^3}(R+h_1)^2 - \frac{M}{R+h_1} = -\frac{m}{r_0^3}(R+h_2)^2 - \frac{M}{R+h_2}$$

Conviene definire $\xi_{1,2} = \dfrac{h_{1,2}}{R}$*, cosicché*

$$\frac{mR^2}{2r_0^3}(1+\xi_1)^2 - \frac{M}{R(1+\xi_1)} = -\frac{mR^2}{r_0^3}(1+\xi_2)^2 - \frac{M}{R(1+\xi_2)}$$

Normalmente $|\xi_{1,2}| \ll 1$*, cosicchè possiamo fare la solita approssimazione* $(1+\xi)^\alpha \simeq 1+\alpha\xi$*:*

$$\frac{mR^2}{2r_0^3}(1+2\xi_1) - \frac{M}{R}(1-\xi_1) = -\frac{mR^2}{r_0^3}(1+2\xi_2) - \frac{M}{R}(1-\xi_2)$$

$$\frac{mR^3}{2Mr_0^3}(1+2\xi_1) + \xi_1 = -\frac{mR^3}{Mr_0^3}(1+2\xi_2) + \xi_2$$

Poi introduciamo $K = \dfrac{mR^3}{Mr_0^3}$. *Poiché* $m < M$ *e* $R \ll r_0$, K *è un parametro molto piccolo! L'equazione diventa:*

$$\frac{K}{2} + (K+1)\xi_1 \quad = \quad -K + (1-2K)\xi_2$$

Assumendo $K \ll 1$ *otteniamo quindi:*

$$\xi_2 - \xi_1 \quad = \quad \frac{3}{2}K$$

Il dislivello fra alta marea e bassa marea diventa quindi:

$$\begin{aligned} \Delta h \;=\; h_2 - h_1 \;&=\; (\xi_2 - \xi_1)R \;=\; \frac{3}{2}KR \\ &=\; \frac{3}{2}\frac{mR^4}{Mr_0^3} \end{aligned}$$

Esempio: con i parametri del sistema Terra-Luna

Inseriamo i dati del problema: distanza Terra-Luna $r_0 = 384\,000$ km*; raggio della Terra* $R = 6370$ km*; massa della Terra* $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg*; massa della Luna* $m = 7.3 \cdot 10^{22}$ kg*. Si ottiene* $K = 5.55 \cdot 10^{-8}$ *(molto piccolo, come avevamo supposto! dunque l'approssimazione* $K \ll 1$ *è legittima) e* $\Delta h = 0.53$ m.

Anche il Sole esercita maree sulla Terra. Possiamo calcolarle, ponendo $r_0 = 150 \cdot 10^6$ km *(distanza Terra-Sole) e* $m = 2 \cdot 10^{30}$ kg *(massa del Sole). Si ottiene* $K = 2.55 \cdot 10^{-8}$ *e* $\Delta h = 0.24$ m. *Nonostante la massa del Sole sia enormemente più grande di quella della Luna, l'effetto è abbattuto dalla distanza, anch'essa molto più grande, e dalla dipendenza* $\dfrac{1}{r_0^3}$. *L'effetto mareale massimo si ottiene quando Sole e Luna sono allineati, oppure opposti rispetto alla Terra. L'effetto complessivo è la somma dei due:* $\Delta h \simeq 0.8$ m.

Ci si può sorprendere dei valori trovati così piccoli: in effetti è noto che in certi luoghi della Terra le maree possono raggiungere anche la decina di metri! Va però ricordato che il nostro calcolo tratta il mare come se ricoprisse interamente la Terra. Quello che succede in realtà è che il moto della massa d'acqua è influenzato dalle caratteristiche morfologiche dei fondali e della costa, che fanno sì da modificare il moto dell'onda di marea che sopraggiunge, talvolta comportandosi da barriere e quindi provocandone l'innalzamento.

Effetti mareali fra pianeta e satelliti

Le maree — a dispetto del nome — non sono un fenomeno che interessa soltanto i mari. In effetti, da quanto detto finora, dovrebbe essere chiaro che la gravità che un oggetto esercita su un altro tende a "stirarlo" nella direzione congiungente i due oggetti. Anche questi si chiamano "effetti di marea". Siccome gli oggetti celesti

(pianeti, satelliti) sono in rotazione, l'effetto è che l'asse lungo cui si esercita la marea cambia in continuazione rispetto all'oggetto che la subisce, e quindi anche le deformazioni indotte cambiano. Questo provoca movimenti nella struttura dell'oggetto celeste, che dissipano energia per attrito, e tendono a rallentare la rotazione dell'oggetto.

Un esempio di questo fenomeno ci è ben noto: la Luna volge sempre la stessa faccia verso la Terra. Cioè il suo periodo di rotazione propria e quello di rivoluzione intorno alla Terra coincidono. Questa non è un'assurda coincidenza. È dovuta al fatto che le forze di marea che la Terra esercita sulla Luna hanno rallentato la rotazione di quest'ultima, fino a "bloccarla" nella sua posizione attuale. Qui per "bloccare" non intendiamo che la rotazione sia arrestata, ma che sia sincrona con la rivoluzione. Anche la Luna rallenta la rotazione della Terra, ma l'effetto è più piccolo, e quindi la Terra gira ancora su sé stessa.

Anche i satelliti di Marte, Phobos e Deimos, sono "bloccati dalle maree" [8]*, e volgono sempre la stessa faccia verso il pianeta.*

Un altro esempio, ancora più eclatante, è dato da Plutone e Caronte. Plutone, nonostante sia un pianeta nano, ha diversi satelliti, di cui uno di massa confrontabile a quella del pianeta stesso. In effetti il sistema Plutone-Caronte potrebbe essere quasi considerato un pianeta doppio. Ebbene, le forze mareali fra i due corpi hanno rallentato le rotazioni di entrambi, fino a "bloccarli": ora Plutone e Caronte si rivolgono sempre la stessa faccia mentre ruotano intorno al loro comune baricentro.

Aumento della distanza Terra-Luna

L'effetto mareale della Luna sulla Terra è causa dell'allontanamento dei due oggetti. Vediamo perché. L'energia meccanica E del sistema tende a diminuire, a causa degli attriti prodotti dalle deformazioni indotte nella Terra dalla marea lunare: quindi $dE < 0$. Nello stesso tempo, il momento angolare totale L del sistema si conserva: quindi ad un rallentamento della rotazione terrestre deve corrispondere un aumento del momento angolare dell'orbita lunare.

Chiamiamo M, m le masse di Terra e Luna, r la loro distanza, v la velocità orbitale della Luna, I, ω rispettivamente il momento di inerzia e la velocità angolare della Terra. L'energia meccanica e il momento angolare del sistema sono:

$$\begin{aligned} E &= \frac{I\omega^2}{2} + \frac{m}{2}v^2 - \frac{GMm}{r} \\ L &= I\omega + mvr \end{aligned}$$

Inoltre ricordiamo che per orbite circolari (come è quella della Luna) vale:

$$v^2 = \frac{GM}{r} \qquad (*)$$

[8] In inglese si dice "tidally locked", essendo "tide" la marea. Non saprei come rendere esattamente in italiano... a volte si trova scritto "bloccati marealmente".

cosicché l'energia meccanica si può riscrivere:

$$E = \frac{I\omega^2}{2} - \frac{GMm}{2r}$$

e la sua variazione diventa:

$$dE = I\omega\, d\omega + \frac{GMm}{2r^2}\, dr$$

Analogamente, procediamo per il momento angolare: da $(*)$ *si ricava che* $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ *e* $vr = \sqrt{GMr}$*, quindi*

$$L = I\omega + m\sqrt{GMr}$$

e dalla sua conservazione:

$$\begin{aligned} 0 = dL &= I\, d\omega + \frac{m}{2}\sqrt{\frac{GM}{r}}\, dr \\ &= I\, d\omega + \frac{mv}{2}\, dr \end{aligned}$$

Inserendo questo risultato nella variazione dell'energia — e usando ancora $(*)$*:*

$$\begin{aligned} dE &= -\omega\, \frac{mv}{2}\, dr + \frac{GMm}{2r^2}\, dr \\ &= \frac{m}{2}\left(-\omega v + \frac{GM}{r^2}\right) dr \\ &= \frac{m}{2}\left(-\omega v + \frac{v^2}{r}\right) dr \\ &= -\frac{mv}{2}\left(\omega - \frac{v}{r}\right) dr \end{aligned}$$

Ora, osserviamo che $\frac{v}{r} \equiv \omega_{orb}$ *è la velocità angolare orbitale della Luna, pertanto possiamo riscrivere:*

$$dE = -\frac{mv}{2}\left(\omega - \omega_{orb}\right) dr$$

La condizione $dE < 0$ *si traduce in una condizione su* dr *a seconda del segno di* $(\omega - \omega_{orb})$*:*

$$\begin{aligned} \omega > \omega_{orb} &\implies dr > 0 \\ \omega < \omega_{orb} &\implies dr < 0 \end{aligned}$$

Il sistema Terra-Luna rientra nel primo caso: il periodo di rotazione della Terra è $23^h 56^{min}$ *mentre il periodo orbitale della Luna è* 27.3 *giorni. Quindi, effettivamente,* $dr > 0$*, ovvero la Luna si sta allontanando dalla Terra.*

Esistono altri sistemi in cui si verifica la situazione opposta. Per esempio, Phobos orbita intorno a Marte più rapidamente di quanto il pianeta ruoti su sé stesso, quindi $\omega_{orb} > \omega$: in effetti Phobos si avvicina lentamente a Marte. L'avvicinamento può avvenire anche se il satellite ha un'orbita "retrograda" rispetto alla rotazione del pianeta, cioè $\omega_{orb} < 0 < \omega$, e nello stesso tempo $v = \omega_{orb} r < 0$.

Effetti mareali in stelle binarie: supernovae I-a

Le forze di marea si manifestano anche nei sistemi di stelle binarie. Se una delle due stelle è molto massiva e compatta (per esempio una nana bianca) e l'altra è estesa (per esempio una gigante) e le orbita sufficientemente vicina, la stella compatta "allunga" la stella estesa per effetto di marea, e può arrivare a "succhiare" materia da essa: si crea un flusso di materia dalla stella estesa a quella compatta, con quest'ultima che si accresce via via. In alcuni casi, la stella compatta acquisisce massa sufficiente da superare il "limite di Chandrasekhar", cioè il limite dopo il quale la forza di gravità fa collassare la nana bianca. Il fenomeno produce una supernova. È un caso astrofisico molto interessante, in quanto si può sapere con precisione la massa della stella — il limite è di circa $1.4\ M_\odot$ *(1.4 masse solari) — e quindi si sa calcolare la luminosità assoluta della supernova. Osservando la luminosità apparente si può risalire alla distanza. Questo tipo di supernovae (tipo I-a) costituiscono quindi delle "candele" di riferimento per misurare distanze astronomiche, allo stesso modo delle stelle Cefeidi, ma ovviamente molto più potenti, e quindi molto più adatte a misurare distanze molto più grandi (fino a miliardi di anni-luce).*

19.17 Punti Lagrangiani

Abbiamo visto come risolvere il moto di due corpi che interagiscono gravitazionalmente. Quando i corpi diventano 3, in generale il problema non ha soluzioni analitiche.

Esiste però una situazione — anche interessante nell'ambito astrofisico e astronautico — in cui si può analizzare il moto di un oggetto leggero, in presenza di altri due oggetti molto più pesanti: per esempio, un sistema Sole-Giove-asteroide, oppure Terra-Luna-satellite (artificiale), o anche Sole-pianeta-satellite. In generale, abbiamo 3 corpi, di masse m_0, m, M tali che $M \gg m \gg m_0$. In questi casi, ovviamente, la presenza di m_0 non influisce per niente sul moto di m e M, e quest'ultimo può essere considerato in quiete.

Si può mostrare che esistono nello spazio delle posizioni in cui m_0 rimane "fermo" rispetto al sistema M-m — nel senso che il sistema M-m-m_0 ruota come se fosse rigido. Queste posizioni sono note come "punti Lagrangiani".

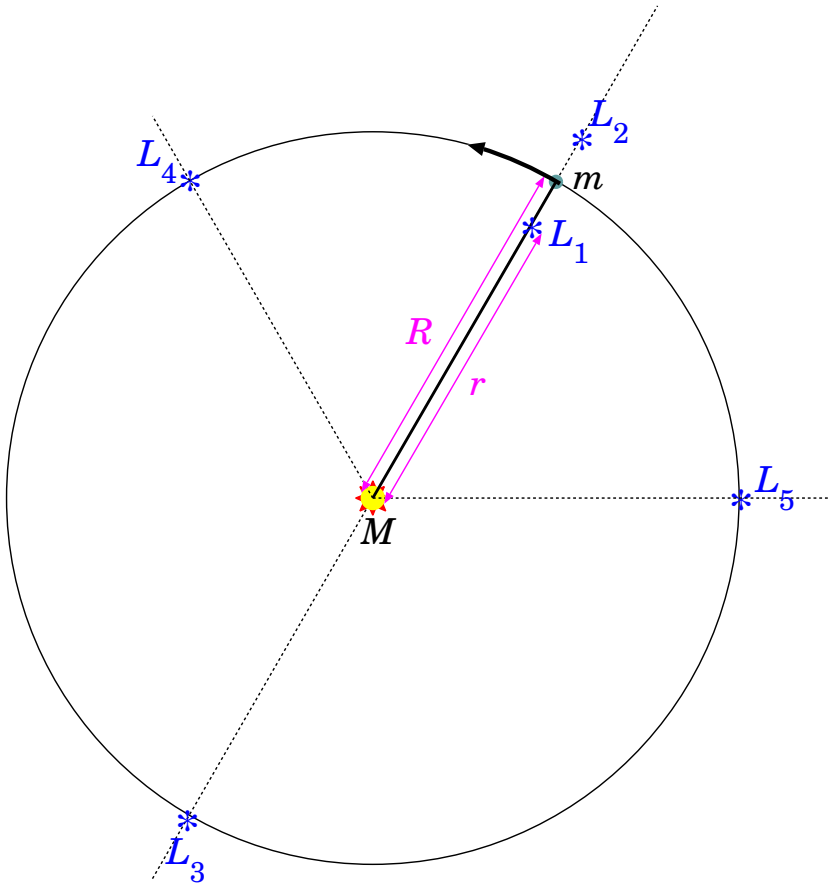


Figura 19.18: *I 5 punti lagrangiani.*

Essi sono 5: 3 sono allineati sull'asse M-m, gli altri 2 si trovano sull'orbita di m ma rispettivamente 60° davanti o dietro, come illustrato in Fig. 19.18.

I punti L_1, L_2 sono di particolare interesse: un osservatorio nello spazio in L_1 è ideale per osservare il Sole: resta "vicino" alla Terra e mai eclissato da essa. Invece un osservatorio in L_2 è ideale per l'osservazione dello spazio profondo, trovandosi sempre in eclisse, e quindi protetto dalla radiazione solare. Detta R la distanza di m da M, la distanza r dei punti L_1, L_2 da M è pari a

$$r = R\left(1 \pm \sqrt[3]{\frac{m}{3M}}\right)$$

I punti L_4, L_5 sono spesso visibili nel Sistema Solare: per esempio, Giove è "accompagnato" lungo la sua orbita da due gruppetti di asteroidi: i "Greci" in L_4 e i "Troiani" in L_5.

19.17.1 Calcolo dei punti L_1 e L_2

Analizziamo il caso in cui m compie un'orbita circolare di raggio R intorno a M. Sappiamo che la velocità angolare è tale che

$$\omega^2 = \frac{GM}{R^3}$$

Vogliamo trovare i punti Lagrangiani L_1, L_2 sull'asse M-m. Chiamiamo r genericamente la distanza di uno di questi punti da M. Se vi poniamo una massa m_0, essa è soggetta alle forze gravitazionali di M e m, pertanto ha un'energia potenziale

$$\mathcal{U}_g = -\frac{GMm_0}{r} - \frac{Gmm_0}{|r-R|}$$

D'altra parte, il sistema di riferimento in cui l'asse M-m è fermo, è un sistema in rotazione con velocità angolare ω, pertanto bisogna anche considerare una forza centrifuga (fittizia)

$$F_c = m_0\,\omega^2 r$$

che può essere descritta attraverso un'energia potenziale

$$\mathcal{U}_c = -\frac{m_0\omega^2 r^2}{2}$$

(provare per credere: $F_c = -\dfrac{\partial \mathcal{U}_c}{\partial r}$). Quindi otteniamo un'energia potenziale *efficace*

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{eff} &= \mathcal{U}_g + \mathcal{U}_c \\
&= -m_0\left[\frac{GM}{r} + \frac{Gm}{|r-R|} + \frac{\omega^2 r^2}{2}\right] \qquad \text{(inserendo il valore di } \omega^2\text{)} \\
&= -G\,m_0\left[\frac{M}{r} + \frac{m}{|r-R|} + \frac{M\,r^2}{R^3}\right]
\end{aligned}$$

Trovare i punti di equilibrio significa risolvere $\dfrac{\partial \mathcal{U}_{eff}}{\partial r} = 0$ — si tratta di un'equazione algebrica di 5° grado, e può essere risolta solo per via numerica. Pertanto procediamo con delle approssimazioni basate sul buonsenso... Essendo $M \gg m$, ci aspettiamo che i punti Lagrangiani siano molto più vicini a m, in modo che il suo effetto gravitazionale possa essere simile a quello di M. Pertanto parametrizziamo

$$r = R\,(1+\epsilon)$$

e assumiamo che ϵ sia "piccolo". L'energia potenziale efficace diventa quindi:

$$\mathcal{U}_{eff} = -\frac{G\,m_0}{R}\left[\frac{M}{1+\epsilon}+\frac{m}{|\epsilon|}+\frac{M}{2}(1+\epsilon)^2\right]$$

e il punto di equilibrio si trova imponendo $\dfrac{\partial \mathcal{U}_{eff}}{\partial \epsilon}=0$ [9]:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial \mathcal{U}_{eff}}{\partial \epsilon} &= -\frac{G\,m_0}{R}\left[-\frac{M}{(1+\epsilon)^2}-\mathrm{sgn}(\epsilon)\frac{m}{\epsilon^2}+M(1+\epsilon)\right] \\ &\simeq \frac{G\,m_0}{R}\left[M(1-2\epsilon)+\mathrm{sgn}(\epsilon)\frac{m}{\epsilon^2}-M(1+\epsilon)\right] + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \\ &\simeq \frac{G\,m_0}{R}\left[-3M\epsilon+\mathrm{sgn}(\epsilon)\frac{m}{\epsilon^2}\right] \end{aligned}$$

L'approssimazione ($\simeq$) consiste nello scrivere $(1+\epsilon)^\alpha \simeq 1+\alpha\epsilon$ [10], in questo caso con l'esponente $\alpha=-2$.

A questo punto è evidente che la soluzione è:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \pm\sqrt[3]{\frac{m}{3M}} \\ r &= R\left(1\pm\sqrt[3]{\frac{m}{3M}}\right) \end{aligned}$$

Quindi abbiamo 2 punti Lagrangiani: uno posto fra m e M ($\epsilon<0$) e uno posto oltre m ($\epsilon>0$).

Esempio: punti Lagrangiani fra Terra e Sole

La massa del Sole è $M\simeq 2\cdot 10^{30}$ kg e la massa della Terra $m\simeq 6\cdot 10^{24}$ kg. La distanza Terra-Sole è $R\simeq 150\cdot 10^6$ km.

Con le formule trovate, abbiamo $\epsilon\simeq 0.01$, ovvero i punti Lagrangiani si trovano a circa $1.5\cdot 10^6$ km dalla Terra.

Da notare che, a posteriori, il risultato $\epsilon\simeq 0.01$ consente l'approssimazione fatta: la parte trascurata è infatti $\mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)\approx 10^{-4}$.

[9] È utile ricordare che $|\epsilon|=\mathrm{sgn}(\epsilon)\cdot\epsilon$, essendo $\mathrm{sgn}(\epsilon)$ il segno di ϵ, che vale ± 1 a seconda che ϵ sia positivo o negativo. La funzione $\epsilon\to|\epsilon|$ è derivabile ovunque, tranne per $\epsilon=0$, e $\dfrac{d|\epsilon|}{d\epsilon}=\mathrm{sgn}(\epsilon)$.

[10] In generale, $f(1+\epsilon)\simeq f(1)+f'(1)\epsilon$; per $f(1+\epsilon)\equiv(1+\epsilon)^\alpha$ ovviamente $f(1)=1$ e $f'(1)=\alpha$.

Parte II

Elementi di Termodinamica, Elettromagnetismo, Ottica

Capitolo 20

Nozioni di termodinamica

20.1 Temperatura

La temperatura è una proprietà empirica degli oggetti, che associamo alle sensazioni di "caldo" e "freddo". Come per ogni altra grandezza fisica, occorre darne una definizione quantitativa, in modo da renderla una quantità misurabile.

20.1.1 Temperatura empirica

Ciò che si osserva, sperimentalmente, è che un oggetto (solido o liquido), quando si scalda tende a dilatarsi, mentre quando si raffredda tende a contrarsi. La colonnina di mercurio di un termometro è un noto esempio. Possiamo usare questa proprietà di dilatazione per *definire* la temperatura.

Prima di tutto occorrono dei punti di riferimento. Per esempio definiamo che:

- la condizione in cui acqua e ghiaccio coesistono alla pressione atmosferica (punto crioscopico) corrisponde a 0°C (0 gradi Celsius);
- la condizione in cui l'acqua bolle alla pressione atmosferica (punto ebullioscopico) corrisponde a 100°C (100 gradi Celsius).

Supponiamo che la colonnina del mercurio di un termometro, posta a contatto con ghiaccio fondente, abbia lunghezza ℓ_0, e posta a contatto con acqua bollente si allunghi fino a ℓ_{100} — vedi Fig. 20.1. Se, messa a contatto con un oggetto, raggiunge lunghezza ℓ, allora *definiamo la temperatura* t [1]

[1] Qui usiamo la variabile t per indicare la "temperatura empirica": quando definiremo la *temperatura assoluta* in scala Kelvin faremo uso della variabile T. In questa sezione

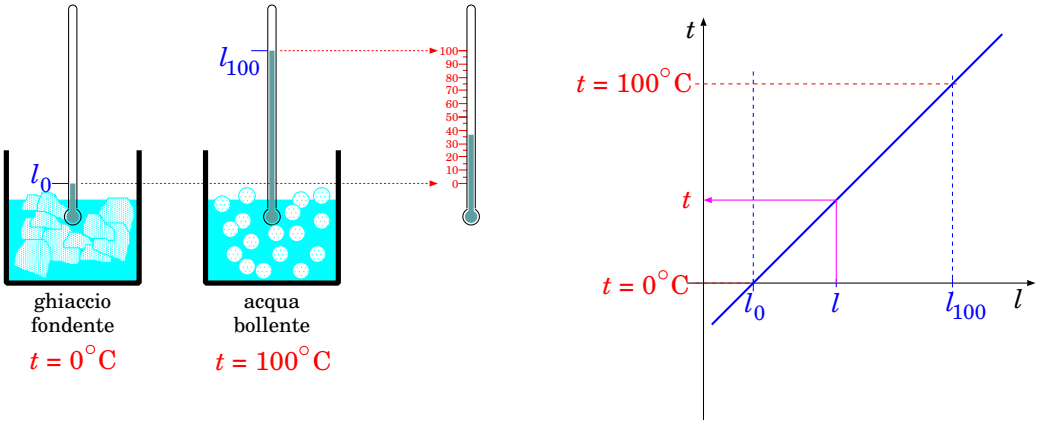


Figura 20.1: *Definizione della scala Celsius con un termometro a mercurio.*

dell'oggetto come:

$$t = 100 \frac{\ell - \ell_0}{\ell_{100} - \ell_0} \ ^\circ\text{C} \qquad \text{(temperatura empirica in scala Celsius)} \tag{20.1}$$

Questa è la definizione della temperatura empirica in scala Celsius. È una definizione corretta, perché si mostra essere ripetibile.

È poi possibile verificare che anche altri materiali (diversi dal mercurio) hanno leggi di dilatazione ben precise. Per esempio, una sbarra rigida, che abbia lunghezza ℓ_1 a temperatura t_1, passando alla temperatura t_2 cambia la sua lunghezza arrivando al ℓ_2: si verifica per sperimentazione che

$$\Delta\ell = \alpha_\ell \ell_1 \Delta t \qquad \left(\begin{array}{rcl} \Delta\ell & \equiv & \ell_2 - \ell_1 \\ \Delta t & \equiv & t_2 - t_1 \end{array} \right) \tag{20.2}$$

Il coefficiente α_ℓ si chiama *coefficiente di dilatazione termica lineare*, ed è caratteristico del materiale, ma indipendente dalla lunghezza iniziale ℓ_1 e dalle temperature t_1, t_2 — almeno per variazioni Δt non troppo estese.

Analogamente, un solido o un liquido che passa dalla temperatura t_1 alla temperatura t_2 subisce una variazione di volume da V_1 a V_2, secondo la legge empirica

$$\Delta V = \alpha_V V_1 \Delta t \qquad \left(\begin{array}{rcl} \Delta V & \equiv & V_2 - V_1 \\ \Delta t & \equiv & t_2 - t_1 \end{array} \right) \tag{20.3}$$

non trattiamo il tempo, quindi l'uso di t per la temperatura empirica non dovrebbe creare confusione.

Il coefficiente α_V si chiama *coefficiente di dilatazione termica volumetrica*. Anch'esso è caratteristico del materiale, ma indipendente dal volume iniziale e dalle temperature t_1, t_2 — almeno per variazioni Δt non troppo estese.

Sfruttando la dilatazione termica di diversi materiali si possono costruire termometri di varie nature. Tutti possono essere tarati ai punti crioscopico ed ebullioscopico. Tuttavia, per escursioni termiche elevate, diversi materiali non riproducono necessariamente le stesse misure di temperatura.

20.1.2 Legge-zero della termodinamica

Abbiamo definito la temperatura di un oggetto come una quantità che si misura ponendolo in contatto con un altro oggetto (il termometro) ed osservando i cambiamenti di quest'ultimo.

In effetti, quando il termometro viene posto a contatto con l'oggetto, si osserva che la colonnina di mercurio si modifica, poi dopo un po' di tempo si stabilizza. Ciò che assumiamo tacitamente, è che dopo una fase transitoria, le temperature del termometro e dell'oggetto da misurare si uniformino. In questo modo, i cambiamenti osservati nel termometro forniscono una misura non solo della temperatura del termometro stesso, ma anche di quella dell'oggetto.

Questa assunzione viene spesso enunciata come la *legge-zero della termodinamica*:

"Se due oggetti, uno più caldo ed l'altro più freddo, vengono posti in contatto termico, dopo una fase transitoria essi si stabilizzeranno avendo la stessa temperatura"

20.1.3 Temperatura assoluta

Un caso particolare è costituito dai gas. Essi, se tenuti a pressione costante, per variazioni di temperatura Δt subiscono variazioni di volume ΔV tali che

$$\left[\frac{\Delta V}{V}\right]_P = \frac{\Delta t}{t + t_0} \tag{20.4}$$

Viceversa, se contenuti in un recipiente a volume costante, per variazioni di temperatura Δt subiscono variazioni di pressione ΔP tali che

$$\left[\frac{\Delta P}{P}\right]_V = \frac{\Delta t}{t + t_0} \tag{20.5}$$

Le notazioni della forma $[\cdots]_X$ sono introdotte per specificare che la variabile X è considerata costante.

Entrambe le leggi hanno una validità sperimentale su un intervallo di temperature piuttosto vasto, non dipendono dal gas utilizzato, e la "temperatura di riferimento" t_0 è comune alle due leggi e non dipende dalla composizione del gas. Facendo diverse misure di volume a pressione costante, o di pressione a volume costante, si può ricavare il valore di t_0: in scala Celsius si trova:

$$t_0 = 273.15\ ^\circ\mathrm{C} \tag{20.6}$$

Le Eq. (20.4) e Eq. (20.5) suggeriscono di ridefinire la temperatura, riassorbendo t_0: si ottiene così la *temperatura assoluta*, misurata in scala Kelvin:

$$T = t + t_0 \tag{20.7}$$

Ovviamente, $\Delta T = \Delta t$, cosicché le due leggi dei gas diventano semplicemente:

$$\left[\frac{\Delta V}{V}\right]_P = \frac{\Delta T}{T} \quad ; \quad \left[\frac{\Delta P}{P}\right]_V = \frac{\Delta T}{T} \tag{20.8}$$

Si può andare oltre, e *ridefinire* la temperatura mediante una delle Eq. (20.8).

Da queste due leggi empiriche si può già derivare una *equazione di stato* del gas. Immaginiamo di avere una condizione iniziale di un gas a temperatura T_0, pressione P_0, che occupa un volume V_0. Il gas subisce una trasformazione, e alla fine avrà temperatura T_f, pressione P_f, e volume V_f.

Possiamo considerare una successione di due trasformazioni — vedi Fig. 20.2.

- La prima è una *trasformazione isobara*, cioè a pressione costante. La variazione di volume $\Delta V = V_f - V_0$ è legata ad una variazione di temperatura $\Delta T = T' - T_0$ da $\dfrac{V_f - V_0}{V_0} = \dfrac{T' - T_0}{T_0}$, ovvero:
$$\frac{V_f}{V_0} = \frac{T'}{T_0}$$
- La seconda è una *trasformazione isocora*, cioè a volume costante. La variazione di pressione $\Delta P = P_f - P_0$ è legata ad una variazione di temperatura $\Delta T = T_f - T'$ da $\dfrac{P_f - P_0}{P_0} = \dfrac{T_f - T'}{T'}$, ovvero:
$$\frac{P_f}{P_0} = \frac{T_f}{T'}$$

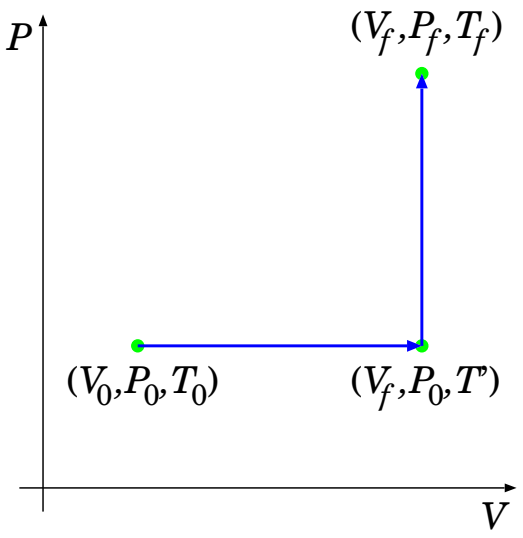


Figura 20.2: *Trasformazione isobara ($V_0 \to V_f$ a P costante) seguita da trasformazione isocora ($P_0 \to P_f$ a V costante).*

Combinando i due risultati si ottiene $\dfrac{PV}{P_0V_0} = \dfrac{T}{T_0}$, ovvero

$$\frac{P_fV_f}{T_f} = \frac{P_0V_0}{T_0}$$

Quindi, qualunque sia la trasformazione,

$$\frac{PV}{T} = \text{costante} \qquad \text{(gas rarefatti)}$$

20.2 Teoria cinetica dei gas rarefatti

In questo capitolo trattiamo sistemi fisici caratterizzati dai cosiddetti *gas perfetti*, o *gas ideali*. Essi sono costituiti da molecole sufficientemente rarefatte, tali che il loro moto, all'interno del volume a disposizione, si possa considerare sostanzialmente libero. Questa è ovviamente un'approssimazione: in effetti le molecole possono urtarsi fra loro scambiandosi energia e quantità di moto, ma l'idea è che ciò avvenga solo quando due molecole si avvicinano molto: prima e dopo l'urto possono essere considerate come particelle libere. Inoltre assumiamo che il volume occupato dalle molecole sia trascurabilmente piccolo rispetto al volume a disposizione del gas.

20.2.1 L'equazione di stato

Lo stato di un gas perfetto può essere descritto attraverso grandezze "collettive", o "macroscopiche": cioè che ne dànno le caratteristiche globali, senza entrare nel dettaglio dello stato cinematico delle singole molecole. Tali grandezze sono:

- il *volume* V occupato dal gas;
- la *pressione* P esercitata dal gas sulle pareti che lo contengono;
- *la temperatura* T del gas.

Esprimendo la temperatura in scala Kelvin, i gas perfetti sono tutti caratterizzati da una legge empirica, detta *equazione di stato*, che mette in relazione le tre quantità V, P, T:

$$PV = NkT \tag{20.9}$$

essendo N il numero di molecole che costituiscono il gas, e k la *costante di Boltzmann*, che si misura pari a

$$k = 1.3806488 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1} \tag{20.10}$$

Probabilmente avete già incontrato questa equazione nella forma:

$$PV = nRT \tag{20.11}$$

essendo n il numero di *moli* e R la *costante dei gas perfetti.* Poiché una mole è definita come un numero di Avogadro ($N_A = 6.02214129 \cdot 10^{23}$) di molecole, ovviamente $N = N_A \cdot n$, quindi la relazione fra R e k è:

$$R = k \cdot N_A = 8.314 \text{ JK}^{-1} \tag{20.12}$$

Mentre la forma Eq. (20.11) è usata in chimica, la forma Eq. (20.9) è quella più utile in fisica, poiché ci interessa comprendere il comportamento macroscopico in termini di moto molecolare.

Per dare un'idea delle grandezze in gioco, consideriamo un volume $V = 1$ m^3 di gas atmosferico, alla pressione $P = 1$ Atm $= 1.013 \cdot 10^5$ Pa ed alla temperatura assoluta $T = 300$ K (circa 27°C). L'equazione di stato, Eq. (20.9), ci permette di calcolare il numero di molecole: $N = \dfrac{PV}{kT} \simeq 2.5 \cdot 10^{25}$ — 25 milioni di miliardi di miliardi! Il gas atmosferico è costituito al 78% di azoto (N_2) e al 21% di ossigeno (O_2), entrambi in forma

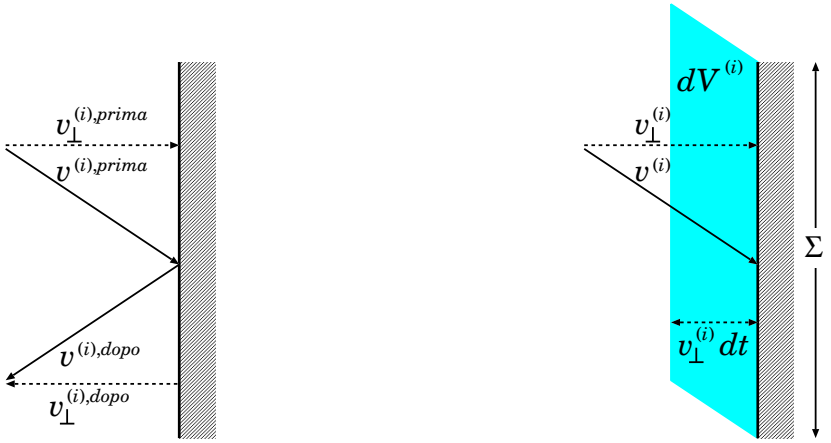


Figura 20.3: *A sinistra: urto elastico di una molecola di gas contro la parete: la componente $v_\perp^{(i)}$ della velocità perpendicolare alla parete viene riflessa, mentre quella parallela resta immutata. A destra: costruzione del volumetto $dV^{(i)}$, definito in modo che se la i-esima molecola vi si trova dentro, può urtare la parete nel tempo dt.*

di molecole biatomiche. La dimensione lineare di tali molecole è dell'ordine di ≈ 0.1 nm $= 10^{-10}$ m. La molecola è sostanzialmente unidimensionale, però può ruotare su sè stessa, quindi possiamo attribuire a ciascuna molecola un "volume efficace" $\approx (10^{-10}\ \mathrm{m})^3 \equiv 10^{-30}\ \mathrm{m}^3$. Dunque il volume totale efficace occupato da tutte le molecole è $V_{mol}^{eff} \approx 2.5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^3$ — 25 parti per milione del volume totale!

In questo senso il gas è "rarefatto".

20.2.2 Modello molecolare della pressione

La pressione P prodotta da un gas contro le pareti del recipiente che lo contiene è interpretabile come l'effetto netto di tantissimi urti che le singole molecole del gas producono contro le pareti. Ad ogni urto, la molecola rimbalza indietro, quindi subisce una variazione di quantità di moto $\Delta\vec{\boldsymbol{p}}$: per il principio di azione-reazione, anche la parete deve subire una variazione di quantità di moto opposta $-\Delta\vec{\boldsymbol{p}}$. L'effetto complessivo di tantissimi urti produce la pressione P che si osserva sulla parete.

Chiamiamo $\vec{\boldsymbol{p}}^{(i)}$ la quantità di moto della i-esima molecola prima dell'urto. Cominciamo con l'assumere — ragionevolmente — che l'urto contro la parete sia perfettamente elastico e che alteri solo la componente $\vec{\boldsymbol{p}}_\perp^{(i)}$ ortogonale alla

parete stessa, che cambia quindi di segno, come in Fig. 20.3 (sinistra):

$$\begin{aligned}\Delta\vec{\boldsymbol{p}}_{\parallel}^{(i)} &= 0\\ \Delta\vec{\boldsymbol{p}}_{\perp}^{(i)} &= -2\vec{\boldsymbol{p}}_{\perp}^{(i)} = -2m_i\vec{\boldsymbol{v}}_{\perp}^{(i)}\end{aligned}$$

Calcoliamo la probabilità $d\mathcal{P}^{(i)}$ che la i-esima molecola urti effettivamente la parete in un intervallino di tempo dt.

L'urto può avvenire solo se la molecola ha una componente della velocità $\vec{\boldsymbol{v}}^{(i)}$ diretta verso la parete, ed in più se è sufficientemente vicina ad essa da raggiungerla entro il tempo dt. Poiché nel tempo dt la molecola percorre, lungo la perpendicolare alla parete, una distanza

$$dh^{(i)} = dt\, v_{\perp}^{(i)}$$

l'urto avviene se la distanza dalla parete è $\leq dh^{(i)}$, ovvero se la molecola si trova in un volumetto

$$dV^{(i)} = dh^{(i)}\Sigma = dt\, v_{\perp}^{(i)}\Sigma$$

(una specie di strato sottile subito all'interno della superficie Σ del contenitore del gas) — vedi Fig. 20.3 (destra).

Nel suo moto, la molecola può trovarsi ovunque nel volume V che ha a disposizione, senza particolari luoghi preferenziali. Pertanto la probabilità che si trovi entro $dV^{(i)}$ è pari a $dV^{(i)}/V$. Anche la direzione del moto della molecola è casuale: può avvicinarsi o allontanarsi dalla parete. Quindi la probabilità che vada ad urtare è ulteriormente ridotta di un fattore 1/2. In totale:

$$d\mathcal{P}^{(i)} = \frac{1}{2}\frac{dV^{(i)}}{V} = dt\frac{v_{\perp}^{(i)}\Sigma}{2V} \tag{20.13}$$

Ogni urto produce sulla parete una variazione di quantità di moto $2p_{\perp}^{(i)} = 2m_i v_{\perp}^{(i)}$. L'effetto totale si ottiene sommando su tutte le molecole, pesando ogni contributo della somma con la probabilità che l'urto avvenga nel tempo dt:

$$\begin{aligned}dp^{tot} &= \sum_i d\mathcal{P}^{(i)}\, 2m_i v_{\perp}^{(i)} = dt\sum_i \frac{m_i\left[v_{\perp}^{(i)}\right]^2\Sigma}{V}\\ &= dt\,\frac{\Sigma}{V}\sum_i m_i\left[v_{\perp}^{(i)}\right]^2\end{aligned}$$

La velocità $\vec{\boldsymbol{v}}^{(i)}$ della i-esima molecola è del tutto causale: la direzione ortogonale alla parete ($\perp$) e le due direzioni parallele ($\|1$ e $\|2$) sono

equiprobabili. Poiché

$$\left[v^{(i)}\right]^2 = \left[v_\perp^{(i)}\right]^2 + \left[v_{\parallel 1}^{(i)}\right]^2 + \left[v_{\parallel 2}^{(i)}\right]^2$$

e visto che sommiamo su tantissime molecole, è ragionevole assumere che $\left[v_\perp^{(i)}\right]^2$ contribuisca con 1/3 di $\left[v^{(i)}\right]^2$, quindi possiamo scrivere

$$dp^{tot} = dt\,\frac{1}{3}\frac{\Sigma}{V}\sum_i m_i\left[v^{(i)}\right]^2$$

Una quantità di moto totale dp^{tot} ceduta nel tempo dt alla superficie Σ significa una forza $F^{tot} = \dfrac{dp^{tot}}{dt}$ su Σ, ovvero una pressione

$$P = \frac{F^{tot}}{\Sigma} = \frac{dp^{tot}}{\Sigma\,dt} = \frac{1}{3V}\sum_i m_i\left[v^{(i)}\right]^2$$

In conclusione, abbiamo trovato un'*equazione di stato*:

$$PV = \frac{1}{3}\sum_i m_i\left[v^{(i)}\right]^2 = \frac{1}{3}N\left\langle mv^2\right\rangle \tag{20.14}$$

Il prodotto pressione per volume di un gas ideale è pari a 1/3 *del numero di molecole* N*, per il valore medio della massa per la velocità al quadrato* $\langle mv^2\rangle$

Il risultato è notevole: mediante una trattazione "microscopica" della dinamica delle molecole del gas, abbiamo trovato una relazione fra grandezze macroscopiche: la pressione, il volume, e la velocità quadratica media delle molecole.

L'Eq. (20.14) supporta perfettamente l'equazione di stato empirica Eq. (20.9):

$$PV = NkT$$

fornendoci però una comprensione più approfondita. In particolare dà una interpretazione dinamica della *temperatura*, che altrimenti restava definita solo a livello empirico. Infatti, confrontando le due equazioni vediamo subito che deve essere:

$$\left\langle mv^2\right\rangle = 3kT \tag{20.15}$$

20.3 Temperatura ed energia interna dei gas

Il modello molecolare ci ha permesso di trovare una relazione fra la temperatura T di un gas e l'agitazione delle molecole che lo compongono,

attraverso la relazione $\langle mv^2 \rangle = 3kT$. È abbastanza facile notare la somiglianza con la formula dell'energia cinetica, $\frac{m}{2}v^2$.

In effetti, la temperatura è legata all'energia microscopica dei singoli costituenti del gas. Nelle seguenti sezioni approfondiamo questo legame.

20.3.1 Temperatura ed energia cinetica di traslazione

La quantità $\langle mv^2 \rangle$ che compare nell'Eq. (20.15) è ovviamente legata all'energia cinetica delle molecole del gas: $\mathcal{E}_i = \frac{m_i}{2}v_i^2$. In verità, una molecola può essere un oggetto complesso, formato da più atomi, dunque non necessariamente puntiforme. Come tale, oltre ad avere un movimento di traslazione, può essere dotato anche di rotazione. La sua energia cinetica dipende sia dal moto traslatorio che da quello rotatorio, e la componente $\frac{m_i}{2}v_i^2$ è legata solo al moto traslatorio. Pertanto, si definisce l'*energia cinetica traslatoria* esattamente la quantità

$$\mathcal{E}_i^T = \frac{m_i}{2}v_i^2 \qquad \text{(energia cinetica traslatoria)} \tag{20.16}$$

e quindi possiamo affermare che

$$\left\langle \mathcal{E}^T \right\rangle = \frac{3}{2}kT \tag{20.17}$$

Cioè, *la temperatura T è una manifestazione macroscopica dell'energia cinetica traslatoria delle molecole.*

20.3.2 Temperatura ed energia interna

L'*energia interna* di un gas rarefatto è data dalla totalità delle energie cinetiche delle sue molecole:

$$E = \sum_i \mathcal{E}_i = N \langle \mathcal{E} \rangle \tag{20.18}$$

Nel caso di gas mono-atomici (cioè i cui atomi non si legano in molecole), l'energia cinetica è legata al solo moto di traslazione delle molecole:

$$m \left(v^{(i)}\right)^2 = 2\mathcal{E}^{(i)} \qquad \text{(gas monoatomico)} \tag{20.19}$$

Pertanto l'Eq. (20.15) può essere riscritta come:

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{3}{2}kT \qquad \text{(gas monoatomico)} \tag{20.20}$$

quindi collegando la *temperatura* (quantità macroscopica) all'*energia cinetica media* degli atomi del gas.

L'energia interna di un gas mono-atomico è quindi pari a

$$E = N \langle \mathcal{E} \rangle = \frac{3}{2} NkT \qquad \text{(gas monoatomico)} \tag{20.21}$$

Il legame fra temperatura ed energia interna è estendibile anche ai gas molecolari, le cui molecole sono formate da due o più atomi. La situazione è più complessa, poiché la molecola non è più assimilabile ad un punto materiale, avendo una struttura spaziale. In questi casi, l'energia cinetica ha sia una componente di traslazione, $\frac{m}{2}v^2$, sia una componente di rotazione. Per valutare l'effetto di quest'ultima, si devono contare i "gradi di libertà" ν della molecola stessa, ovvero in quanti modi gli atomi della molecola possono essere spostati, mantenendo però invariate le loro distanze reciproche — cioè la molecola viene considerata come un oggetto "rigido".

Consideriamo dapprima una molecola mono-atomica (un atomo!): esso può essere collocato arbitrariamente in una qualunque posizione spaziale (x, y, z), pertanto ha $\nu = 3$ gradi di libertà.

Poi consideriamo una molecola biatomica, i cui atomi si trovino alle coordinate (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2). Queste sono in tutto 6, ma non sono tutte arbitrarie, perché la distanza $r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ fra i due atomi è fissata, pertanto pone un vincolo: i gradi di libertà si calcolano come

$$\nu \;=\; \text{(numero di coordinate)} \;-\; \text{(numero di vincoli)}$$

Nel caso della molecola biatomica, $\nu = 6 - 1 = 5$. Si può anche pensare che si può collocare il primo atomo arbitrariamente nella posizione spaziale (x_1, y_1, z_1) (3 gradi di libertà), mentre il secondo può solo trovarsi sulla superficie di una sfera centrata sul primo atomo e di raggio r_{12} (2 gradi di libertà, poiché una posizione su una sfera può essere descritta da due sole coordinate, per esempio gli angoli polare e azimuthale θ, ϕ).

Infine consideriamo una molecola triatomica. Di nuovo, le coordinate dei 3 atomi sono in tutto 9: (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), però ci sono 3 vincoli, dati dalle distanze interatomiche $r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$ (per r_{12}, r_{23}, r_{13} rispettivamente). Quindi i gradi di libertà sono $\nu = 9 - 3 = 6$. Anche qui possiamo ragionare pensando che il primo atomo viene posto arbitrariamente nella posizione spaziale (x_1, y_1, z_1) (3 gradi di libertà), il secondo su una sfera centrata sul primo e di raggio r_{12} (2 gradi di libertà). Il terzo deve trovarsi a distanze

r_{13} e r_{23} dai primi due, e questo individua un cerchio che giace su un piano ortogonale all'asse che congiunge i due atomi: la posizione su un cerchio può essere indivuduata da una sola coordinata, per esempio l'angolo azimuthale ϕ, quindi un solo grado di libertà. In totale, $3 + 2 + 1 = 6$ gradi di libertà.

Per molecole con 4 o più atomi, i gradi di libertà non aumentano più. Infatti, fissate le posizioni dei primi 3 atomi (6 gradi di libertà come già detto), ogni atomo ulteriore i-esimo ha 3 coordinate (x_i, y_i, z_i) che devono soddisfare (almeno) 3 vincoli, dati dalle distanze $r_{1i},\ r_{2i},\ r_{3i}$.

Senza dare la dimostrazione, riportiamo un risultato di meccanica statistica, secondo cui *l'energia cinetica media di una molecola è proporzionale al numero totale dei gradi di libertà.* Per il gas mono-atomico ovviamente $\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{2} \langle mv^2 \rangle$, e $\nu = 3$. Quindi la costante di proporzionalità fra ν e $\langle \mathcal{E} \rangle$ deve essere $\frac{1}{6}$:

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\nu}{6} \langle mv^2 \rangle \tag{20.22}$$

Riassumendo tutto in una tabella, la situazione è quindi la seguente:

gas	ν (gradi di libertà)	energia cinetica
monoatomico	3	$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{2} \langle mv^2 \rangle$
biatomico	5	$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{5}{6} \langle mv^2 \rangle$
triatomico (o più complesso)	6	$\langle \mathcal{E} \rangle = \langle mv^2 \rangle$

L'Eq. (20.14) può essere riscritta come $\langle mv^2 \rangle = 3\frac{PV}{N}$. Quindi, utilizzando l'Eq. (20.22):

$$E = N \langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\nu}{2} PV \quad ; \quad \nu = \begin{cases} 3 & \text{(monoatomico)} \\ 5 & \text{(biatomico)} \\ 6 & \text{(triatomico o più)} \end{cases} \tag{20.23}$$

Confrontando con l'Eq. (20.9), $PV = NkT$, vediamo che deve valere:

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\sum_i \mathcal{E}^{(i)}}{N} = \nu \frac{kT}{2} = \begin{cases} \frac{3}{2}kT & \text{(monoatomico)} \\ \frac{5}{2}kT & \text{(biatomico)} \\ 3kT & \text{(triatomico o più)} \end{cases} \tag{20.24}$$

La temperatura è una misura dell'energia cinetica media $\langle \mathcal{E} \rangle$ delle molecole.

20.3.3 Alcuni esempi

Consideriamo alcuni esempi di gas. I gas monoatomici sono tipicamente costituiti dagli "elementi nobili", per esempio l'elio (He), il neon (Ne), l'argon (Ar), ... Molti gas con cui abbiamo a che fare hanno molecole biatomiche: l'idrogeno (H_2), l'ossigeno (O_2), l'azoto (N_2)... Due esempi di molecola triatomica sono il biossido di carbonio (o anidride carbonica, CO_2) e il vapore acqueo (H_2O).

Utilizzando le formule introdotte nelle sezioni precedenti, calcoliamo le proprietà cinetiche di questi gas, ad una temperatura assoluta $T = 300$ K (pari a 26.85 °C, una temperatura ambiente ... un po' estiva). Le formule che useremo sono $\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\nu}{2}kT$ e $\langle mv^2 \rangle = 3kT$. La massa molecolare è data in "unità di massa atomica" (u.a.), definita come $\frac{1}{12}$ della massa del carbonio ${}^{12}_{6}C$:

$$1 \text{ u.a.} \quad = \quad 1.660\,538\,9 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \tag{20.25}$$

La velocità è espressa come "velocità quadratica media", $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$.

I risultati sono elencati nella seguente tabella (siete ovviamente invitati a verificare i calcoli!):

gas		molecola	massa		$\langle \mathcal{E} \rangle$	$\sqrt{\langle v^2 \rangle}$
			u.a.	10^{-26} kg	10^{-20} J	km/s
elio	He	monoatomica	4	0.66	0.621	1.37
neon	Ne	monoatomica	10	1.66	0.621	0.87
idrogeno	H_2	biatomica	2	0.33	1.035	1.94
ossigeno	O_2	biatomica	32	5.31	1.035	0.48
azoto	N_2	biatomica	28	4.65	1.035	0.52
biossido di carbonio	CO_2	triatomica	44	7.31	1.243	0.41
vapore acqueo	H_2O	triatomica	18	2.99	1.243	0.64

Vale la pena di notare che a temperatura ambiente la velocità quadratica media delle molecole di gas è dell'ordine del chilometro al secondo!!! Se il nostro gas è racchiuso in un volume cubico di 1 m di lato, ogni molecola urta le pareti circa 1000 volte in un secondo.

Inoltre, alla pressione atmosferica $P \simeq 10^5$ Pa, un volume di 1 m^3 deve contenere un numero di molecole che secondo l'equazione di stato è $N = \dfrac{PV}{kT} = 2.4 \cdot 10^{25}$. Quindi il numero di urti al secondo sulle pareti del nostro recipiente cubico è dell'ordine di 10^{28} — vuol dire 10 miliardi di miliardi di miliardi di urti al secondo! All'inizio di questa sezione, abbiamo detto: *"La pressione P prodotta da un gas contro le pareti del recipiente che lo contiene è interpretabile come l'effetto netto di tantissimi urti che le singole molecole del gas producono contro le pareti."* Ora dovrebbe essere chiaro che l'ipotesi di partenza è perfettamente attinente alla realtà.

20.4 Temperatura ed energia interna nei solidi e nei liquidi (cenni)

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto che un gas rarefatto possiede un'*energia interna*, data dalla totalità delle energie cinetiche molecolari, la cui manifestazione macroscopica è la *temperatura*

$$E \;=\; N\,\langle \mathcal{E} \rangle \;=\; \frac{\nu}{2} NkT \qquad\qquad \text{(gas rarefatti)}$$

In effetti, anche nei solidi e nei liquidi abbiamo una relazione fra la temperatura T e l'energia interna E. Qui però la situazione è complicata dal fatto che gli atomi, o le molecole, del sistema sono interagenti. Quindi l'energia meccanica del sistema, oltre ad avere una componente cinetica, dipende anche dalle energie potenziali delle mutue interazioni. La loro forma in generale è complessa, pertanto la dipendenza fra le variabili macroscopiche P, V, T si complica.

Imaginiamo di avere un solido, o un liquido alla temperatura T. Ciascuno dei suoi costituenti (molecole o atomi) è dotato sia di un'energia cinetica $\mathcal{E}_i$ che di un'energia potenziale $\mathcal{U}$, quindi di un'energia meccanica $E_i^{part} = \mathcal{E}_i + \mathcal{U}_i$. Quando la sua temperatura T aumenta, anche l'energia cinetica media $\langle \mathcal{E} \rangle$ aumenta, vale a dire che i costituenti si muovono più rapidamente. Parimenti anche la loro energia potenziale media $\langle \mathcal{U} \rangle$ deve aumentare: senza entrare in dettagli quantitativi, una maggiore energia cinetica consente ai costituenti di raggiungere posizioni spaziali che prima erano cinematicamente proibite, cioè caratterizzate da un'energia potenziale maggiore. D'altra parte, un'energia

potenziale media maggiore significa minore legame fra i costituenti: in effetti l'effetto macroscopico è la *dilatazione termica*, di cui abbiamo parlato all'inizio del capitolo.

Il tutto è reversibile: una diminuzione di temperatura comporta una diminuzione dell'energia cinetica, ed allo stesso tempo dell'energia potenziale dei costituenti.

Possiamo quindi sintetizzare quello che avviene con questo schema logico:

$$\text{aumento di } T \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{aumento di } \langle \mathcal{E} \rangle \\ \text{aumento di } \langle \mathcal{U} \rangle \end{array} \right\} \iff \text{aumento di } E$$

Seppure in maniera qualitativa, concludiamo che anche nei solidi o nei liquidi un aumento (o diminuzione) della temperatura è associato ad un aumento (o diminuzione) dell'energia interna.

20.4.1 Energia e temperatura nei solidi

Nel caso dei solidi, esiste in molti casi una relazione semplice fra E e T. Questa può essere capita pensando al solido come ad un reticolo di atomi, ciascuno in una sua posizione di equilibrio $\vec{\boldsymbol{r}}^{eq} \equiv (x^{eq}, y^{eq}, z^{eq})$. La forza totale esercitata su questo atomo dagli atomi circostanti può essere molto complicata, ma abbiamo visto nella Sezione 14.3 che per piccoli spostamenti dall'equilibrio essa può essere descritta come una forza elastica della forma:

$$\begin{aligned} F_x &= -k_x(x - x^{eq}) \\ F_y &= -k_y(y - y^{eq}) \\ F_z &= -k_z(z - z^{eq}) \end{aligned}$$

Pertanto l'atomo oscilla attorno al suo punto di equilibrio con moti armonici nelle 3 direzioni:

$$\begin{aligned} x(t) &= x^{eq} + A_x \cos(\omega_x t + \phi_x) \qquad (\omega_x = \sqrt{k_x/m}) \\ y(t) &= y^{eq} + A_y \cos(\omega_y t + \phi_y) \qquad (\omega_y = \sqrt{k_y/m}) \\ z(t) &= z^{eq} + A_z \cos(\omega_z t + \phi_z) \qquad (\omega_z = \sqrt{k_z/m}) \end{aligned}$$

Ogni oscillazione, lungo un dato asse $i \in \{x, y, z\}$ è caratterizzata da un'energia cinetica $\mathcal{E}_i = \dfrac{m}{2}\omega_i^2 A_i^2 \sin^2(\omega_i t + \phi_i)$, quindi — ricordando che $\langle \sin^2 \rangle = \dfrac{1}{2}$, troviamo

$$\langle \mathcal{E}_i \rangle = \frac{k_i}{4} A_i^2$$

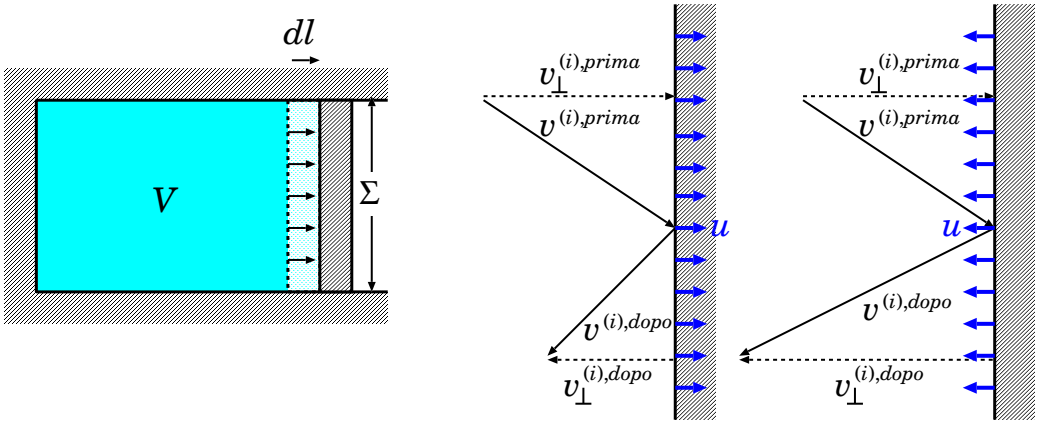


Figura 20.4: *A sinistra: rarefazione di un gas, la variazione di volume è $dV = \Sigma\, d\ell$. Al centro e a destra: variazione della velocità $v^{(i)}$ di una molecola di gas che urta la parete mobile: se $u > 0$ (rarefazione) $v_\perp^{(i)}$ dopo l'urto è diminuita; se invece $u < 0$ (compressione) $v_\perp^{(i)}$ dopo l'urto è aumentata.*

Similmente, l'energia potenziale è $\mathcal{U}_i = \dfrac{k_2}{2} A_i^2 \cos^2(\omega_i t + \phi_i)$, e quindi:

$$\langle \mathcal{U}_i \rangle = \frac{k_i}{4} A_i^2$$

Si conclude che per ogni atomo,

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \langle \mathcal{U} \rangle$$

Ora, se associamo l'energia cinetica alla temperatura come $\langle \mathcal{E} \rangle = \dfrac{3}{2} kT$, l'energia meccanima media è $\left\langle E^{part} \right\rangle = 2 \langle \mathcal{E} \rangle = 3kT$, e si ricava

$$E = 3NkT \qquad \text{(solidi)} \tag{20.26}$$

Questa legge è nota come *legge di Dulong e Petit*, ed è valida per una grande varietà di solidi.

20.5 Trasformazione adiabatica di un gas

Ora consideriamo un gas rarefatto, che occupa un volume V alla pressione P. Supponiamo che il volume del gas venga variato di una quantità dV, per esempio spostando una parete del recipiente che lo contiene.

Sia Σ la superficie della parete che si sposta, $d\ell$ il suo spostamento — definito positivo se il volume aumenta — cosicché $dV = \Sigma\, d\ell$ (vd Fig. 20.4

a sinistra). La forza esterna F_{est} applicata alla parete deve contrastare la pressione interna P, quindi $F_{est} = \Sigma \cdot P$, diretta verso l'interno. Il lavoro fatto dalla forza esterna è dunque:

$$\delta \mathcal{W}_{est} = -F_{est}\, d\ell = -P\, dV \tag{20.27}$$

Se il gas si comprime questo lavoro è positivo, cioè la forza esterna spende energia. Dove va questa energia? Viceversa, se il gas si espande, la forza esterna fa lavoro negativo, e la pressione del gas compie lavoro positivo: a spese di quale energia?

Sappiamo che il gas è dotato di un'energia interna

$$E = \sum_i \mathcal{E}^{(i)} = N \langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\nu}{2} PV \tag{20.28}$$

Se il gas scambia energia *solo* attraverso il lavoro esterno, la compressione/rarefazione di chiama *adiabatica*. Sotto l'ipotesi di trasformazione adiabatica, evidentemente il lavoro delle forze esterne è unico responsabile della variazione dell'energia interna:

$$dE = -P\, dV \qquad \text{(trasformazione adiabatica)} \tag{20.29}$$

20.5.1 Descrizione microscopica della trasformazione adiabatica

Analizziamo ora la trasformazione adiabatica da un punto di vista microscopico. Chiamiamo dt il tempo in cui avviene lo spostamento della parete e u la velocità con cui si sposta, definita positiva se la parete si allontana e il gas si espande, cosicché:

$$dV = \Sigma\, d\ell = \Sigma\, u\, dt$$

Tutte le molecole che urtano la parete nel tempo dt subiscono un urto elastico: la componente della velocità ortogonale alla parete, $v_\perp$, inverte la direzione, ma subisce anche un aumento se la parete si sposta verso l'interno, una diminuzione se si sposta verso l'esterno. Per la i-esima molecola, la velocità dopo l'urto è legata a quella prima dell'urto da:

$$\begin{aligned} v_\perp^{(i),dopo} &= -v_\perp^{(i),prima} + 2u \\ v_\parallel^{(i),dopo} &= v_\parallel^{(i),prima} \end{aligned}$$

(vd Fig. 20.4, al centro e a destra). La relazione fra $v_\perp^{(i),dopo}$ e $v_\perp^{(i),prima}$ si ricava dalle formule dell'urto elastico, Sezione **??**, Eq. (**??**), nel caso-limite

in cui la massa M dell'oggetto urtato (la parete) è enormemente più grande della massa m della molecola.

Quindi il quadrato della sua velocità, $(v^{(i)})^2$, ha subito una variazione:

$$\begin{aligned}
\Delta\left[(v^{(i)})^2\right] &= \left(v^{(i),dopo}\right)^2 - \left(v^{(i),prima}\right)^2 \\
&= \left(v_\perp^{(i),dopo}\right)^2 - \left(v_\perp^{(i),prima}\right)^2 \\
&= -4v_\perp^{(i),prima}u + 4u^2 \\
&\simeq -4v_\perp^{(i)}u
\end{aligned}$$

L'ultimo passaggio ($\simeq$) è motivato perché $u \ll v_\perp^{(i)}$ (la velocità di spostamento della parete è molto più piccola della velocità delle molecole).

Una variazione di $(v^{(i)})^2$ comporta una variazione dell'energia cinetica della molecola:

$$\Delta\mathcal{E}^{(i)} = \frac{m}{2}\Delta\left[(v^{(i)})^2\right] = -2mv_\perp^{(i)}u$$

Di quanto varia l'energia totale del gas, nel tempo dt? Occorre sommare tutti i contributi $\Delta\mathcal{E}^{(i)}$, pesando ciascuno per la probabilità $d\mathcal{P}^{(i)} = dt\,\dfrac{v_\perp^{(i)}\Sigma}{2V}$ che la molecola urti la parete mobile nel tempo dt. Pertanto

$$\begin{aligned}
dE &= \sum_i d\mathcal{P}^{(i)}\cdot\Delta\mathcal{E}^{(i)} = \sum_i\left(dt\frac{v_\perp^{(i)}\Sigma}{2V}\right)\left(-2mv_\perp^{(i)}u\right) \\
&= -\frac{\Sigma\,u\,dt}{V}\sum_i m(v_\perp^{(i)})^2 \\
&= -\frac{dV}{V}N\left\langle mv_\perp^2\right\rangle \\
&= -\frac{dV}{V}\frac{N}{3}\left\langle mv^2\right\rangle
\end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio abbiamo ricordato che $v_\perp^2$ contribuisce in media per 1/3 di v^2). Ora inseriamo l'equazione di stato Eq. (20.14), $PV = \dfrac{N}{3}\left\langle mv^2\right\rangle$, ottenendo dunque:

$$dE = -dV\,P$$

che coincide con l'Eq. (20.29), ottenuta con il calcolo del lavoro.

Riassumendo: nella Sezione 20.5, ipotizzando che il lavoro esterno $\delta\mathcal{W}_{est} = -P\,dV$ trasferisse energia al gas, avevamo dedotto che $dE = -P\,dV$.

In questa sezione, abbiamo analizzato il comportamento del gas durante una variazione di volume dV, e abbiamo visto che gli urti elastici delle molecole contro la parete in movimento provocano una variazione dell'energia cinetica media delle molecole stesse. L'effetto totale riproduce esattamente il risultato trovato in precedenza.

20.5.2 Proprietà della trasformazione adiabatica

Ora studiamo le proprietà della trasformazione adiabatica:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W}_{est} &= dE = \frac{\nu}{2}\, d(PV) \\ -P\, dV &= \frac{\nu}{2}\left[P\, dV + V\, dP\right] \\ (\nu+2)P\, dV &= -\nu V\, dP \end{aligned}$$

ovvero

$$\left(\frac{\nu+2}{\nu}\right)\frac{dV}{V} = -\frac{dP}{P} \tag{20.30}$$

È utile definire un parametro γ:

$$\gamma = \frac{\nu+2}{\nu} = \begin{cases} 5/3 & \text{(gas monoatomico)} \\ 7/5 & \text{(gas biatomico)} \\ 4/3 & \text{(gas triatomico o più)} \end{cases} \tag{20.31}$$

L'Eq. (20.30) si può integrare ricordando che $\dfrac{d\ln x}{dx} = \dfrac{1}{x}$, cosicché $\dfrac{dx}{x} = d\left(\ln x\right)$. Quindi:

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = \gamma\, d\left[\ln V\right] + d\left[\ln P\right] \\ &= d\left[\gamma \ln V\right] + d\left[\ln P\right] = d\left[\ln\left(V^{\gamma}\right)\right] + d\left[\ln P\right] \\ &= d\left[\ln\left(V^{\gamma}\right) + \ln P\right] = d\left[\ln\left(PV^{\gamma}\right)\right] \end{aligned}$$

In altre parole, $\ln\left(PV^{\gamma}\right)$ non subisce variazione, quindi

$$PV^{\gamma} = \text{costante} \qquad \text{(trasformazione adiabatica)} \tag{20.32}$$

Questa equazione è di importanza fondamentale. Essa *descrive il comportamento di un gas rarefatto in una trasformazione adiabatica*, cioè quando *la sua energia viene alterata solamente dal lavoro di una forza esterna*. Passando da uno stato (1) ad uno stato (2), un aumento di volume

produce una diminuzione della pressione; viceversa, una diminuzione di volume produce un aumento di pressione; la relazione fra pressione e volume è tale che fra lo stato iniziale (1) e lo stato finale (2) vale la relazione:

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \qquad \text{(trasformazione adiabatica)} \tag{20.33}$$

Utilizzando l'equazione di stato Eq. (20.9), possiamo esprimere P o V in funzione di T, nell'Eq. (20.32). Per esempio, scrivendo $P = \dfrac{NkT}{V}$ otteniamo:

$$TV^{(\gamma-1)} = \text{costante} \qquad \text{(trasformazione adiabatica)} \tag{20.34}$$

oppure scrivendo $V = \dfrac{NkT}{P}$ otteniamo:

$$\frac{T^\gamma}{P^{(\gamma-1)}} = \text{costante} \qquad \text{(trasformazione adiabatica)} \tag{20.35}$$

Le Eq. (20.32), Eq. (20.34), Eq. (20.35) sono tutte equivalenti, in quanto collegate dall'equazione di stato Eq. (20.9). La forma $TV^{(\gamma-1)} = \text{costante}$, in particolare, ci informa che se il volume V diminuisce, la temperatura T aumenta (e viceversa). Questo è consistente con l'ipotesi che abbiamo fatto, che l'energia interna E subisca variazioni solo a causa del lavoro esterno $\mathcal{W}_{est}$: se abbiamo una compressione, V diminuisce e $\mathcal{W}_{est}$ è positivo, dunque deve aumentare l'energia interna, ovvero deve aumentare la temperatura.

20.5.3 Lavoro in una trasformazione adiabatica

Abbiamo visto come calcolare il lavoro elementare fatto sul gas in una trasformazione adiabatica:

$$\delta\mathcal{W}_{est} = -P\,dV$$

Quanto vale il lavoro esterno $_{est}$ fatto lungo una trasformazione adiabatica reale, quando il volume varia da V_1 a V_2? Per rispondere bisogna integrare il lavoro elementare lungo tutta la trasformazione:

$$\mathcal{W}_{est} \;=\; \int_{V_1}^{V_2} \delta\mathcal{W}_{est} \;=\; -\int_{V_1}^{V_2} P\,dV$$

dove P varia al variare di V, in modo da mantenere costante la quantità PV^γ.

Si può calcolare il risultato anche considerando la variazione dell'energia interna E del gas:

$$\mathcal{W}_{est} \;=\; \Delta E = \Delta\left(\frac{\nu}{2}NkT\right) = \frac{\nu}{2}Nk\,\Delta T$$

Ora, resta da calcolare ΔT. Sappiamo che $PV = NkT$, pertanto:

$$\mathcal{W}_{est} \quad = \quad \Delta E = \frac{\nu}{2}\left(P_2V_2 - P_1V_1\right)$$

Questa scrittura può essere poco pratica, perché per utilizzarla occorre conoscere P, V all'inizio e alla fine della trasformazione. Pertanto è utile riscriverla, esprimendo $P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}$:

$$\mathcal{W}_{est} = \Delta E = \frac{\nu}{2}P_1V_1\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{(\gamma-1)} - 1\right] \tag{20.36}$$

In caso di compressione, $V_2 < V_1$ e quindi $\Delta E > 0$, come ci si aspetta. Viceversa, in caso di rarefazione $\Delta E < 0$.

20.6 Trasferimento di energia senza lavoro: il calore

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto che un gas rarefatto possiede un'*energia interna*, data dalla totalità delle energie cinetiche molecolari, la cui manifestazione macroscopica è la *temperatura*: $\langle\mathcal{E}\rangle = \frac{E}{N} = \frac{\nu}{2}kT$ Questo concetto è estendibile anche ai liquidi e ai solidi, anche se in questo caso i costituenti sono interagenti, pertanto oltre all'energia cinetica media, $\langle\mathcal{E}\rangle$, occorre considerare anche l'energia potenziale media $\langle\mathcal{U}\rangle$. Abbiamo anche osservato che, durante un'espansione o compressione, l'energia interna può essere alterata mediante un lavoro fatto dall'esterno $\delta\mathcal{W}_{est}$:

$$dE = \delta\mathcal{W}_{est} = -P\,dV$$

e ne abbiamo dato la spiegazione microscopica per i gas rarefatti.

Tuttavia, sappiamo che la temperatura — e quindi l'energia interna di un gas — possono essere alterate anche *senza fare alcun lavoro dall'esterno*. Per esempio, sappiamo che se un gas, tenuto a volume costante, viene messo a contatto con un altro oggetto più caldo, o più freddo, la temperatura del gas aumenterà, o diminuirà, rispettivamente. Dunque, la sua energia interna cambia. Ma non c'è un lavoro che spieghi questo. Ciò significa che il gas è in grado di scambiare energia con altri oggetti anche attraverso altri meccanismi.

Esempio: scambio di energia fra gas a volume costante

Due recipienti identici di volume V contengono aria (quindi gas biatomico) alla pressione P^{in}, a due diverse temperature T_1^{in}, T_2^{in} (per es. $T_2^{in} > T_1^{in}$). I recipienti sono separati fra loro da una sottile parete che non si può spostare. Il tutto è isolato dall'ambiente circostante. Dopo un certo tempo le temperature dei due gas si sono uniformate ad un valore intermedio T^{fin}. Quanto vale T^{fin}? Come sono cambiate le pressioni e le energie interne dei due gas?

Risposta. *Per ciascun gas, in qualunque momento, vale l'equazione di stato $PV = NkT$ e la relazione temperatura-energia, che nel caso biatomico ($\nu = 5$) è $E = \frac{5}{2}NkT$. Poiché il sistema dei due gas è isolato, si presume che la sua energia totale debba conservarsi:*

$$\begin{aligned} E_1^{in} + E_2^{in} &= E_1^{fin} + E_2^{fin} \\ \frac{5}{2}\left(N_1 k T_1^{in} + N_2 k T_2^{in}\right) &= \frac{5}{2}\left(N_1 k T^{fin} + N_2 k T^{fin}\right) \end{aligned}$$

(il numero di molecole $N_{1,2}$ di ciascun gas ovviamnte non cambia) da cui si ricava:

$$T^{fin} = \frac{N_1 T_1^{in} + N_2 T_2^{in}}{N_1 + N_2}$$

La variazione di pressione di ciascun gas è:

$$\begin{aligned} \Delta P_1 &= \frac{kN_1}{V}\left(T^{fin} - T_1^{in}\right) = \frac{k}{V}\frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}\left(T_2^{in} - T_1^{in}\right) \\ \Delta P_2 &= \frac{kN_2}{V}\left(T^{fin} - T_2^{in}\right) = -\frac{k}{V}\frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}\left(T_2^{in} - T_1^{in}\right) \end{aligned}$$

La variazione di energia interna di ciascun gas invece è:

$$\begin{aligned} \Delta E_1 &= \frac{5}{2}kN_1\left(T^{fin} - T_1^{in}\right) = \frac{5}{2}k\frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}\left(T_2^{in} - T_1^{in}\right) \\ \Delta E_2 &= \frac{5}{2}kN_2\left(T^{fin} - T_2^{in}\right) = -\frac{5}{2}k\frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}\left(T_2^{in} - T_1^{in}\right) \end{aligned}$$

Osservazioni. *Come ci si aspettava, T^{fin} è intermedio fra T_1^{in} e T_2^{in} (è una media pesata dei due valori iniziali). Le due pressioni, inizialmente uguali, ora sono diverse: il gas (1) si è riscaldato ($T^{fin} > T_1^{in}$), quindi a parità di volume deve avere aumentato la pressione, mentre il gas (2) l'ha diminuita. Inoltre le energie dei due gas sono cambiate: quella del gas (2) è diminuita, mentre quella del gas (1) è aumentata di una pari quantità. Però la parete divisoria non si è mossa, quindi questo scambio di energie non è attribuibile ad un lavoro.*

Consideriamo un altro esempio: un gas rarefatto che viene mantenuto a temperatura costante e subisce una variazione di volume, dunque compie un lavoro. Che cosa fornisce l'energia necessaria a compiere questo lavoro?

Esempio: espansione isoterma di un gas

Un gas rarefatto occupa inizialmente un volume V_1 e si trova a temperatura T. Successivamente viene lasciato espandere fino a raggiungere un volume V_2, mantenendo invariata la sua temperatura. Qual è il lavoro fatto dal gas sull'ambiente circostante? Di quanto è variata la sua energia interna E?

Risposta. *Il lavoro elementare fatto dal gas si può calcolare come $\delta\mathcal{W} = P\,dV$. Il lavoro totale quindi è $\mathcal{W} = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV$. Sappiamo che durante l'espansione P cambia, diminuendo all'aumentare di V, secondo la legge $PV = NkT$, con T costante. Quindi il lavoro fatto dal gas è:*

$$\mathcal{W} \;=\; \int_{V_1}^{V_2} \frac{NkT}{V}\,dV \;=\; NkT\,[\ln(V)]_{V_1}^{V_2} \;=\; NkT\,\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Per un'espansione, $V_2 > V_1$, dunque il lavoro fatto dal gas è positivo. Viceversa, per una compressione il lavoro fatto dal gas è negativo — ovvero l'ambiente fa un lavoro esterno sul gas. L'energia interna del gas è $E = \frac{\nu}{2}NkT$. Essendo T costante, l'energia interna non cambia.

Osservazione. *Il gas ha compiuto un lavoro, dunque ha ceduto energia all'ambiente. Ma la sua energia interna non è cambiata. Evidentemente, qualche altro meccanismo ripristinava l'energia del gas, man mano che questo ne cedeva all'ambiente tramite il lavoro.*

Il confronto fra la variazione di energia interna, dE, e il lavoro fatto da un sistema sull'ambiente, $\delta\mathcal{W}$, può essere generalizzato anche ai liquidi e ai solidi. Un qualunque oggetto, posto in contatto con un altro a diversa temperatura, altera la propria temperatura, e dunque la propria energia interna E. A rigore, i solidi e i liquidi, al variare della temperatura, subiscono variazioni di volume $dV = \alpha_V\,V\,dT$ (vd Eq. (20.3)), quindi se l'ambiente circostante è a pressione P, compiono un lavoro $\delta\mathcal{W}^{int} = P\,dV$, ovvero subiscono un lavoro esterno $\delta\mathcal{W}^{est} = -\delta\mathcal{W}^{int} = -P\,\alpha_V V\,dT$. In questo caso non possiamo dire che il lavoro sia nullo. Però, se questo lavoro fosse l'unico responsabile di una variazione di energia interna, avremmo subito un problema. Consideriamo un oggetto che si sta scaldando: $dT > 0$, quindi deve essere anche $dE > 0$ (anche se in generale la dipendenza fra dT e dE può essere non banale...). D'altronde, si deve anche dilatare, cioè $dV > 0$, quindi "subisce un lavoro esterno negativo", $\delta\mathcal{W}^{est} < 0$. Se questo fosse l'unico responsabile della variazione di energia interna, avremmo $dE = -P\,dV < 0$, il che è contraddittorio con $dT > 0$.

Anche qui, dobbiamo ammettere che ci siano altri meccanismi (che non siano il lavoro) per alterare l'energia interna di un oggetto.

20.6.1 Il calore: scambio di energia con processi microscopici

Ricordiamo che l'energia interna è la somma di tutte le energie meccaniche di atomi o molecole che costituiscono il nostro sistema. Poiché questi costituenti sono in continua agitazione, si urtano fra di loro e con i costituenti dell'ambiente che circonda il nostro sistema. Nel fare questo necessariamente si scambiano energia. Ma questi scambi sono tutti a livello microscopico, e non corrispondono ad uno spostamento macroscopico netto, pertanto non possono essere associati ad un lavoro. Eppure esistono.

L'effetto netto di questi scambi microscopici è comunque quello di alterare l'energia interna del sistema. Esso si chiama *calore*.

Il "calore" è lo scambio di energia fra un sistema e l'ambiente circostante, dovuto unicamente agli urti microscopici dei suoi componenti (atomi o molecole) con quelli dell'ambiente.

Il calore non è una proprietà intrinseca del sistema (così come non lo è il lavoro): una frase del tipo "un sistema possiede una quantità di calore Q" è priva di senso. Il calore è una quantità di energia *scambiata* con l'ambiente. Se provoca un aumento dell'energia interna E si dice che è positivo, altrimenti negativo:

$$\delta Q \;=\; dE \qquad (\text{se } \delta\mathcal{W} = 0) \tag{20.37}$$

20.6.2 Unità di misura

Essendo il calore una forma di scambio di energia, al pari del lavoro, esso si misura in Joule (J).

Storicamente si usava una diversa unità di misura: la kilocaloria (kCal). Essa è definita come la quantità di calore necessaria per elevare la temperatura di 1 kg di acqua distillata da 14.5°C a 15.5°C (gradi Celsius). Sperimentalmente si rileva che essa vale:

$$1 \text{ kCal} \;=\; 4.186 \cdot 10^3 \text{ J} \tag{20.38}$$

20.6.3 Meccanismi di scambio di calore

Il calore può venire scambiato fra più sistemi, o fra porzioni dello stesso sistema, con diversi meccanismi.

Se due sistemi (1) e (2) sono a contatto, e $T_2 > T_1$, i costituenti di (2) sono mediamente più energetici dei costituenti di (1): $\langle\mathcal{E}_2\rangle > \langle\mathcal{E}_1\rangle$. Urtandosi tra

loro, è più probabile che i componenti di (2) cedano parte della loro energia ai componenti di (1), pertanto $\langle \mathcal{E}_2 \rangle$ tende a diminuire e $\langle \mathcal{E}_1 \rangle$ tende a crescere. Ne risulta come effetto macroscopico che T_2 diminuisce e T_1 aumenta, finché non si raggiunge un equilibrio. Questo meccanismo si chiama *conduzione del calore*.

Esiste una legge empirica che descrive la *potenza* trasmessa tramite conduzione termica, cioè il calore scambiato nell'unità di tempo, fra due sistemi a temperature $T_1,\ T_2$, separati da un materiale divisorio di superficie Σ e spessore h:

$$\mathcal{P}_Q \;=\; \frac{\delta Q}{dt} \;=\; k\,\frac{\Sigma}{h}\,(T_2 - T_1)$$

La costante k si chiama *conducibilità termica*. I metalli sono dotati di valori di k relativamente elevati (per l'acciaio $k = 14\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$, per l'alluminio $k = 230\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$, per il rame $k = 400\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$), quindi sono buoni conduttori termici. Il vetro è più "isolante" ($k = 1\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$). Alcuni materiali sono stati sviluppati apposta per essere molto isolanti (per lana di vetro o lana di roccia, $k = 0.04\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$); per poliuretano espanso, $k = 0.024\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$). Anche l'aria secca è un buon isolante: $k = 0.026\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$.

Per sistemi fluidi (liquidi o gas) si può anche verificare il meccanismo della *convezione*. Porzioni più calde del fluido, per esempio scaldate da una sorgente di calore localizzata, sono dotate di maggiore energia cinetica, quindi tendono ad allontanarsi di più. Inoltre, il fluido più caldo si espande, quindi diventa più leggero (cioè la sua densità diminuisce), e quindi per la spinta di Archimede tende a salire, lasciando posto alle porzioni di fluido più fredde. Queste ultime, dunque, si avvicinano alla sorgente di calore, e quando sono sufficientemente vicine, a loro volta si riscaldano e risalgono. Si innescano così dei moti ciclici, che hanno come effetto quello di propagare il calore più rapidamente della semplice conduzione.

Infine, ogni oggetto che si trovi a temperatura T (espressa in gradi Kelvin!) emette radiazione elettromagnetica, la quale trasporta energia (come si vedrà nella Sezione 24.6). Pertanto l'oggetto emette energia per *irraggiamento*. La legge che descrive la potenza irradiata, per un oggetto a temperatura T e con superficie totale Σ, è:

$$\mathcal{P}^{rad} \;=\; \epsilon\,\sigma\,\Sigma T^4$$

essendo $\sigma = 5.6703 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$ una costante fisica universale, detta *costante di Stefan-Boltzmann*, ϵ è un parametro che dipende dalla natura

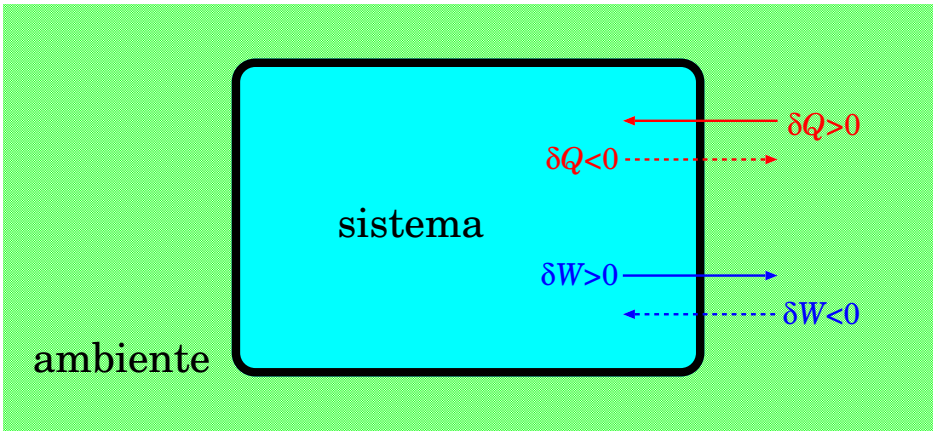


Figura 20.5: *Convenzione di segno per calore e lavoro: $\delta Q > 0$ se il calore è entrante (dall'ambiente al sistema); invece $\delta\mathcal{W} > 0$ se il lavoro è uscente (ovvero fatto dal sistema sull'ambiente).*

della superficie dell'oggetto, si chiama *emittanza*, e sta nell'intervallo $\epsilon \in]0;1[$ (estremi esclusi).

Se l'ambiente che circonda l'oggetto si trova a temperatura T_{amb}, anch'esso irradia, e parte della sua radiazione viene assorbita dall'oggetto, secondo una legge

$$\mathcal{P}^{abs} = \epsilon\,\sigma\,\Sigma T_{amb}^4$$

Quindi la potenza totale assorbita dall'oggetto è

$$\mathcal{P}^{abs} - \mathcal{P}^{rad} = \epsilon\,\sigma\,\Sigma\left(T_{amb}^4 - T^4\right)$$

Si noti che l'emittanza ϵ dell'oggetto in questione è la stessa sia per l'irraggiamento ($\mathcal{P}^{rad}$) che per l'assorbimento ($\mathcal{P}^{abs}$). Questo fatto non è un caso: *deve* essere così, per garantire che, quando l'oggetto è in equilibrio termico con l'ambiente ($T = T_{amb}$), lo scambio di energia sia nullo.

20.7 Lavoro e calore: primo principio della termodinamica

Arrivati a questo punto, la formulazione di una legge fondamentale della fisica, il *primo principio della termodinamica*, diventa relativamente semplice.

Un sistema può alterare la sua energia interna E in due modi: o mediante un lavoro macroscopico $\delta\mathcal{W}$ fatto sull'ambiente esterno, oppure scambiando

calore δQ con esso. Le convenzioni per i segni sono le seguenti — vedi Fig. 20.5:

$\delta\mathcal{W} > 0$	il sistema fa lavoro sull'ambiente (dunque gli cede energia)
$\delta\mathcal{W} < 0$	il sistema subisce lavoro dall'ambiente (dunque ne riceve energia)

$\delta Q > 0$	il sistema assorbe calore dall'ambiente (dunque ne riceve energia)
$\delta Q < 0$	il sistema cede calore all'ambiente (dunque gli cede energia)

Con queste premesse, la variazione di energia del sistema può sempre essere scritta come

$$dE = \delta Q - \delta\mathcal{W} \tag{20.39}$$

Questa equazione è la formulazione del primo principio della termodinamica, e consente di trattare allo stesso tempo scambi di energia macroscopici e microscopici.

Nel caso in cui il lavoro fatto dal sistema corrisponda ad una variazione di volume, allora abbiamo visto che $\delta\mathcal{W} = P\,dV$, pertanto il primo principio può essere riscritto come:

$$dE = \delta Q - P\,dV \tag{20.40}$$

20.8 Trasformazioni termodinamiche sui gas

In generale, lo stato di un gas può essere espresso con due delle tre variabili P, V, T — note due di esse, la terza può sempre essere ricavata dall'equazione di stato, $PV = NkT$. È consuetudine scegliere le variabili V, P come indipendenti, cosicché lo stato di un sistema può essere rappresentato graficamente come un punto sul piano cartesiano di assi V, P.

Una trasformazione termodinamica è un passaggio continuo da uno stato iniziale (V_1, P_1) ad uno stato finale (V_2, P_2). In questa sezione considereremo trasformazioni che sono costituite da *una successione di stati in equilibrio*. Questo significa che in ogni stato intermedio, tutte le parti del sistema sono in equilibrio tra loro, cosicché i valori di P e T sono uniformi.

Qualunque trasformazione che comporti variazioni di volume implica che il sistema esegue un lavoro sull'ambiente esterno:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W} &= P\,dV \\ \mathcal{W} &= \int_{V_1}^{V_2} P\,dV \end{aligned} \tag{20.41}$$

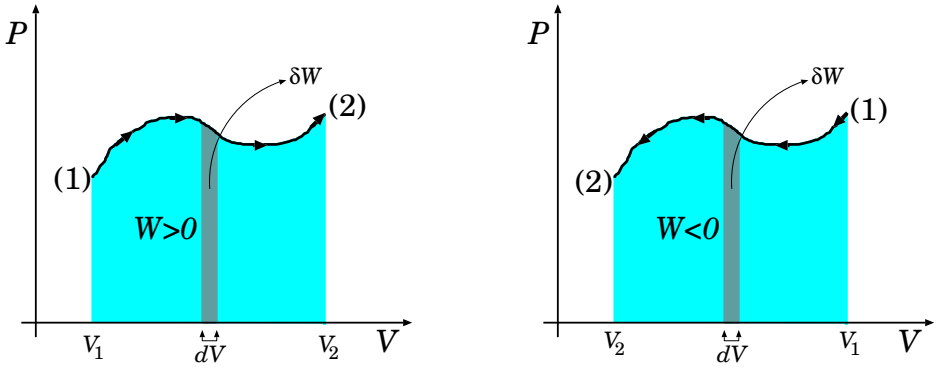


Figura 20.6: *Lavoro elementare* $\delta\mathcal{W} = P\,dV$ *e lavoro totale* $\mathcal{W} = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV$ *di una trasformazione, rappresentati nel piano* (V, P).

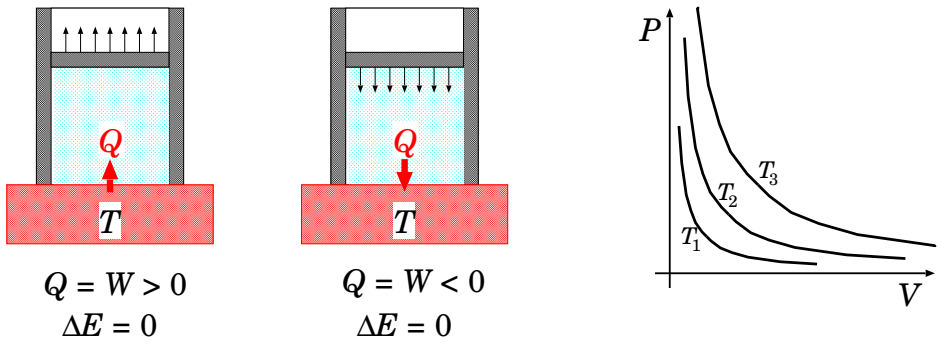


Figura 20.7: *Trasformazione isoterma, realizzata ponendo il serbatoio di gas a contatto con un* termostato *a temperatura* T *costante. A sinistra: espansione; al centro: compressione. A destra, il grafico della trasformazione isoterma sul piano* (V, P)*, per diversi valori di temperatura* $T_1 < T_2 < T_3$.

La prima espressione descrive il lavoro elementare per una variazione infinitesima dV di volume. La seconda invece è il lavoro totale fatto dallo stato iniziale allo stato finale. Entrambi sono rappresentabili graficamente come aree nel piano (V, P), come mostrato in Fig. 20.6. Quando la trasformazione viene eseguita nel verso di aumentare il volume, il lavoro è positivo, altrimenti è negativo.

Esaminiamo alcune trasformazioni notevoli sui gas.

20.8.1 Trasformazione isoterma

La trasformazione isoterma è realizzata con un'espansione o una compressione del gas mentre questo viene mantenuto a *temperatura costante* mediante un termostato. L'apparato può essere schematizzato come in Fig. 20.7. Le curve della trasformazione isoterma sono iperboli equilatere $PV =$ costante sul piano (V, P).

Poiché $E = \frac{\nu}{2} NkT$, questo significa che l'energia interna E non varia, quindi deve essere

$$\delta Q \;=\; P\,dV \qquad\qquad \text{(isoterma)}$$

Il lavoro fatto in una trasformazione isoterma fra i volumi V_1 e V_2 si calcola con l'ausilio dell'equazione di stato, $PV = NkT$:

$$\mathcal{W} \;=\; \int_{V_1}^{V_2} P\,dV \;=\; \int_{V_1}^{V_2} \frac{NkT}{V}\,dV \;=\; NkT\,[\ln(V)]_{V_1}^{V_2}$$

cioè:

$$\mathcal{W} \;=\; NkT\,\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \qquad\qquad \text{(isoterma)} \qquad (20.42)$$

La quantità di calore scambiata con il termostato deve essere

$$Q = \mathcal{W} = NkT\,\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \qquad\qquad \text{(isoterma)}$$

affinché E resti costante.

20.8.2 Trasformazione adiabatica

Abbiamo già esaminato la trasformazione adiabatica nella Sezione 20.5. Essa può essere realizzata con un serbatoio di gas perfettamente isolante, che non scambi calore con l'ambiente, come in Fig. 20.8. Se c'è n'espansione, il gas fa lavoro ($\mathcal{W} > 0$) e quindi la sua energia interna deve diminuire ($E < 0$), e così la sua temperatura.

Nel piano (V, P) la trasformazione adiabatica è una curva definita da

$$PV^{\gamma} \;=\; \text{costante} \qquad \left(\gamma = \frac{\nu+2}{\nu}\right)$$

Poiché è sempre $\gamma > 1$, la curva adiabatica è sempre "più ripida" delle curve isoterme, come indicato nella Fig. 20.8 a destra.

Il lavoro compiuto dal gas è

$$\mathcal{W} \;=\; \frac{\nu}{2} P_1 V_1 \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{(\gamma-1)}\right]$$

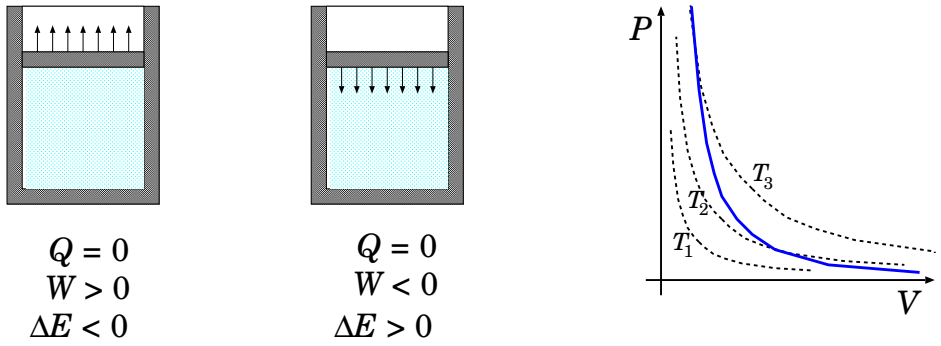


Figura 20.8: *Trasformazione adiabatica, realizzata con un serbatoio di gas perfettamente isolato dall'ambiente.. A sinistra: espansione; al centro: compressione. A destra, il grafico della trasformazione adiabatica sul piano* (V, P)*, per* $\gamma = \frac{5}{3}$ *(gas monoatomico). Sono presenti anche tre isoterme, per diversi valori di temperatura* $T_1 < T_2 < T_3$*, per indicare che ad un aumento di volume corrisponde una diminuzione di temperatura.*

20.8.3 Trasformazione isobara

La trasformazione isobara è caratterizzata da una pressione P costante. Si può realizzare con un serbatoio in cui una parete sia mobile (quindi in grado di adattarsi a variazioni di volume) ma sia operata in modo da mantenere una pressione costante sul gas. Per esempio, si può usare un pistone di sezione Σ che si può muovere verticalmente, su cui è appoggiata una massa M: cosicché la pressione esercitata sul gas sia sempre $P = \frac{Mg}{\Sigma}$, come mostrato in Fig. 20.9.

A causa dell'equazione di stato, $PV = NkT$, un aumento (o diminuzione) di volume deve essere necessariamente causato da un aumento (o diminuzione) di temperatura.

Il lavoro fatto in una trasformazione isoterma fra i volumi V_1 e V_2 è banalmente

$$\mathcal{W} = P\,(V_2 - V_1) \qquad \text{(isobara)} \tag{20.43}$$

L'energia interna E varia come

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{\nu}{2} Nk\,\Delta T = \frac{\nu}{2} Nk\,\frac{P\,\Delta V}{Nk} \\ &= \frac{\nu}{2} P\,(V_2 - V_1) \qquad \text{(isobara)} \end{aligned}$$

Pertanto il calore scambiato con l'ambiente è:

$$Q = \Delta E + \mathcal{W} = \left(\frac{\nu}{2} + 1\right) P\,(V_2 - V_1) \qquad \text{(isobara)}$$

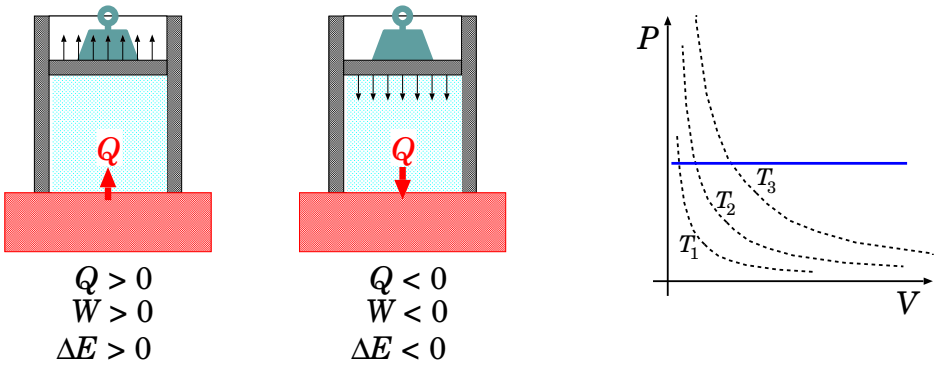


Figura 20.9: *Trasformazione isobara, realizzata ponendo il serbatoio di gas a contatto con una sorgente di calore, e sottoponendo il pistone ad una pressione P costante. A sinistra: espansione; al centro: compressione. A destra, il grafico della trasformazione isobara sul piano (V, P): sono disegnate anche diverse curve isoterme per diverse temperature, $T_1 < T_2 < T_3$, per mostrare che al crescere di T anche V aumenta.*

20.8.4 Trasformazione isocora

La trasformazione isocora avviene a volume costante, pertanto una variazione ΔP di pressione è necessariamente causata da una variazione ΔT di temperatura, tale che

$$\Delta P = \frac{Nk}{V}\Delta T \qquad \text{(isocora)}$$

Il lavoro è per definizione nullo: $\mathcal{W} = 0$. Quindi:

$$Q = \Delta E = \frac{\nu}{2}Nk\Delta T = \frac{\nu}{2}V\Delta P$$

20.8.5 Trasformazioni cicliche

Una trasformazione si chiama *ciclica* se lo stato iniziale coincide con lo stato finale. Nel piano (V, P) ciò significa che $V_2 \equiv V_1$ e $P_2 \equiv P_1$, come indicato nella Fig. 20.11, a sinistra.

Una trasformazione ciclica può sempre essere pensata come la concatenazione di due trasformazioni, Γ_1 e Γ_2, la prima che porta il sistema da uno stato A a uno stato B, la seconda che lo riporta dallo stato B allo stato A. Per fissare le idee, supponiamo che Γ_1 produca un'espansione e Γ_2 una compressione.

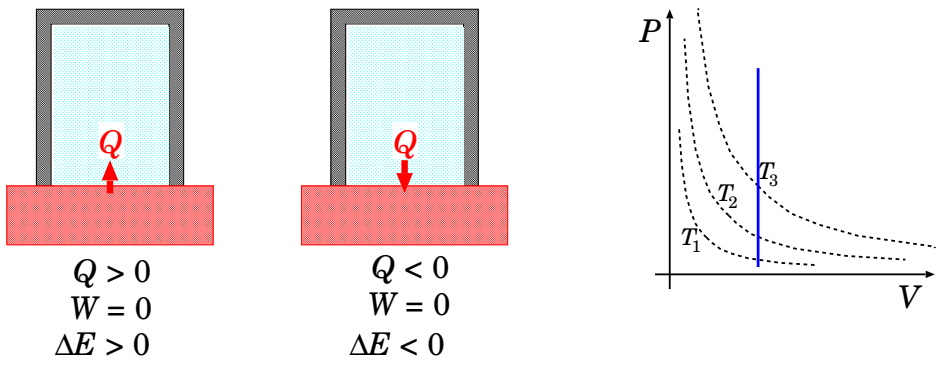


Figura 20.10: *Trasformazione isocora, realizzata ponendo un serbatoio di gas a volume V costante a contatto con una sorgente di calore. A sinistra: riscaldamento; al centro: raffreddamento. A destra, il grafico della trasformazione isocora sul piano (V, P): sono disegnate anche diverse curve isoterme per diverse temperature, $T_1 < T_2 < T_3$, per mostrare che al crescere di T anche P aumenta.*

Il lavoro totale della trasformazione può essere a sua volta scomposto in due successivi lavori:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1 &= \int_{\Gamma_1} P\,dV \;>\; 0 && \text{(espansione)} \\ \mathcal{W}_2 &= \int_{\Gamma_2} P\,dV \;<\; 0 && \text{(compressione)} \end{aligned}$$

In generale, $\mathcal{W}_1 \neq \mathcal{W}_2$, come si può notare dalel rappresentazioni grafiche in Fig. 20.11, al centro. Ne risulta un lavoro netto

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$$

rappresentabile come l'area sul piano (V, P) rachiusa dal grafico della trasformazione ciclica. Il lavoro netto può essere positivo o negativo, a seconda che l'espansione avvenga rispettivamente a pressioni più alte o più basse della compressione:

$$\begin{aligned} P^{(espansione)} > P^{(compressione)} &\iff \mathcal{W}^{(ciclo)} > 0 && \text{(grafico in senso orario)} \\ P^{(espansione)} < P^{(compressione)} &\iff \mathcal{W}^{(ciclo)} < 0 && \text{(grafico in senso antiorario)} \end{aligned}$$

Poiché nella trasformazione ciclica lo stato iniziale coincide con lo stato finale, la variazione di energia interna su un ciclo deve essere nulla:

$$\Delta E^{(ciclo)} \;=\; 0 \tag{20.44}$$

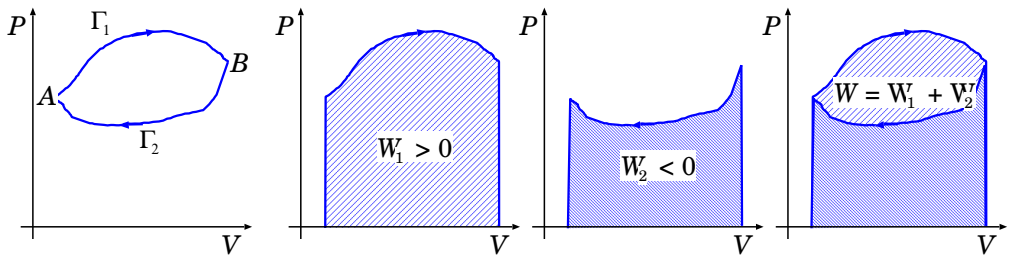


Figura 20.11: *Trasformazione ciclica. A sinistra, scomposizione in due trasformazioni* Γ_1 *e* Γ_2*. Nelle due figure centrali, le rappresentazioni grafiche dei lavori* $\mathcal{W}_1$ *e* $\mathcal{W}_2$ *svolti nelle due trasformazioni* Γ_1 *e* Γ_2*. A destra, il lavoro totale della trasformazione ciclica, rappresentabile graficamente come l'area del piano* (V, P) *rachiusa dal grafico della trasformazione.*

Ne consegue che su un ciclo il calore totale $Q^{(ciclo)}$ assorbito dal sistema deve essere uguale al lavoro $\mathcal{W}^{(ciclo)}$ fatto dal sistema:

$$Q^{(ciclo)} = \mathcal{W}^{(ciclo)} \tag{20.45}$$

20.9 Capacità termica e calore specifico

Abbiamo visto che cedere calore ad un oggetto significa aumentare la sua energia interna ($dE = \delta Q$) e quindi la sua temperatura, di una quantità dT. In generale il legame fra dE e dT è complesso.

Si definisce *capacità termica* C di un oggetto il rapporto fra il calore δQ ad esso ceduto e la variazione dT di temperatura che ne risulta:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} \tag{20.46}$$

Da un punto di vista concettuale, la capacità termica può essere pensata come la "resistenza" di un oggetto al subire variazioni di temperatura. Più C è grande, più difficile è scaldare o raffreddare l'oggetto.

Va notato che, in generale, C non è una costante, ma dipende dalla temperatura a cui si opera, specialmente per grandi variazioni di temperatura. Per variazioni di temperatura contenute, C è approssimativamente costante, e si può scrivere

$$\Delta Q = C\,\Delta T \tag{20.47}$$

A parità di temperatura T, l'energia interna E deve essere direttamente proporzionale alla quantità di materia presente nel sistema, cioè alla sua massa — raddoppiando la massa, raddoppia il numero di costituenti del sistema. Poiché $\langle E^{part} \rangle$ è funzione di T e $E = N \langle E^{part} \rangle$, deve anche raddoppiare E. Pertanto viene utile definire il *calore specifico* c di una sostanza come la sua capacità termica per una massa unitaria (cioè di 1 kg):

$$c = \frac{C}{m} \tag{20.48}$$

Ne deriva che la relazione fra un calore scambiato δQ e la variazione di temperatura dT è:

$$\Delta Q = m\, c\, \Delta T \tag{20.49}$$

Dalla definizione di kCal data nella sezione precedente risulta che $c_{\mathrm{H_2O}}(14.5°\mathrm{C}) = 4.186 \cdot 10^3\ \mathrm{JK^{-1}kg^{-1}}$.

20.9.1 Capacità termica a volume costante e a pressione costante

Si deve far notare che, nel definire capacità termica e calore specifico, occorre specificare le condizioni di lavoro: in particolare, se il calore viene ceduto mantenendo il sistema a pressione costante (tipicamente, la pressione dell'ambiente), oppure a volume costante. Il risultato è diverso, perché nel primo caso il sistema subisce una variazione di volume

$$dV = \alpha_V\, V\, dT$$

pertanto compie anche un lavoro sull'ambiente.

Vediamo i dettagli. Dal primo principio della termodinamica, formulato come nell'Eq. (20.40), si ottiene:

$$\delta Q = dE + P\, dV$$

Se la trasformazione avviene a volume costante (isocora) allora $dV = 0$ e la *capacità termica a volume costante* vale:

$$C_V = \frac{dE}{dT} \tag{20.50}$$

Se la trasformazione avviene a pressione costante (isobara), $\delta Q = dE + \alpha_V PV\, dT$, quindi la *capacità termica a pressione costante* vale:

$$C_P = \frac{dE}{dT} + \alpha_V PV = C_V + \alpha_V PV \tag{20.51}$$

Quando si misura la capacità termica di un liquido o di un solido, la sua dilatazione è inevitabile, pertanto solitamente si misura direttamente C_P. Viceversa, i modelli fisici che cercano di predire il valore della capacità termica sono considerati a volume costante, in modo da assumere $\delta Q = dE$, quindi considerano C_V. L'Eq. (20.51) consente di calcolare una delle due conoscendo l'altra.

Passando ai calori specifici, la relazione fra c_P e c_V si ottiene dividendo per la massa m dell'oggetto, e introducendo la densità di massa $\rho = \dfrac{m}{V}$:

$$c_P \;=\; c_V + \alpha_V \frac{P}{\rho} \tag{20.52}$$

Esercizio 20.1. *Calcolare la differenza fra c_P e c_V per il ferro e per l'acqua.*

Risposta. *I valori necessari per c_P, α_V, ρ si possono trovare tabulati su vari libri, o su internet. Assumiamo $P = 1$ Atm $= 101325$ Pa e costruiamo la seguente tabella:*

materiale	c_P (J K^{-1}kg^{-1})	α_V (K^{-1})	ρ (kg/m^3)	$c_P - c_V$ (J K^{-1}kg^{-1})
ferro	444	$35 \cdot 10^{-6}$	7874	0.00045
acqua a 15°C	4186	$210 \cdot 10^{-6}$	1000	0.021

Come si vede, la differenza fra c_P e c_V è molto piccola. Per il ferro, $\dfrac{c_P - c_V}{c_P} = 10^{-6}$, una parte su un milione. Per l'acqua invece $\dfrac{c_P - c_V}{c_P} = 5 \cdot 10^{-6}$, 5 parti su un milione. In entrambi i casi, si tratta di variazioni ben più piccole della precisione sperimentale e anche dell'accuratezza dei modelli teorici.

20.9.2 Misure di capacità termiche

La misura delle capacità termiche, o dei calori specifici, presenta una problematica generale: nel rapporto

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

la variazione di temperatura ΔT è direttamente misurabile, mentre invece il trasferimento di calore ΔQ non è associato a fenomeni macroscopici, quindi deve essere dedotto da altre osservazioni.

Misure di capacità termiche dei liquidi

Sappiamo che per qualunque sostanza l'energia interna E dipende dalla temperatura T:

$$E \;\equiv\; E(T)$$

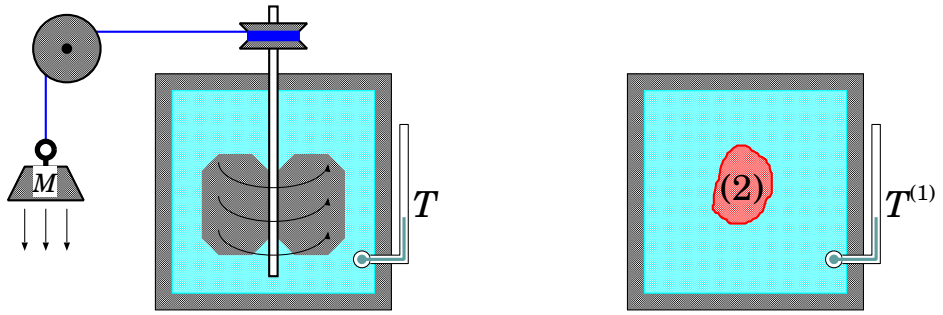


Figura 20.12: *Misure di capacità. A sinistra: calorimetro a mulinello per misurare la capacità termica di un liquido. A destra: calorimetro delle mescolanze, per misurare la capacità termica di un oggetto (2) immerso in un liquido (1).*

Quindi la variazione ΔT è collegata alla variazione di energia interna, ΔE, a prescindere da come questa è realizzata. Il primo principio della termodinamica ci dice che

$$\Delta E = \Delta Q + \Delta \mathcal{W}_{est}$$

In assenza di lavoro esterno,

$$C = \frac{\Delta E}{\Delta T}$$

Ora, immaginiamo di sostituire lo scambio di calore ΔQ (non misurabile) con un lavoro esterno, fatto da forze di attrito, $\Delta \mathcal{W}_{attr}$; in questo modo $\Delta E = \Delta \mathcal{W}_{attr}$ e quindi:

$$C = \frac{\Delta \mathcal{W}_{attr}}{\Delta T}$$

che risulta calcolabile, poiché sia ΔT che $\Delta \mathcal{W}_{attr}$ sono misurabili.

Consideriamo l'apparato indicato in Fig. 20.12, a sinistra. La massa M, inizialmente posta ad un'altezza h, viene lasciata cadere, azionando un mulinello che viene frenato dalle forze di attrito del liquido. Per calcolare il lavoro dell'attrito, $\Delta \mathcal{W}_{attr}$, è sufficiente misurare la velocità finale v_{fin} della massa M e lavorare sull'energia meccanica della massa M. L'energia potenziale iniziale, Mgh, anziché convertirsi completamente in energia cinetica finale $\frac{M}{2}v_{fin}^2$, viene in parte dissipata in attriti sul liquido, quindi:

$$\Delta \mathcal{W}_{attr} = Mgh - \frac{M}{2}v_{fin}^2$$

Ne segue che l'energia interna del liquido aumenta di:

$$\Delta E^{liquido} = \mathcal{W}_{attr} = Mgh - \frac{M}{2}v_{fin}^2$$

Nello stesso tempo, il termometro misura una variazione di temperatura ΔT del liquido. Pertanto si può misurare la capacità termica del liquido, come:

$$C^{liquido} = \frac{\Delta E}{\Delta T} = \frac{Mgh - \frac{M}{2}v_{fin}^2}{\Delta T}$$

Come si vede, tutte le quantità (M, h, v_{fin}, ΔT) sono direttamente misurabili, quindi $C^{liquido}$ è calcolabile. Poi, conoscendo la massa m del liquido, si può risalire al calore specifico $c^{liquido} = \dfrac{C^{liquido}}{m}$.

In questa maniera si può misurare

$$c^{\mathrm{H_2O}} = 4186 \text{ JK}^{-1}\text{kg}^{-1}$$

Misure di capacità termiche per confronto

In generale, le misure di capacità termiche si effettuano ponendo in contatto termico due oggetti a temperature diverse ed aspettando che essi si portino alla stessa temperatura. In particolare, si può scegliere un liquido (1) la cui capacità termica $C^{(1)}$ sia nota (per esempio l'acqua, come spiegato precedentemente), ed immergervi un oggetto (2) di cui si vuole determinare la capacità termica $C^{(2)}$. L'apparato è illustrato nella Fig. 20.12, a destra.

Si misurano le temperature iniziali $T^{(1)}$ del liquido e $T^{(2)}$ dell'oggetto, quindi si immerge l'oggetto e si osserva la temperatura del liquido, aspettando che si stabilizzi su un nuovo valore finale T^{fin}. Quando non cambia più, possiamo essere certi che anche la temperatura dell'oggetto ha raggiunto lo stesso valore. Durante questo processo, il liquido ha acquisito una quantità di calore

$$\Delta Q^{(1)} = C^{(1)} \left(T^{fin} - T^{(1)}\right)$$

che è calcolabile — poiché $C^{(1)}$ è nota. Nello stesso tempo, l'oggetto ha scambiato una quantità di calore

$$\Delta Q^{(2)} = C^{(2)} \left(T^{fin} - T^{(2)}\right)$$

Ora deve essere $\Delta Q^{(1)} = -\Delta Q^{(2)}$, quindi possiamo calcolare

$$C^{(2)} = -\frac{\Delta Q^{(1)}}{T^{fin} - T^{(2)}} = C^{(1)}\frac{T^{fin} - T^{(1)}}{T^{(2)} - T^{fin}}$$

Conoscendo la massa $m^{(2)}$ dell'oggetto, si risale al suo calore specifico $c^{(2)} = \dfrac{C^{(2)}}{m^{(2)}}$.

Riportiamo nella seguente tabella alcuni valori di calori specifici.

Materiale	Calore specifico a pressione costante ($\mathrm{J\,K^{-1}\,kg^{-1}}$)
Piombo	128
Tungsteno	134
Rame	386
Alluminio	880
Acciaio	502
Ferro	444
Ottone	377
Vetro	840
Granito	790
Diamante	502
Grafite	720
Ghiaccio	2220
Acqua	4186
Acqua di mare	3900
Alcool etilico	2430
Mercurio	139
Anidride carbonica	838
Aria (secca)	1005
Aria (umidità 100%)	1030
Azoto	1042
Ossigeno	920
Idrogeno	14435
Elio	5190

20.9.3 Capacità termica di un gas rarefatto

Per un gas rarefatto l'energia interna è $E = \dfrac{\nu}{2} NkT$, pertanto la capacità termica a volume costante è:

$$C_V = \frac{\nu}{2} Nk \qquad \text{(gas rarefatti)} \tag{20.53}$$

Ora ricordiamo l'equazione di stato, $PV = NkT$. La dilatazione a pressione costante è data ovviamente da $dV = \dfrac{Nk}{P} dT$. Esprimendo

$\dfrac{Nk}{P} = \dfrac{V}{T}$, si trova

$$dV = \frac{V}{T} dT \qquad \text{(gas rarefatti, dilatazione a pressione costante)}$$

e quindi per confronto

$$\alpha_V = \frac{1}{T}$$

Quindi, sempre dall'equazione di stato, $\alpha_V PV = Nk$. Pertanto, la capacità termica a pressione costante è:

$$C_P = \left(\frac{\nu}{2} + 1\right) Nk \qquad \text{(gas rarefatti)} \qquad (20.54)$$

Si noti che C_V, C_P dipendono dalla natura del gas, attraverso i "gradi di libertà" ν della molecola: dunque, molecole più complesse (biatomica, triatomica), hanno capacità termiche più elevate rispetto ai gas monoatomici. Questo fatto si capisce se consideriamo che la temperatura è legata all'energia cinetica traslazionale delle molecole, mentre l'energia interna contiene anche l'energia cinetica di rotazione delle molecole. Poiché questi contributi si equipartiscono, a causa degli urti fra molecole, per un dato aumento di temperatura occorre produrre un aumento di energia cinetica traslazionale (sempre lo stesso) ma anche un aumento di energia cinetica rotazionale, che è maggiore per le molecole più complesse.

Invece, la differenza tra capacità termica a pressione costante e a volume costante è indipendente dalla natura del gas:

$$C_P - C_V = Nk \qquad \text{(gas rarefatti)} \qquad (20.55)$$

Per i gas, si è soliti definire anche il *calore molare*: è simile al calore specifico, solo che anziché riferito ad una massa unitaria, viene riferito ad *una mole di molecole*, $N = N_A$. Sicome $N_A k = R$, il calori molari di un gas a volume costante e a pressione costante risultano essere:

$$\begin{aligned} C_V^{mol} &= \frac{\nu}{2} R \\ C_P^{mol} &= \left(\frac{\nu}{2} + 1\right) R \end{aligned} \qquad \text{(gas rarefatti)} \qquad (20.56)$$

Esercizio 20.2. *Utilizzando le formule dei calori molari, si calcolino i calori specifici a pressione costante dei gas* O_2, N_2, H_2, He, H_2O, CO_2, *e si confrontino i risultati con quelli sperimentali mostrati nella Sezione 20.9.2.*

Risposta. *Il calore molare a pressione costante è* $C_P^{mol} = \left(\frac{\nu}{2}+1\right) R$. *Per passare al calore specifico, occorre conoscere il peso molecolare,* m, *di ciascun gas. Una massa* M *di gas contiene un numero di moli* $n = \frac{M}{m\,N_A}$, *pertanto la sua capacità termica è* $C_P = n\,C_P^{mol} = \left(\frac{\nu}{2}+1\right) R \cdot \frac{M}{m\,N_A}$ *e il suo calore specifico* $c_P = \frac{C_P}{M} = \left(\frac{\nu}{2}+1\right) \cdot \frac{R}{m\,N_A} = \left(\frac{\nu}{2}+1\right) \frac{k}{m}$. *Quindi, costruiamo una tabella come segue:*

Gas	ν	m (u.a.)	m (kg)	c_P (K/(K kg))		$\Delta(\%)$
O_2	5	32	$5.312 \cdot 10^{-26}$	910	*(920)*	-1%
N_2	5	28	$4.648 \cdot 10^{-26}$	1040	*(1042)*	-0.2%
H_2	5	2	$0.332 \cdot 10^{-26}$	14559	*(14435)*	$+0.9\%$
He	3	4	$0.664 \cdot 10^{-26}$	5200	*(5190)*	$+0.2\%$
H_2O	6	18	$2.988 \cdot 10^{-26}$	1848	*(1940)*	-5%
CO_2	6	44	$7.304 \cdot 10^{-26}$	756	*(838)*	-10%

Il valore sperimentale è indicato fra parentesi nella penultima colonna. L'accordo fra previsione e misura (ultima colonna, espresso in %) è ottimo per quasi tutti i gas, tranne per le molecole triatomiche, specialmente per l'anidride carbonica.

20.9.4 Capacità termica di un solido

Abbiamo visto nella Sezione 20.4.1 che per molti solidi vale la relazione

$$E = 3NkT \qquad \text{(solidi di Dulong-Petit)}$$

pertanto la capacità termica di questi solidi è

$$C = 3Nk \qquad \text{(solidi di Dulong-Petit)} \tag{20.57}$$

e il calore molare ($N = N_A$) risulta:

$$C^{mol} = 3R \qquad \text{(solidi di Dulong-Petit)} \tag{20.58}$$

Esercizio 20.3. *Usando la formula di Dulong-Petit, si calcolino i calori specifici a pressione costante dei seguenti materiali solidi: piombo, tungsteno, rame, alluminio, ferro, vetro, granito, diamante, grafite, ghiaccio. Si confrontino i risultati con i valori sperimentali della tabella in Sezione 20.9.2. Si commenti qualitativamente il valore sperimentale per l'acciaio (lega di ferro e carbonio, max 1%).*

Soluzione. *La formula di Dulong-Petit tratta moli di atomi, che sono considerati puntiformi. Per i metalli semplici, dalla formula del calore molare*

$C^{mol} = 3R$, si può passare al calore specifico se si conosce la massa atomica m: basta usare $c = \dfrac{C^{mol}}{N_A\, m} = \dfrac{3k}{m}$. Per il diamante e la grafite, si può usare la massa atomica del carbonio. Per materiali composti, si può tentare di usare una media pesata delle masse atomiche degli elementi costituenti. La molecola del ghiaccio è formata da 2 atomi di idrogeno ($m_{\mathrm{H}} = 1$ u.a.) e 1 di ossigeno ($m_{\mathrm{O}} = 16$ u.a.), pertanto si potrebbe assumere $m_{ghiaccio} = \dfrac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 16}{3} = 6$ u.a.. Il vetro comune è ottenuto fondendo diossido di silicio ($\mathrm{SiO_2}$) e poi facendolo solidificare in tempi troppo rapidi perché si formi la struttura cristallina. Anche qui, possiamo assumere una massa atomica media: essendo $m_{\mathrm{Si}} = 28$ u.a. troviamo $m_{vetro} = \dfrac{1 \cdot 28 + 2 \cdot 16}{3} = 20$ u.a.. Il granito è ancora più complicato, trattandosi di una miscela di diverse molecole, di cui prevalentemente $\mathrm{SiO_2}$ al 74% e $\mathrm{Al_2O_3}$ al 14%. La massa atomica media di $\mathrm{Al_2O_3}$ è $m_{\mathrm{Al_2O_3}} = \dfrac{2 \cdot 27 + 3 \cdot 16}{5} = 20.4$ u.a. — praticamente identica a quella di $\mathrm{SiO_2}$. Trascurando i composti minori del granito, possiamo assumere una massa atomica media $m_{granito} = 20$ u.a.. Proviamo a vedere che succede ...

Materiale	m (u.a.)	m (kg)	c_P (K/(K kg))		Δ(%)
Piombo (Pb)	207	$3.436 \cdot 10^{-25}$	120	(128)	−6%
Tungsteno (W)	184	$3.054 \cdot 10^{-25}$	136	(134)	+1.5%
Rame (Cu)	64	$1.062 \cdot 10^{-25}$	390	(386)	+1.0%
Alluminio (Al)	27	$0.448 \cdot 10^{-25}$	924	(880)	+5%
Ferro (Fe)	56	$0.930 \cdot 10^{-25}$	445	(444)	+0.2%
Vetro ($\mathrm{SiO_2}$)	20	$0.332 \cdot 10^{-25}$	1247	(840)	+48%
Granito ($\mathrm{SiO_2}$, $\mathrm{AL_2O_3}$)	20	$0.332 \cdot 10^{-25}$	1247	(790)	+58%
Diamante (C)	12	$0.199 \cdot 10^{-25}$	2078	(502)	—
Grafite (C)	12	$0.199 \cdot 10^{-25}$	2078	(720)	—
Ghiaccio ($\mathrm{H_2O}$)	6	$0.100 \cdot 10^{-25}$	4157	(2220)	—

Il valore sperimentale è indicato fra parentesi nella penultima colonna. L'accordo fra previsione e misura è espresso il % nell'ultima colonna.

Commenti. *L'accordo fra la previsione di Dulong-Petit e il dato sperimentale è buono (in alcuni casi ottimo!) per i metalli con massa atomica elevata. È invece decisamente errato per la grafite e il diamante: la ragione sta nella massa atomica, molto piccola, e nel forte legame fra gli atomi. Questo fatto viene approfondito nella Sezione 20.12.3. Anche per i materiali composti considerati, la previsione di Dulong-Petit non è applicabile.*

20.10 Calori latenti

Finora abbiamo associato uno scambio di calore δQ di un sistema con l'ambiente, ad una variazione dT del sistema stesso.

Ci sono situazioni in cui invece la temperatura non cambia, ma si modifica invece lo stato fisico del sistema: è il caso in cui un materiale passa dallo stato solido allo stato liquido, o a quello gassoso. In tali situazioni, lo scambio di calore è evidente dalla variazione di temperatura dell'ambiente circostante, oppure di un altro materiale posto a contatto.

Facciamo alcuni esempi.

Esempio: acqua in ebollizione

Una pentola d'acqua viene messa sul fuoco, e nell'acqua è immerso un termometro. La temperatura dell'acqua cresce, fino a raggiungere 100° C (gradi Celsius), poi si stabilizza e a questo punto l'acqua comincia a bollire. Sappiamo che il fuoco cede calore all'acqua: il fatto è manifesto, dal fatto che prima di bollire la temperatura dell'acqua aumentava, dunque anche la sua energia interna aumentava, mentre su di essa non veniva fatto lavoro. Quindi questo aumento doveva essere causato da un trasferimento di calore. Quando l'acqua comincia a bollire, la temperatura non aumenta più, eppure il fuoco resta acceso, quindi continua a trasferire calore, cioè a cedere energia. Dove va questa energia? Nel frattempo si osserva che parte dell'acqua forma le bolle, ovvero passa dallo stato liquido allo stato gassoso.

Esempio: ghiaccio fondente

L'esempio precedente può essere ripreso usando un blocco di ghiaccio viene preso dal freezer e messo in una pentola sul fuoco. Inizialmente la temperatura del ghiaccio era quella del freezer (diciamo $-18°C$). Dopo un po' di tempo il ghiaccio comincia a fondere e nella pentola si raccoglie dell'acqua. La temperatura dell'acqua e del ghiaccio residuo a contatto con essa viene misurata e risulta $0°C$. Poi la temperatura resta stabile a questo valore (mentre il fuoco resta acceso) finché tutto il ghiaccio si è sciolto. Solo quando non c'è più ghiaccio, la temperatura dell'acqua comincia a salire. Anche qui, sappiamo che il fuoco cede calore, ma quando acqua e ghiaccio coesistono, la loro temperatura non cambia.

In entrambi gli esempi fatti, il sistema riceve energia (sotto forma di calore) ma la sua temperatura non cambia. Invece, parte del sistema passa da solido a liquido, oppure da liquido a gassoso.

Il processo può anche essere invertito. Per esempio, se si prende un recipiente pieno d'acqua e lo si mette nel freezer, e si misura la temperatura nel tempo, si osserva che essa scende dal valore ambientale fino ad arrivare a 0°C, poi parte dell'acqua comincia a ghiacciare ma la temperatura non

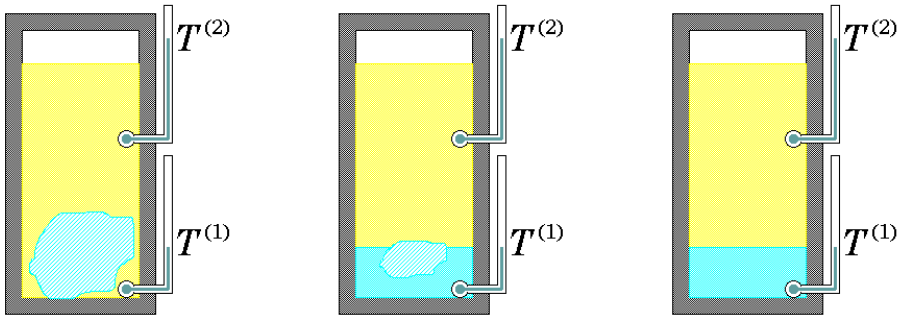


Figura 20.13: *Esperimento del ghiaccio che si scioglie nell'olio.*

cambia più, fino a che tutta l'acqua si è ghiacciata, e solo allora la temperatura ricomincia a scendere.

Consideriamo ora un esperimento un po' più quantitativo.

Esperimento: ghiaccio fondente

Un blocco di ghiaccio (sistema (1)) viene immerso in olio caldo (sistema (2)) per del tempo. Dopo un po' di tempo si osserva che parte del ghiaccio si è sciolto, formando acqua che si deposita sul fondo (acqua e olio non si mescolano). Il tutto è immerso in un recipiente isolato dotato di due termometri: uno misura la temperatura $T^{(1)}$ dell'acqua sul fondo, l'altro la temperatura $T^{(2)}$ dell'olio.

Svolgimento e osservazioni. *Ora descriviamo che cosa succede durante l'esperimento, aiutandoci con la Fig. 20.13.*

Da quando viene immerso il ghiaccio, la temperatura dell'olio $T^{(2)}$ diminuisce ("l'olio si raffredda"). Interpretiamo questo dicendo che, essendo l'olio a temperatura maggiore del ghiaccio, gli cede energia sotto forma calore.

Dopo un certo tempo, il ghiaccio comincia a fondere, e sul fondo si accumula acqua, la cui temperatura $T^{(1)}$ viene misurata. Si osserva che, durante la fusione del ghiaccio, $T^{(2)}$ continua a diminuire, mentre invece $T^{(1)}$ resta costante a $0°\mathrm{C} = 273.15$ K. Il calo di $T^{(2)}$ indica che l'olio continua a cedere calore al ghiaccio. Chiamando $C^{(2)}$ la capacità termica dell'olio, possiamo quantificare il calore scambiato attraverso la variazione di temperatura dell'olio: $\Delta Q^{(1)} = -\Delta Q^{(2)} = -C^{(2)}\Delta T^{(2)}$ La variazione di temperatura $\Delta T^{(2)}_{fusione}$ che avviene fra l'inizio e la fine della fusione del ghiaccio permette di calcolare quanta energia è stata ceduta al ghiaccio.

$$\Delta Q^{(1)}_{fusione} = -C^{(2)}\Delta T^{(2)}_{fusione}$$

Inoltre, si osserva sperimentalmente che $\Delta T^{(2)}_{fusione}$ è direttamente proporzionale

alla massa $m^{(1)}$ del ghiaccio iniziale:

$$\Delta T^{(2)}_{fusione} = -K m^{(1)}$$

La costante di proporzionalità K che abbiamo introdotto ha un significato puramente empirico, al momento, ma è comunque misurabile. Da questa vorremmo estrarre qualche informazione più fondamentale. Possiamo ricavare l'energia necessaria per sciogliere una massa unitaria di ghiaccio:

$$\lambda_F \;=\; \frac{\Delta Q^{(1)}_{fusione}}{m^{(1)}} \;=\; -\frac{C^{(2)}\Delta T^{(2)}_{fusione}}{m^{(1)}} \;=\; K\,C^{(2)}$$

Quando il ghiaccio si è fuso completamente, la temperatura $T^{(1)}$ dell'acqua comincia a salire, intanto che la temperatura $T^{(2)}$ dell'olio continua a scendere. Questo è comprensibile, in termini di capacità termica dell'acqua: $C^{(1)}\Delta T^{(1)} = \Delta Q^{(1)} = -\Delta Q^{(2)} = -C^{(2)}\Delta T^{(2)}$ Incidentalmente, misurando $\Delta T^{(1)}$ e $\Delta T^{(2)}$, e conoscendo la capacità termica dell'acqua, $C^{(1)} = m^{(1)}c^{(1)} = m^{(1)} \cdot (4186\ \mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}})$, si può risalire alla capacità termica $C^{(2)}$, dell'olio, necessaria al calcolo di λ_F.

Conclusione. *Da questo esperimento si impara che per fondere il ghiaccio è necessario somministrare energia, e che questa non si manifesta in un aumento di temperatura. È inoltre possibile* misurare *questa energia, in particolare per unità di massa di ghiaccio che si fonde. La quantità λ_F così introdotta si chiama "calore latente di fusione".*

Occorre ricordare che in un sistema denso (liquido o solido), l'energia interna ha una componente cinetica e una potenziale: quest'ultima deriva dalle interazioni fra atomi e molecole del sistema stesso. Nei solidi, i costituenti sono legati fra loro più strettamente che nei liquidi, pertanto la loro energia potenziale è minore nei solidi. Nei gas l'energia potenziale può essere considerata nulla, perché non ci sono interazioni, se non durante gli urti. Schematicamente possiamo scrivere

$$\langle \mathcal{U} \rangle^{(solido)} \;<\; \langle \mathcal{U} \rangle^{(liquido)} \;<\; \langle \mathcal{U} \rangle^{(gas)} \;\equiv\; 0$$

Quando il ghiaccio si fonde, parte delle molecole che prima erano legate nella fase solida passano alla fase liquida, quindi sono meno legate di prima. Questo significa che l'energia potenziale aumenta, e così anche l'energia interna. Analogamente, quando l'acqua bolle, parte delle molecole passa alla fase gassosa, e quindi si slega completamente, aumentando ancora l'energia interna.

Questa situazione non può essere descritta attraverso le capacità termiche, perché non c'è variazione di temperatura. Si introducono invece i *calori latenti*.

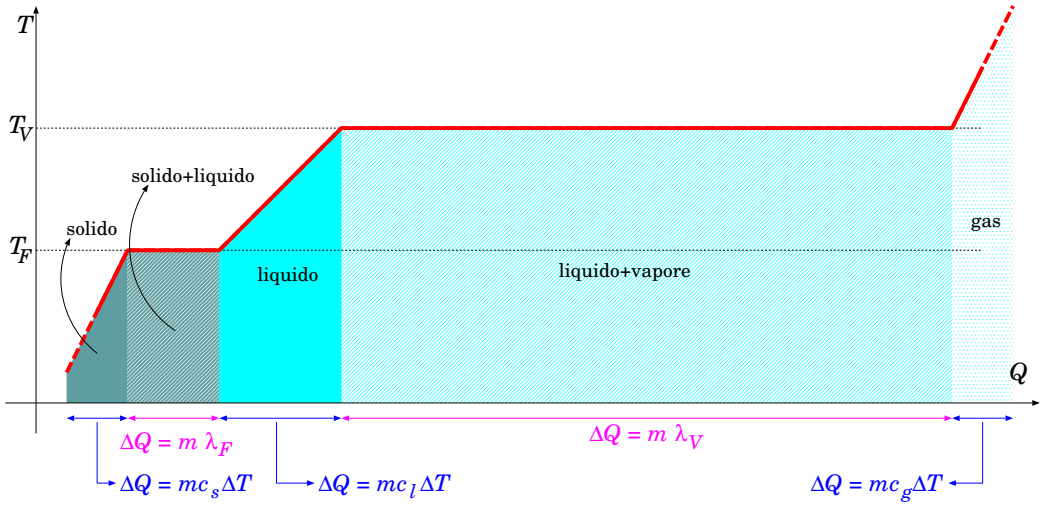


Figura 20.14: *Variazione della temperatura durante la cessione di calore ad una sostanza: le parti di curva che sale si riferiscono al riscaldamento di una fase omogenea (solida, liquida, gassosa), mentre i tratti orizzontali descrivono la fusione e la vaporizzazione.*

Il *calore latente di fusione* λ_F è la quantità di calore ΔQ necessaria per fare passare una massa unitaria (1 kg) di materiale dallo stato solido allo stato liquido.

Analogamente, il *calore latente di vaporizzazione* λ_V è la quantità di calore ΔQ necessaria per fare passare una massa unitaria (1 kg) di materiale dallo stato liquido allo stato gassoso.

Se immaginiamo di prendere una sostanza solida di massa m e di cederle calore, possiamo dividere il processo in 5 parti, come schematizzato nella Fig. 20.14.

(1) Inizialmente il solido si scalda: la sua temperatura aumenta secondo la legge:

$$dT = \frac{\delta Q}{C^{solido}} = \frac{\delta Q}{m\,c^{solido}} \qquad \text{(riscaldamento del solido)}$$

Il processo va avanti finché parte del solido comincia a fondere.

(2) Quando è iniziata la fusione, la temperatura si stabilizza. Il calore assorbito ha l'effetto di far passare sempre più materiale dalla fase solida alla fase liquida. La quantità di massa che si fonde è data dalla

relazione:

$$dm^{fusione} = \frac{\delta Q}{\lambda_F} \qquad \text{(fusione del solido)}$$

Il processo continua finché resta del materiale nella fase solida.

(3) Quando tutto il materiale si è fuso, un'ulteriore somministrazione di calore fa aumentare la temperatura del liquido, secondo la legge:

$$dT = \frac{\delta Q}{C^{liquido}} = \frac{\delta Q}{m\, c^{liquido}} \qquad \text{(riscaldamento del liquido)}$$

Il processo va avanti finché parte del liquido comincia a bollire.

(4) Quando è iniziata l'ebollizione, la temperatura si stabilizza di nuovo. Il calore assorbito ha l'effetto di far passare sempre più materiale dalla fase liquida alla fase gassosa. La quantità di massa che si vaporizza è data dalla relazione:

$$dm^{vaporizzazione} = \frac{\delta Q}{\lambda_V} \qquad \text{(vaporizzazione del liquido)}$$

Il processo continua finché resta del materiale nella fase liquida.

(5) Dopo che tutto il materiale è passato allo stato gassoso, una ulteriore somministrazione di calore fa aumentare la temperatura del gas, secondo la legge:

$$dT = \frac{\delta Q}{C^{gas}} = \frac{\delta Q}{m\, c^{gas}} \qquad \text{(riscaldamento del gas)}$$

Il fatto che durante la fusione e l'ebollizione la temperatura sia costante, è di grande utilità pratica, perché consente di costruire *termostati*, ovvero sistemi a temperatura costante. Il fatto che le scale termometriche siano tarate sul ghiaccio fondente (0°C) e sull'acqua bollente (100°C) è un esempio notevole.

Riportiamo nella tabella che segue le temperature di fusione e di ebollizione e i rispettivi calori latenti di alcune sostanze.

sostanza	fusione		ebollizione	
	temp. (K)	cal. lat. (kJ/kg)	temp. (K)	cal. lat. (kJ/kg)
Idrogeno	14.15	58	20.15	455
Elio	3.45	1.25	4.22	21
Ossigeno	54	13.9	90	213
Azoto	63	25.7	77	200
Acqua	273.15	333.5	373.16	2272
Alcool etilico	159	108	351.4	855
Mercurio	234	11	630	294
Alluminio	933	327	2743	10500
Ferro	1811	247	3134	6070
Tungsteno	3695	192	6203	4200
Rame	1356	207	2868	4730
Zolfo	388	54	718	1406

20.11 Esercizi

Esercizio 20.4. *Un volume di* $1\ \mathrm{m}^3$ *di azoto si trova inizialmente alla pressione di 1 Atm e alla temperatura di 25 °C, quindi viene compresso in maniera adiabatica fino a che il suo volume si sia dimezzato. Calcolare l'energia interna prima e dopo la compressione. Quanto vale la temperatura finale?*

Risposta. *L'energia interna è legata alla temperatura da* $E = \frac{\nu}{2}NkT$, *essendo* $\nu = 5$ *per l'azoto. Il numero di molecole* N *non è dato, ma si ricava dall'equazione di stato,* $PV = NkT$, *quindi* $E = \frac{\nu}{2}PV$. *Poiché all'inizio* $P^{in} = 101\,325$ Pa *e* $V^{in} = 1\ \mathrm{m}^3$, *si trova*

$$E^{in} = \frac{\nu}{2}P^{in}V^{in} = 2.533 \cdot 10^5\ \mathrm{J}$$

La trasformazione adiabatica è tale che PV^γ *resta costante, con* $\gamma = \frac{\nu+2}{\nu} = \frac{7}{5} = 1.4$. *Poiché* $V^{fin} = \frac{V^{in}}{2} = 0.5\ \mathrm{m}^3$, *si ottiene* $P^{fin} = P^{in}\left(\frac{V^{in}}{V^{fin}}\right)^\gamma = 2.674 \cdot 10^5$ Pa. *L'energia interna finale si calcola sempre con la stessa formula:*

$$E^{fin} = \frac{\nu}{2}P^{fin}V^{fin} = 3.343 \cdot 10^5\ \mathrm{J}$$

Da questa calcoliamo T^{fin}: *deve essere* $\frac{E^{fin}}{E^{in}} = \frac{T^{fin}}{T^{in}}$, *con* $T^{in} = (25+273.15)\ \mathrm{K} = 298.15\ \mathrm{K}$. *Quindi:*

$$T^{fin} = \frac{E^{fin}}{E^{in}}T^{in} = 393.50\ \mathrm{K} = 120.35°\mathrm{C}$$

Esercizio 20.5. *Un volume di 1 ℓ di gas Argon (gas monoatomico) si trova inizialmente alla pressione atmosferica e a temperatura di 15° C, quindi viene posto a contatto con una sorgente di calore, fino a che la sua pressione è diventata pari a* 150 kPa*, mentre il suo volume rimane costante. Qual è la sua temperatura finale? Quanto calore ha assorbito dalla sorgente?*

Risposta. *La legge dei gas, $PV = NkT$, a volume costante, ci dice che $\Delta P V = Nk\Delta T$. Pertanto, $\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta T}{T}$. La variazione di pressione è $\Delta P = (1.5 - 1.01325) \cdot 10^5$ Pa $= 4.8675 \cdot 10^4$ Pa. La temperatura iniziale è $T^{in} = (15 + 273.15)$ K $= 288.15$ K. Pertanto, la temperatura finale è:*

$$\begin{aligned} \Delta T &= T^{in}\frac{\Delta P}{P^{in}} = 138.43 \text{ K} \\ T^{fin} &= T^{in} + \Delta T = T^{in}\left(1 + \frac{\Delta P}{P^{in}}\right) = 426.59 \text{ K} = 153.44°\text{C} \end{aligned}$$

Per trovare il calore assorbito, utilizziamo la prima legge della termodinamica: $\Delta E = \Delta Q - \Delta \mathcal{W}$, dove nel nostro caso $\Delta \mathcal{W} = 0$ perché non c'è variazione di volume. Occorre quindi valutare $\Delta E = \frac{\nu}{2} Nk\Delta T$. Per l'argon, $\nu = 3$. Inoltre, $Nk = \frac{PV}{T}$, quindi dalle condizioni iniziali:

$$\Delta Q = \Delta E = \frac{\nu}{2}\frac{P^{in}V^{in}}{T^{in}}\Delta T = 73.01 \text{ J}$$

Esercizio 20.6. *Lo stesso volume di Argon dell'esercizio precedente, con le stesse condizioni iniziali, viene tenuto a pressione costante e lasciato espandere, mentre gli viene ceduta la stessa quantità di calore. Che temperatura e che volume raggiunge?*

Risposta. *Al contrario del caso precedente, qui il gas si espande, quindi compie un lavoro $\Delta \mathcal{W} = P\,\Delta V$. Inoltre, a pressione costante, $Nk\Delta T = P\Delta V$, quindi $\Delta E = \frac{\nu}{2} Nk\Delta T = \frac{\nu}{2} P\Delta V$. Si deduce che $\Delta Q = \Delta E + \Delta \mathcal{W} = \left(\frac{\nu}{2} + 1\right) P\Delta V$, da cui:*

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{2}{(\nu+2)P}\Delta Q = 2.88 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = 0.288 \ \ell \\ V^{fin} &= V^{in} + \Delta V = 1.29 \ \ell \end{aligned}$$

La temperatura finale si ricava da $PV = NkT$ e, a pressione costante, $P\Delta V = Nk\Delta T$, da cui:

$$\begin{aligned} \Delta T &= T^{in}\frac{\Delta V}{V^{in}} = 82.99 \text{ K} \\ T^{fin} &= T^{in} + \Delta T = 371.7 \text{ K} = 97.99°\text{C} \end{aligned}$$

Osservazione. *Rispetto all'esercizio precedente, l'aumento di temperatura è minore: la ragione è che parte dell'energia assorbita come calore è stata convertita in lavoro.*

Esercizio 20.7. *Quanto calore è necessario estrarre da* $1\ \mathrm{m}^3$ *di* CO_2 *che si trova inizialmente a pressione atmosferica, affinché la sua temperatura passi da 25° C a 0° C, mentre il suo volume resta costante? Come cambia il risultato, se invece si mantiene costante la pressione?*

Risposta. *Si possono usare le capacità termiche a volume e a pressione costante,* $C_V = \frac{\nu}{2}Nk$ *e* $C_P = \left(\frac{\nu}{2}+1\right)Nk$. *Per le molecole triatomiche* $\nu = 6$. Nk *si può ricavare dall'equazione di stato:* $Nk = \frac{P^{in}V^{in}}{T^{in}} = 339.8$ K. *Quindi:*

$$\begin{aligned}
[\Delta Q]_V &= C_V\,\Delta T = 3Nk\Delta T = -2.549\cdot 10^4\ \mathrm{J} \\
[\Delta Q]_P &= C_P\,\Delta T = 4Nk\Delta T = -3.398\cdot 10^4\ \mathrm{J}
\end{aligned}$$

Esercizio 20.8. *200 g di zuppa di verdura bollente (100° C) viene versata in una scodella a temperatura ambiente (20° C). La scodella si scalda, fino a essersi termalizzata con la zuppa alla temperatura* T_{fin}. *Trattando la zuppa come se fosse acqua (stesso calore specifico), la scodella come un oggetto di massa 450 g e calore specifico 1000 J/(kg K), e trascurando la dispersione di calore nell'aria, quanto vale* T_{fin}*?*

Risposta. *Chiamiamo (1) la zuppa e (2) la scodella. Il calore* ΔQ *ceduto dalla zuppa alla scodella vale:*

$$C^{(1)}\left(T^{(1)}_{in} - T_{fin}\right) = \Delta Q = C^{(2)}\left(T_{fin} - T^{(2)}\right)$$

essendo $C^{(1)} = m^{(1)}c^{(1)} = (0.2\ \mathrm{kg})(4186\ \mathrm{JK^{-1}kg^{-1}}) = 837.2$ J/K *e* $C^{(2)} = m^{(2)}c^{(2)} = (0.45\ \mathrm{kg})(1000\ \mathrm{JK^{-1}kg^{-1}}) = 450$ J/K. *Si ricava quindi:*

$$T_{fin} = \frac{C^{(1)}T^{(1)}_{in} + C^{(2)}T^{(2)}_{in}}{C^{(1)} + C^{(2)}} = 72.03°\mathrm{C}$$

Osservazione. *In questo esercizio non ci siamo preoccupati di scrivere le temperature in gradi Kelvin. La ragione è che in questo problema solo le variazioni* ΔT *sono importanti.*

Esercizio 20.9. *La zuppa a* 70°C *dell'esercizio precedente "fuma", ovvero parte di essa evapora. Quanta parte di essa deve evapoarre, affinché quella che rimane sia alla temperatura di* 30°C*?*

Risposta. *Quando una massa dm passa dallo stato liquido a quello gassoso, sottrae una quantità di calore* $\delta Q = \lambda_V dm$ *alla fase liquida, la quale quindi si raffredda, secondo l'equazione* $dT = \frac{\delta Q}{m\,c} = \frac{\lambda_V}{c}\frac{dm}{m}$. *Occorre quindi integrare questa equazione, dalla temperatura iniziale* T^{in} *a quella finale* T^{fin}*:*

$$\begin{aligned}
\Delta T = T^{fin} - T^{in} &= \int_{T^{in}}^{T_{fin}} dT = \frac{\lambda_V}{c}\int_{m^{in}}^{m_{fin}} \frac{dm}{m} = \frac{\lambda_V}{c}\ln\left(\frac{m_{fin}}{m_{in}}\right) \\
m_{fin} &= m_{in}\cdot \mathrm{e}^{\frac{c}{\lambda_V}\Delta T}
\end{aligned}$$

Trattando la zuppa come fosse acqua, $c = 4186$ J/(K kg) *e* $\lambda_V = 2.272 \cdot 10^6$ J/kg. *Essendo* $\Delta T = -40$ K, *si ricava* $m_{fin} = m_{in} \cdot 0.93 = 0.186$ kg. *Quindi devono evaporare* 14 g *di acqua.*

Esercizio 20.10. *Una pentola con* 5 ℓ *di acqua a una temperatura iniziale di* 20°C *viene messa sul fuoco, e lasciata lì finché l'acqua non è evaporata tutta. Quanta energia ha ceduto il fornello? Se la potenza del fornello è di* 3 kW, *quanto tempo impiega l'acqua a bollire? Quanto tempo occorre perché evapori tutta?*

Risposta. *L'acqua viene prima portata ad ebollizione, quindi evapora. La massa di acqua è* $m = 5$ kg, *quindi la sua capacità termica è* $C = cm = (4186 \text{ J/(K kg)})(5 \text{ kg}) = 20\,930$ J/K. *Per portare la temperatura da* 20°C *a* 100°C *è quindi necessaria un'energia pari a* $\Delta E_1 = C\,\Delta T = 1.6744 \cdot 10^6$ J. *L'energia per fare evaporare tutta l'acqua è* $\Delta E_2 = m \cdot \lambda_V = (5 \text{ kg})(2.272 \cdot 10^6 \text{ J/kg}) = 1.136 \cdot 10^7$ J. *L'energia totale spesa in tutto il processo è* $\Delta E_1 + \Delta E_2 = 1.303 \cdot 10^7$ J.

Chiamiamo $\mathcal{P} = 3000$ W *la potenza del fornello. Il tempo impiegato per portare a ebollizione l'acqua è* $\Delta t_1 = \dfrac{\Delta E_1}{\mathcal{P}} = 558 \text{ s} \simeq 9.3$ min. *Da quando inizia a bollire, occorre un tempo* $\Delta t_2 = \dfrac{\Delta E_2}{\mathcal{P}} = 3787 \text{ s} \simeq 1.05$ h *perché sia tutta evaporata.*

Esercizio 20.11. *Due cubetti di ghiaccio di massa* 5 g *ciascuno, a temperatura di* −18°C *vengono messi in una tazzina di caffé bollente (*20 g *di caffé a* 100°C*). Trascurando la capacità termica della tazzina, qual è la temperatura finale del caffé? Che cosa succede se si usano invece 5 cubetti?*

Risposta. *Trattiamo il caffé come acqua, e dividiamo il processo in 3 fasi.*

Fase 1. *Il caffé cede una quantità di calore* ΔQ_1 *al ghiaccio, per portarlo da* −18°C *a* 0°C. *Quindi* $\Delta Q_1 = m^{ghiaccio} c^{ghiaccio} \Delta T_1^{ghiaccio} = (0.01 \text{ kg})(2220 \text{ JK}^{-1}\text{kg}^{-1})(18 \text{ K}) = 399.6$ J. *La temperatura del caffé si abbassa di* $\Delta T_1^{caffe} = -\dfrac{\Delta Q_1}{m^{caffe} c^{acqua}} = -\dfrac{399.6 \text{ J}}{(0.02 \text{ kg})(4186 \text{ JK}^{-1}\text{kg}^{-1})} = -4.78$ K.

Fase 2. *Il ghiaccio si scioglie tutto, quindi assorbe un calore* $\Delta Q_2 = m^{ghiaccio} \lambda_F^{ghiaccio} = (0.01 \text{ kg})(3.335 \cdot 10^5 \text{ Jkg}^{-1}) = 3336$ J. *La temperatura del caffé si abbassa di* $\Delta T_2^{caffe} = -\dfrac{\Delta Q_2}{m^{caffe} c^{acqua}} = -\dfrac{3336 \text{ J}}{(0.02 \text{ kg})(4186 \text{ JK}^{-1}\text{kg}^{-1})} = -39.8$ K.

Fase 3. *Il ghiaccio ormai è sciolto, quindi abbiamo* 5 g *di acqua a* 0°C *e* 20 g *di caffé a* $(100 - 4.78 - 39.8)$°C $= 55.4$°C. *L'acqua a* 0°C *assorbe una quantità di calore* ΔQ_3 *per arrivare ad una temperatura finale* T_{fin}, *nello stesso tempo il caffé cede la stessa quantità di calore per arrivare alla stessa temperatura:*

$$m^{ghiaccio} c^{acqua} (T_{fin} - 0°\text{C}) \;=\; \Delta Q_3 \;=\; m^{caffe} c^{acqua} (55.4°\text{C} - T_{fin})$$

da cui:

$$T_{fin} = \frac{m^{ghiaccio}(0°\mathrm{C}) + m^{caffe}(55.4°\mathrm{C})}{m^{ghiaccio} + m^{caffe}} = 44.3°\mathrm{C}$$

Usando 5 cubetti, la massa totale del ghiaccio è $m^{ghiaccio} = 0.025$ g. *Quindi* ΔQ_1 *cresce di un fattore* $5/2$, *e così pure* $\Delta T_1 = -11.95°\mathrm{C}$. *Anche* ΔQ_2 *crescerebbe di un fattore* $5/2$, *e così pure farebbe* $\Delta T_2 = -99.5°\mathrm{C}$. *Quindi il calo totale della temperatura del caffé sarebbe* $\Delta T_1 + \Delta T_2 = -111°\mathrm{C}$. *Ma questo non è possibile, perché il caffé diventerebbe ad un certo punto più freddo del ghiaccio e continuerebbe a cedergli calore. Questo in pratica non può succedere. Ciò che invece accade è che quando il caffé raggiunge* $0°\mathrm{C}$ *si trova in equilibrio termico col ghiaccio fondente. Alla fine ci sarà il caffé, un po' annacquato, con un residuo di ghiaccio non sciolto.*

20.12 Temperatura ed energia interna (*)

20.12.1 Principio di equipartizione dell'energia

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto che un gas rarefatto possiede un'*energia interna*, data dalla totalità delle energie cinetiche molecolari, la cui manifestazione macroscopica è la *temperatura*

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{E}{N} = \frac{\nu}{2} kT \qquad \text{(gas rarefatti)}$$

Possiamo riformulare questo risultato nella forma seguente, che va sotto il nome di *principio di equipartizione dell'energia.*

In una sostanza che si trova a temperatura T, *ciascun costituente elementare (atomo o molecola) possiede un'energia media* $\langle E^{part} \rangle$ *pari a* $\frac{kT}{2}$ *per ogni grado di libertà.*

$$\langle E^{part} \rangle \equiv \frac{E}{N} = \nu \cdot \frac{kT}{2} \tag{20.59}$$

Questa formulazione non aggiunge nulla di nuovo a quanto già detto per i gas rarefatti, ma può essere estesa ad altri casi. Occorre in ogni caso contare in modo giusto i gradi di libertà per ciascun costituente elementare, *considerando solo le quantità che possono alterarne l'energia meccanica.*

Nelle sezioni seguenti, rivisitiamo alcuni casi già visti (gas monoatomico e biatomico) ed introduciamo il caso nuovo dei solidi.

20.12.2 Gas monoatomico

In un gas monoatomico rarefatto, l'unica energia meccanica è l'energia cinetica: $E^{part} \equiv \mathcal{E} = \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)$. I gradi di libertà ad essa collegati sono le tre componenti cartesiane della velocità, $v_x,\ v_y,\ v_z$, quindi $\nu = 3$. Il principio di equipartizione, Eq. (20.59), ci dice che

$$\left\langle E^{part} \right\rangle = \frac{3}{2}kT \qquad \text{(gas monoatomico)} \tag{20.60}$$

Fin qui, niente di nuovo...

20.12.3 Materiali solidi

Un materiale solido è costituito da atomi, ciascuno posto in una posizione ben precisa. Tale posizione è determinata dalle interazioni fra un particolare atomo con tutti gli atomi circostanti, quindi dalla risultante delle forze sull'i-esimo atomo prodotte dagli altri atomi k:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_i = \sum_k \vec{\boldsymbol{F}}_{ik}$$

Essendo tali forze di natura elettrica, esse sono conservative, quindi sono associabili ad un'energia potenziale:

$$\mathcal{U}_i(\vec{\boldsymbol{r}}_i) \;=\; \sum_k \mathcal{U}_{ik}(\vec{\boldsymbol{r}}_i;\vec{\boldsymbol{r}}_k) \qquad ; \qquad \vec{\boldsymbol{F}}_i(\vec{\boldsymbol{r}}_i) \;=\; -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\mathcal{U}_i(\vec{\boldsymbol{r}}_i)$$

La posizione di equilibrio dell'atomo i-esimo è definita dal punto $\vec{\boldsymbol{r}}_i^{eq}$ in cui $\vec{\boldsymbol{F}}_i(\vec{\boldsymbol{r}}_i^{eq}) = 0$, ovvero in cui l'energia potenziale $\mathcal{U}_i(\vec{\boldsymbol{r}}_i)$ ha un minimo. Abbiamo visto nella Sezione 14.3 che in prossimità di un minimo, l'energia potenziale può sempre essere approssimata come un paraboloide (vd Eq. (14.6)):

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(x_i, y_i, z_i) \;\simeq\; & \mathcal{U}(x_i^{eq}, y_i^{eq}, z_i^{eq}) \\
& + \frac{k_x}{2}\left(x_i - x_i^{eq}\right)^2 \\
& + \frac{k_y}{2}\left(y_i - y_i^{eq}\right)^2 \\
& + \frac{k_z}{2}\left(z_i - z_i^{eq}\right)^2
\end{aligned}$$

da cui si deduce che la forza risultante sull'i-esimo atomo è di natura elastica:

$$\begin{aligned} F_{i,x} &= -\frac{\partial \mathcal{U}_i}{\partial x_i} = -k_x\,(x_i - x_i^{eq}) \\ F_{i,y} &= -\frac{\partial \mathcal{U}_i}{\partial y_i} = -k_x\,(y_i - y_i^{eq}) \\ F_{i,z} &= -\frac{\partial \mathcal{U}_i}{\partial z_i} = -k_x\,(z_i - z_i^{eq}) \end{aligned}$$

In verità, gli atomi non sono esattamente "fermi" nel solido, ma oscillano intorno ai loro punti di equilibrio con frequenze angolari

$$\omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{m_i}} \quad ; \quad \omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m_i}} \quad ; \quad \omega_z = \sqrt{\frac{k_z}{m_i}}$$

Ogni atomo in totale ha $\nu = 6$ gradi di libertà: 3 sono le componenti v_x, v_y, v_z della velocità (che entrano nell'energia cinetica), e 3 sono gli spostamenti $(x_i - x_i^{eq})$, $(y_i - y_i^{eq})$, $(z_i - z_i^{eq})$ dalla posizione di equilibrio (che entrano nell'energia potenziale). Pertanto, il principio di equipartizione dell'energia, Eq. (20.59), prevede che:

$$\left\langle E^{part} \right\rangle = 3kT \tag{20.61}$$

Questa legge è nota come *legge di Dulong e Petit*, e fu derivata sperimentalmente per molti solidi, prima di averne una spiegazione teorica.

In verità essa fallisce a basse temperature, a causa di effetti dovuti alla *meccanica quantistica*. Qui possiamo solo dare una spiegazione un po' approssimativa. In meccanica quantistica, l'energia meccanica di un oscillatore non può assumere qualunque valore reale, ma è "quantizzata", ovvero può assumere solo valori discreti. Precisamente:

$$E_{osc}^{part} = \left(n_{osc} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_{osc} \tag{20.62}$$

dove n_{osc} è un numero intero ≥ 0 e ω_{osc} la frequenza angolare dell'oscillatore. La quantità $\hbar$ è una costante fondamentale della Fisica

$$\hbar = 1.054\,571\,7 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s} \tag{20.63}$$

L'energia ha un livello base $\dfrac{\hbar\omega}{2}$, sul quale si può solo aumentare di quantità discrete $\hbar\omega$. Chiaramente, essendo $\hbar$ molto piccola, questa "discretizzazione"

appare un continuo ad energie elevate, viceversa diventa pi˘ importante man mano che si scende in energia, ovvero a basse temperature.

Ma c'è di più: in un solido, oltre alle vibrazioni dei singoli atomi intorno ai loro punti di equilibrio, si possono innescare anche vibrazioni "collettive" di gruppi di atomi, tipicamente con frequenze angolari tanto più basse, quanto maggiori sono i gruppi di atomi che oscillano insieme. Questi "modi vibrazionali" si chiamano *fononi*. Qui non li tratteremo in maniera approfondita, vogliamo solo accennare che le vibrazioni in un solido hanno uno spettro di frequenze angolari complicato $\left\{\omega_{osc}^{(1)}, \omega_{osc}^{(2)}, \omega_{osc}^{(3)}, \ldots\right\}$. Qui $\omega_{osc}^{(n)}$ indica genericamente l'n-esimo modo vibrazionale, che può essere del singolo atomo, o collettivo di un gruppo di atomi. Quando la temperatura T si abbassa, tutti i modi vibrazionali con $\omega_{osc}^{(n)} \gtrsim \dfrac{kT}{\hbar}$ diventano incompatibili con la temperatura (perché avrebbero un'energia minima troppo elevata) e quindi vengono "spenti". Tipicamente le vibrazioni individuali sono soppresse, e restano quelle collettive, quindi il numero medio di gradi di libertà per atomo $\langle\nu\rangle$ si riduce fortemente. L'effetto macroscopico è che la capacità termica molare, C^{mol}, anziché valere $3R$, si abbassa con la temperatura, annullandosi nel limite $T \to 0$.

20.12.4 Gas biatomico

In un gas biatomico rarefatto, la situazione è ancora più complessa, e va analizzata in tutti i suoi dettagli. Anzitutto abbiamo l'energia cinetica traslazionale (cioè dovuta alla velocità nello spazio):

$$\mathcal{E}_T = \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)$$

cui corrispondono i 3 gradi di libertà $v_x,\ v_y,\ v_z$. Contiamo $\nu_T = 3$ per le traslazioni, quindi

$$\langle\mathcal{E}_T\rangle = \frac{3}{2}kT$$

Poi abbiamo l'energia cinetica rotazionale $\mathcal{E}_R$, data dalle possibili rotazioni intorno ad assi ortogonali all'asse della molecola — ovviamente una rotazione intorno all'asse della molecola non produce movimento. Possiamo individuare due assi di rotazione ortogonali fra loro e all'asse della molecola, dunque altri due gradi di libertà, $\nu_R = 2$, quindi

$$\langle\mathcal{E}_R\rangle = kT$$

Anche qui, nulla di nuovo. Però elaboriamo di più questa parte...

La molecola biatomica è formata da due atomi di masse m_1, m_2 che ruotano intorno ad un centro comune, descrivendo orbite di raggi r_1, r_2 con velocità angolare ω. Le loro velocità rotazionali sono $v_{1,2} = \omega r_{1,2}$, quindi l'energia cinetica rotazionale si può calcolare come:

$$\mathcal{E}_R = \frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2\right) = \frac{\omega^2}{2}\left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2\right) = \frac{\omega^2}{2} I$$

La quantità $I \equiv (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)$ si chiama *momento di inerzia*. Il momento angolare della molecola è invece

$$L = m_1 v_1 r_1 + m_2 v_2 r_2 = \omega(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) = \omega I$$

L'energia cinetica rotazionale si può riscrivere come

$$\mathcal{E}_R = \frac{\omega^2}{2} I = \frac{L^2}{2I} \tag{20.64}$$

In meccanica quantistica, il momento angolare L è "quantizzato", cioè non può assumere qualunque valore reale, ma solo multipli interi della costante di Planck $\hbar = 1.054\,571\,7 \cdot 10^{-34}$ J s, quindi

$$L = n_R \hbar \tag{20.65}$$

Segue che l'energia cinetica rotazionale è anch'essa quantizzata:

$$\mathcal{E}_R = n_R^2 \frac{\hbar^2}{2I} \tag{20.66}$$

Quali sono i valori tipici di $\frac{\hbar^2}{2I}$? Prendiamo il caso della molecola di idrogeno: le masse degli atomi sono $m_1 = m_2 = m_{\mathrm{H}} = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg, la distanza interatomica è $r_{\mathrm{HH}} = 0.07$ nm, quindi $r_1 = r_2 = \frac{r_{\mathrm{HH}}}{2} = 3.5 \cdot 10^{-11}$ m. Risulta $I_{\mathrm{H}_2} \simeq 4 \cdot 10^{-48}$ m^{2}kg, ovvero $\frac{\hbar^2}{2I_{\mathrm{H}_2}} \simeq 5 \cdot 10^{-21}$ J. Questa è la più piccola energia cinetica rotazionale della molecola di idrogeno:

$$(\mathcal{E}_R)^{min}_{\mathrm{H}_2} = \frac{\hbar^2}{2I_{\mathrm{H}_2}} \simeq 1.2 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

La temperatura ad essa corrispondente è

$$(T_R)^{min}_{\mathrm{H}_2} = \frac{(\mathcal{E}_R)^{min}_{\mathrm{H}_2}}{k} \simeq 90 \text{ K}$$

In altre parole, al di sotto di questa temperatura (circa $-183°$C) non c'è sufficiente energia per innescare il moto rotatorio, e quindi i corrispondenti gradi di libertà sono "disattivati".

Un calcolo analogo per la molecola di ossigeno ($m_{\mathrm{O}} = 2.66 \cdot 10^{-26}$ kg, $r_{\mathrm{OO}} = 0.12$ nm) dà: $I_{\mathrm{O}_2} \simeq 2 \cdot 10^{-46}$ m^{2}kg, $(\mathcal{E}_R)^{min}_{\mathrm{O}_2} = 2.5 \cdot 10^{-23}$ J, e quindi $(T_R)^{min}_{\mathrm{O}_2} \simeq 1.8$ K. A causa del suo maggiore momento di inerzia, la temperatura per innescare le rotazioni nella molecola di ossigeno è molto più bassa.

Ma non è finita: il legame che unisce i due atomi non è rigido. Come accennato nella Sezione 14.3, i due atomi hanno un'interazione la cui energia potenziale presenta un minimo, in corrispondenza della loro distanza di equilibrio (vd Fig. 14.3), quindi sono caratterizzati da una oscillazione, in prima approssimazione elastica, intorno ad esso. In tal caso, sia l'energia cinetica di oscillazione, $\mathcal{E}_{osc}$, che l'energia potenziale $\mathcal{U}_{osc}$ contribuiscono all'energia meccanica E^{part}. La prima dipende dalla velocità di oscillazione v_{osc}, la seconda dallo spostamento δ_{osc} dal punto di equilibrio: quindi abbiamo altri due gradi di libertà, $\nu_{osc} = 2$. Ne consegue che

$$\left\langle E^{part}_{osc} \right\rangle = kT$$

Abbiamo già visto nel caso dei solidi che anche l'oscillazione degli atomi è soggetta alle leggi quantistiche:

$$E^{part}_{osc} = \left(n_{osc} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_{osc}$$

Si può calcolare quale sia la temperatura minima necessaria per innescare una oscillazione:

$$(T_{osc})^{min} = \frac{(\Delta E^{part}_{osc})^{min}}{k} = \frac{\hbar\omega}{h}$$

Sperimentalmente, per la molecola di idrogeno, si osserva che

$$(T_{osc})^{min}_{\mathrm{H}_2} = \frac{\hbar\omega_{\mathrm{H}_2}}{k} \simeq 1000 \text{ K}$$

Una temperatura decisamente alta! A temperature ambiente il modo vibrazionale non è innescato. Si può dedurre la frequenza angolare delle oscillazioni: $\omega_{\mathrm{H}_2} \simeq 1.4 \cdot 10^{14}$ rad/s.

Riassumiamo: abbiamo $\nu_T = 3$ gradi di libertà traslazionali, $\nu_R = 2$ gradi di libertà rotazionali, e $\nu_{osc} = 2$ gradi di libertà vibrazionali. Ma alcuni non si innescano, se la temperatura non è sufficiente. Possiamo riassumere la situazione in questa tabella:

temperatura	gradi di libertà				energia interna
	ν_T	ν_R	ν_{osc}	ν	
$T \lesssim T_R$	3	—	—	3	$E = \frac{3}{2}NkT$
$T_R \ll T \lesssim T_{osc}$	3	2	—	5	$E = \frac{5}{2}NkT$
$T_{osc} \ll T$	3	2	2	7	$E = \frac{7}{2}NkT$

Capitolo 21

Forze elettromagnetiche

21.1 Moti in campi elettrostatici

21.1.1 Il potenziale elettrostatico

Abbiamo visto in Sezione 13.7 che le forze elettriche coulombiane sono conservative. Inoltre, dalla Sezione 13.8, sappiamo che una composizione di forze conservative produce un campo conservativo. Quindi, senza ulteriore esitazione, possiamo affermare che

le forze elettrostatiche sono conservative.

Una carica-sonda q_0, posta in posizione $\vec{\boldsymbol{r}}$, in presenza di altre cariche $q_1, \ldots, q_N$ poste in posizioni $\vec{\boldsymbol{r}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{r}}_N$, è soggetta ad un'energia potenziale

$$\mathcal{U}_0(\vec{\boldsymbol{r}}) \;=\; q_0 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k|} \tag{21.1}$$

L'energia potenziale è dunque proporzionale alla carica-sonda q_0: questo suggerisce di definire una quantità indipendente da q_0, per descrivere in modo più generale il campo elettrostatico. Definiamo dunque il *potenziale elettrostatico* come $\Phi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{\mathcal{U}_0(\vec{\boldsymbol{r}})}{q_0}$, ovvero:

$$\Phi(\vec{\boldsymbol{r}}) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{N} \frac{q_k}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_k|} \tag{21.2}$$

L'unità di misura del potenziale elettrostatico è il Volt (V). *1 Volt è la differenza di potenziale che produce una variazione di energia di 1 Joule ad*

una carica elettrica di 1 Coulomb. Quindi

$$1\ \mathrm{V} \ = \ 1\ \mathrm{J/C} \tag{21.3}$$

Finora abbiamo detto che i campi elettrici si misurano in N/C. In realtà solitamente si indicano in V/m. Le due scelte sono del tutto equivalenti.

Ricordando che $\vec{\boldsymbol{F}} = q\vec{\boldsymbol{E}}$ e $\mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}) = q\Phi(\vec{\boldsymbol{r}})$, possiamo costruire una corrispondenza fra le relazioni matematiche che collegano queste quantità:

energia potenziale	potenziale elettrostatico
$\int_A^B \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}_A) - \mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}_B)$	$\int_A^B \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \Phi(\vec{\boldsymbol{r}}_A) - \Phi(\vec{\boldsymbol{r}}_B)$
$\vec{\boldsymbol{F}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\mathcal{U}$	$\vec{\boldsymbol{E}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\Phi$

Da queste si ricava che il lavoro fatto dal campo elettrostatico $\vec{\boldsymbol{E}}$ su una carica q si può scrivere come:

$$\mathcal{W}_{es}(A \to B) \ = \ q \int_A^B \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} \ = \ q\,[\ \Phi(A) - \Phi(B)\ ] \tag{21.4}$$

21.1.2 Esercizi di moti in campi elettrostatici

Esercizio 21.1. *Atomi di idrogeno vengono ionizzati, producendo protoni ed elettroni sostanzialmente in quiete. Questi sono poi soggetti ad una differenza di potenziale di* 1000 V. *Con quale velocità finale vengono emessi i protoni e gli elettroni? Per rispondere, occorre conoscere massa e carica elettrica del protone e dell'elettrone, che sono riportate in Sezione 11.3.3.*

Risposta. *Il lavoro fatto dal campo elettrostatico è in entrambi i casi* $\mathcal{W} = e\Delta\Phi = (1.602{\cdot}10^{-19}\ \mathrm{C})(1000\ \mathrm{V}) = 1.602{\cdot}10^{-16}\ \mathrm{J}$. *Poiché protoni ed elettroni sono inizialmente fermi, la loro energia cinetica finale sarà* $\mathcal{E}_e = \mathcal{E}_p = \mathcal{W}$. *La velocità si ricava da* $\mathcal{E} = \dfrac{m}{2}v^2$, *ovvero* $v = \sqrt{\dfrac{2\mathcal{E}}{m}}$. *Per i protoni,* $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg, *dunque* $v_p = 4.38 \cdot 10^5$ m/s $= 438$ km/s. *Per gli elettroni,* $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, *dunque* $v_e = 1.88 \cdot 10^7$ m/s $= 18\,800$ km/s.

Osservazione. *Si tratta di velocità molto elevate. In questi casi conviene sempre confrontarle con la velocità della luce,* $c = 300\,000$ km/s. *Finché* $\left(\dfrac{v}{c}\right)^2 \ll 1$ *i nostri calcoli restano attendibili. Altrimenti occorre rifarli utilizzando le equazioni della relatività.*

Esercizio 21.2. *Un fascio di elettroni molto collimato viene prodotto accelerando in direzione orizzontale gli elettroni, inizialmente fermi, con una differenza di potenziale di* $\Delta\Phi = 100$ V. *Quindi il fascio viene iniettato in una zona lunga*

$\ell = 1$ m, *dove c'è un campo elettrico verticale uniforme* $E_z = +50$ V/m, *diretto verso l'alto. Calcolare lo spostamento verticale* Δz *degli elettroni e l'angolo* α *con cui escono dalla zona di campo elettrico verticale.*

Risposta. *Gli elettroni inizialmente acquistano un'energia cinetica* $\mathcal{E} = e\Delta\Phi = (1.602 \cdot 10^{-19}\ \text{C})(10^2\ \text{V}) = 1.602 \cdot 10^{-17}$ J, *quindi una velocità orizzontale* $v_x = \sqrt{\dfrac{2\mathcal{E}}{m_e}} = \sqrt{\dfrac{2(1.602 \cdot 10^{-17}\ \text{J})}{9.11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = 5.930 \cdot 10^6$ m/s. *Quando entra nella zona di campo verticale, la sua velocità orizzontale non viene modificata. Invece la velocità verticale, inizialmente nulla, evolve nel tempo per la presenza di una forza* $F_z = -eE_z$, *pertanto* $v_z = \dfrac{-eE_z}{m_e}t$. *Analogamente, lo spostamento verticale è dato da* $\Delta z = -\dfrac{eE_z}{2\,m_e}t^2$.

Il tempo in cui gli elettroni restano nella zona di campo E_z *è* $\Delta t = \dfrac{\ell}{v_x} = \dfrac{1\ \text{m}}{5.930 \cdot 10^6\ \text{m/s}} = 1.686 \cdot 10^{-7}$ s. *All'uscita, la velocità verticale è* $v_z = -\dfrac{eE_z}{m_e}\Delta t = -\dfrac{(1.602 \cdot 10^{-19}\ \text{C})(50\ \text{N/C})}{9.11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}(1.686 \cdot 10^{-7}\ \text{s}) = 1.482 \cdot 10^6$ m/s. *L'angolo di deflessione è calcolabile come* $\tan\alpha = \dfrac{v_z}{v_x} = -0.25$, *vale a dire* $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{v_z}{v_x}\right) = -0.245\ \text{rad} \simeq -14°$. *La deflessione è negativa, cioè verso il basso: questo è corretto, poiché* E_z *è verso l'alto, ma la carica degli elettroni è negativa.*

Lo spostamento degli elettroni è $\Delta z = -\dfrac{eE_z}{2\,m_e}(\Delta t)^2 = -\dfrac{eE_z}{2\,m_e}\ell^2\dfrac{m_e}{2e\Delta\Phi} = -\dfrac{E_z\ell^2}{4\Delta\Phi} = -0.125\ \text{m} = -12.5\ \text{cm}$.

Esercizio 21.3. *Nell'esercizio precedente si è trascurata la forza di gravità agente sugli elettroni. Come si modifica il risultato, se la includiamo?*

Risposta. *Occorre modificare la forza, che da* $F_{el} = -eE_z$ *diventa* $F = F_{el} + F_g = -eE_z - m_e g$. *Per rispondere alla domanda, calcoliamo* $\dfrac{F}{F_{el}} = 1 + \dfrac{F_g}{F_{el}} = 1 + \dfrac{m_e g}{eE_z}1 + \dfrac{(9.11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg})(9.806\ \text{m/s}^2)}{(1.602 \cdot 10^{-19})(50\ \text{N/C})} = 1 + 1.115 \cdot 10^{-12}$. *Quindi l'errore che abbiamo commesso, trascurando la gravità, è di circa una parte su mille miliardi. Poiché sia* α *che* Δz *dipendono linearmente da* F, *questo "errore" li affligge nella stessa misura. Dunque, nessun problema!*

Esercizio 21.4. *Si consideri il modello classico dell'atomo di idrogeno, costituito da un elettrone che descrive un'orbita circolare intorno a un protone, con raggio* $a_0 = 5.29 \cdot 10^{-11}$ m. *Si calcolino l'energia cinetica e l'energia potenziale dell'elettrone. Quant'è l'energia meccanica? Quanta energia occorre per ionizzare l'atomo?*

Risposta. *La forza di Coulomb è* $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{a_0^2}$. *Questa deve essere pari alla forza centripeta applicata all'elettrone:* $F = m_e\frac{v_e^2}{a_0}$. *Uguagliando, si trova dunque*

$$m_e v_e^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{a_0}$$

Si noti la coincidenza: il primo termine è $2\mathcal{E}$, *il secondo è* $-\mathcal{U}$. *Pertanto l'energia meccanica,* $E = \mathcal{E} + \mathcal{U}$, *può essere scritta come* $E = \frac{1}{2}\mathcal{U}$ *oppure* $E = -\mathcal{E}$. *ATTENZIONE: questo vale solo per orbite circolari intorno ad un campo di forza* $\propto \frac{1}{r^2}$*!*

Calcoliamo dunque l'energia potenziale: $\mathcal{U} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{a_0} = -(9\cdot 10^9\ \mathrm{NC^{-2}m^2})\frac{(1.602\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{5.29\cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}} = -4.366\cdot 10^{-18}\ \mathrm{J}$.
Pertanto, $E = \frac{\mathcal{U}}{2} = -2.183\cdot 10^{-18}$ J. *È negativa, come ci si aspetta per un sistema legato. Per "slegare" il sistema occorre cedere dall'esterno un'energia almeno sufficiente a far diventare* $E \geq 0$, *quindi ionizzare l'atomo di idrogeno occorrono esattamente* $2.183\cdot 10^{-18}$ J.

Osservazione: le energie negli atomi

*L'energia di ionizzazione dell'atomo di idrogeno, trovata nell'esercizio, è molto piccola rispetto al Joule. In effetti, in Fisica Atomica, si fa spesso uso di un'unità di energia che non fa parte del S.I., ma è più idonea in questi contesti: questa è l'*elettron-volt, *definita come l'energia cinetica acquisita da un elettrone (o un protone) quando viene accelerato dalla differenza di potenziale di* 1 V. *Evidentemente:*

$$1\ \mathrm{eV} = 1.602\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} \tag{21.5}$$

Esercizio 21.5. *Esprimere l'energia di ionizzazione dell'atomo di idrogeno, in elettron-volt.*

Risposta. $2.183\cdot 10^{-18}\ \mathrm{J} = \frac{2.183\cdot 10^{-18}}{1.602\cdot 10^{-19}}\ \mathrm{eV} = 13.6\ \mathrm{eV}$

21.2 Esperimento di Millikan

L'esperimento di Millikan ha consentito di osservare che la carica elettrica non può assumere valori arbitrari, ma esiste in multipli interi di una quantità di carica fondamentale — che è la carica del protone, $+e$, o dell'elettrone, $-e$.

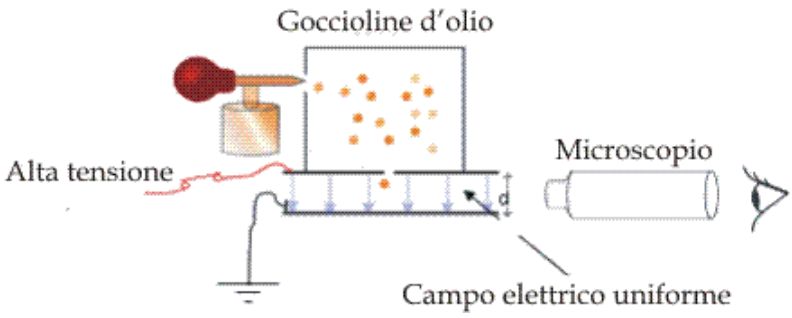


Figura 21.1: *Schema dell'esperimento di Millikan.*

Nell'esperimento, molte goccioline d'olio, estremamente piccole e leggere, vengono nebulizzate ed iniettate in una regione dove, oltre al campo gravitazionale $\vec{\boldsymbol{g}}$, esiste anche un campo elettrico uniforme $\vec{\boldsymbol{E}}$ diretto verticalmente verso l'alto, generato da una differenza di potenziale $\Delta\Phi$ applicata a due lastre metalliche poste a distanza D. L'intensità del campo elettrico vale $E = \dfrac{\Delta\Phi}{D}$, e si può regolare agendo sulla differenza di potenziale $\Delta\Phi$.

Molte goccioline sono elettricamente neutre, e cadono sotto l'azione della forza di gravità. Alcune goccioline, durante l'iniezione, si sono elettrizzate, ovvero hanno acquistato o perso elettroni per sfregamento. Pertanto possiedono una carica elettrica q, positiva se hanno perso elettroni, negativa se ne hanno acquistati. Queste goccioline sentono l'azione sia del campo gravitazionale che del campo elettrico. Regolando quest'ultimo opportunamente, per una particolare gocciolina le due forze si possono bilanciare, e la gocciolina resta sospesa a mezz'aria. Quantitativamente, detta m la massa della gocciolina e q la sua carica elettrica,

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{F}}_g &= -mg\hat{\boldsymbol{z}} \\
\vec{\boldsymbol{F}}_e &= qE\hat{\boldsymbol{z}} \\
\vec{\boldsymbol{F}}_{tot} &= (qE - mg)\hat{\boldsymbol{z}}
\end{aligned}$$

e la condizione di equilibrio si trova per $qE = mg$. Pertanto si può risalire alla carica elettrica

$$q = \frac{mg}{E} \tag{21.6}$$

se si conosce la massa m. E qui il discorso si complica... In effetti, le goccioline sono tutte diverse fra loro, e sono troppo piccole per poterne misurare il diametro e calcolarne quindi la massa. Inoltre, c'è anche l'effetto di "galleggiamento" della gocciolina nell'aria, che finora abbiamo trascurato.

Riaffrontiamo il tutto in maniera più precisa. Supponiamo che la gocciolina abbia forma sferica (il che è sempre vero per goccioline piccole) e raggio r (da determinare!). Quindi il suo volume è $V = \frac{4\pi}{3} r^3$ e la sua massa è $m = \rho V = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho$. La forza di galleggiamento è

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{gall} = \rho' V g \hat{\boldsymbol{z}} \tag{21.7}$$

con ρ' la densità dell'aria ($\rho' \simeq 1.3$ kg/m^3). Infine, quando la gocciolina si muove nell'aria, essa è soggetta ad un attrito viscoso, dato da

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{attr} \;=\; -\eta \vec{\boldsymbol{v}} \;=\; -(6\pi\mu r)\vec{\boldsymbol{v}} \tag{21.8}$$

(legge di Stokes) essendo μ la viscosità dell'aria ($\mu = 1.81 \cdot 10^{-5}$ kg m^{-1}s^{-1}).

Infine, abbiamo la forza di gravità, $\vec{\boldsymbol{F}}_g = -mg\hat{\boldsymbol{z}} = -\rho V g \hat{\boldsymbol{z}}$, e la forza elettrica, $\vec{\boldsymbol{F}}_e = qE\hat{\boldsymbol{z}}$. Tutte le forze sono orientate lungo la verticale, quindi il moto è unidimensionale e possiamo omettere i vari $\hat{\boldsymbol{z}}$.

La forza totale sulla gocciolina è quindi

$$\begin{aligned} F_{tot} &= F_g + F_{gall} + F_{attr} + F_e \\ &= -(\rho - \rho')g\frac{4\pi}{3}r^3 - (6\pi\mu)\, r\, v + qE \end{aligned} \tag{21.9}$$

Quando il campo E viene regolato per tenere in equilibrio una gocciolina, $v = 0$ e la forza di attrito si annulla. La condizione di equilibrio è $F_{tot} = 0$, cioè:

$$q \;=\; \frac{4\pi}{3} r^3 \frac{(\rho - \rho')g}{E} \tag{21.10}$$

dove però r è ancora ignoto. Per determinarlo, si spegne il campo E, cosicché la gocciolina cade sotto l'effetto della gravità. Man mano che cade la sua velocità aumenta, e così pure F_{attr}, finché non raggiunge una velocità-limite v_{lim} in cui l'attrito bilancia esattamente la gravità. Questo accade per $F_g + F_{gall} + F_{attr} = 0$, ovvero $(6\pi\mu)\, r\, v_{lim} = -(\rho - \rho')g\frac{4\pi}{3}r^3$. La velocità-limite deve essere:

$$|v_{lim}| \;=\; \frac{2}{9}\frac{(\rho - \rho')g}{\mu}\, r^2 \tag{21.11}$$

Misurandola, si può calcolare r e inserirlo nell'Eq. (21.10), così finalmente si ricava la carica q.

Misurando in questo modo i valori di q per diverse goccioline, si osserva che essi sono tutti multipli interi di una carica $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C. Pertanto e assume il ruolo di unità di carica elettrica fondamentale.

Esercizio 21.6. *Quanto sono piccole le goccioline dell'esperimento di Millikan? Proviamo a stimarlo.*

La carica elettrica minima di una gocciolina deve essere $q = e$. Supponiamo che sia mantenuta in equilibrio da un campo elettrico generato da una differenza di potenziale $\Delta\Phi = 10$ kV applicata attraverso uno spazio $D = 1$ cm. Quanto vale la massa "apparente" (cioè compreso l'effetto del galleggiamento) della gocciolina? Assumendo $\rho = 0.9$ g/cm^3, qual è il diametro della gocciolina?

Risposta. *Il campo elettrico vale* $E = \dfrac{\Delta\Phi}{D} = \dfrac{10^4 \text{ V}}{0.01 \text{ m}} = 10^6$ V/m. *La massa apparente della gocciolina è* $m_{app} = \dfrac{eE}{g} = \dfrac{(1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C})(10^6 \text{ N/C})}{9.806 \text{ m/s}^2} = 1.634 \cdot 10^{-14}$ kg $= 1.634 \cdot 10^{-11}$ g. *Il volume della gocciolina è* $V = \dfrac{m_{app}}{\rho - \rho'} = 1.818 \cdot 10^{-11}$ cm^3. *Essendo* $V = \dfrac{4\pi}{3} r^3$, *il diametro della gocciolina è* $2r = 2\sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}} = 3.26 \cdot 10^{-4}$ cm $= 3.26$ μm.

Esercizio 21.7. *Continuando l'esercizio precedente, qual è la velocità-limite di caduta della gocciolina considerata, in assenza di campo elettrico? Quanto impiegherebbe ad attraversare tutta la zona di campo elettrico?*

Risposta. *Abbiamo* $v_{lim} = \dfrac{2}{9} \dfrac{(\rho - \rho')g}{\mu} r^2 \simeq 2.87 \cdot 10^{-4}$ m/s $\simeq 0.3$ mm/s. *Per attraversare la zona di campo elettrico impiegherebbe un tempo* $\Delta t = \dfrac{D}{v_{lim}} \simeq 33$ s. *Un tempo abbastanza lungo, dunque, da poter permettere di osservarla bene.*

21.3 Moto in un campo magnetico

Sperimentalmente si osserva che cariche elettriche in moto in una regione di spazio contenente un *campo magnetico* sono soggette a forze, che deviano la direzione del moto senza alterarne la velocità. Studi approfonditi di tali fenomeni mostrano che la forza agente su una carica puntiforme q che si muove con velocità $\vec{\boldsymbol{v}}$ può essere descritta quantitativamente dalla legge:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_L = q\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}} \tag{21.12}$$

nota come *forza di Lorentz*. Il vettore $\vec{\boldsymbol{B}}$ in generale è una funzione della posizione occupata dalla carica q. L'Eq. (21.12) può essere usata come *definizione* del *campo magnetico* $\vec{\boldsymbol{B}}$: misurando la forza agente su diverse

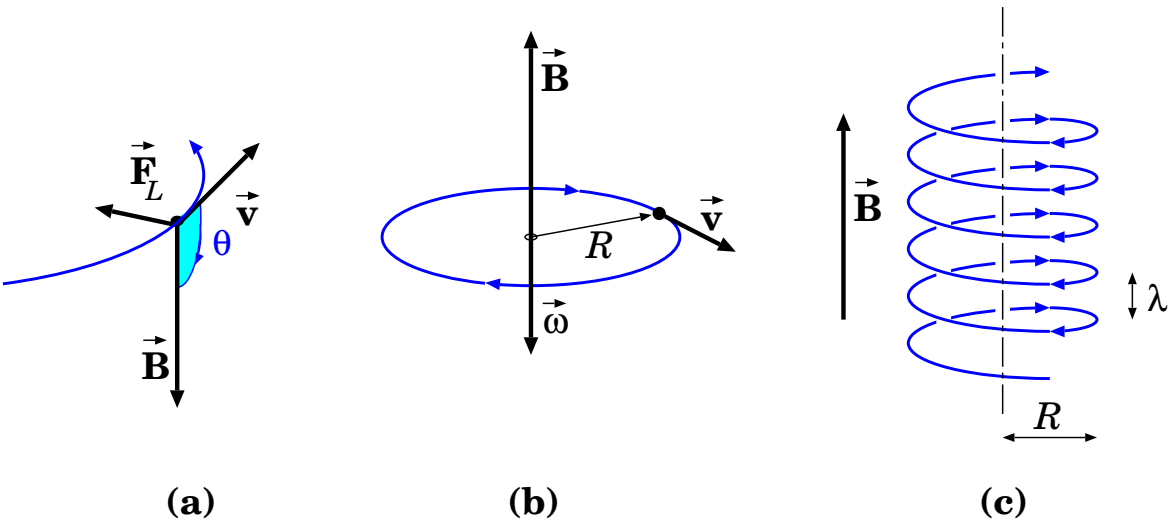


Figura 21.2: *Moto di una carica dovuto alla forza di Lorentz: (a) in un campo $\vec{B}$ generico; (b), (c) in un campo $\vec{B}$ uniforme*

cariche che passano per un dato punto con diverse velocità e direzioni, si possono misurare tutte le componenti di $\vec{B}$ in quel punto.

L'unità di misura del campo magnetico è il Tesla ($\mathrm{T} = \mathrm{N\,s\,C^{-1}\,m^{-1}}$).

Dall'Eq. (21.12) si vede subito che $\vec{F}_L$ è ortogonale al piano contenente i vettori. Quindi l'accelerazione non ha componente tangenziale: è puramente *centripeta*. Come si è già visto in Sezione 7.7, questo significa che il modulo della velocità è costante:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0$$

Inoltre, detto θ l'angolo fra i vettori $\vec{v}$ e $\vec{B}$ (Fig. 21.2(a)), il suo modulo è:

$$|\vec{F}_L| = |qvB\sin\theta| \tag{21.13}$$

quindi è nullo se $\vec{v}$ è parallelo (concorde o discorde) a $\vec{B}$, mentre è massimo se $\vec{v}$ è ortogonale a $\vec{B}$.

21.3.1 Moto in un campo magnetico uniforme

Consideriamo ora il moto di una particella carica in un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme. Scomponiamo la velocità $\vec{v}$ in due componenti $\vec{v}_\parallel$ e $\vec{v}_\perp$, parallela e ortogonale a $\vec{B}$. L'Eq. (21.12) diventa:

$$\frac{d\vec{v}_\parallel}{dt} + \frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = \frac{q}{m}\left(\vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp\right) \times \vec{B} = \frac{q}{m}\vec{v}_\perp \times \vec{B}$$

D'altra parte $\vec{\boldsymbol{v}}_\perp \times \vec{\boldsymbol{B}}$ è ortogonale a $\vec{\boldsymbol{B}}$, quindi le equazioni del moto possono essere *separate* nella direzione di $\vec{\boldsymbol{B}}$ e nel piano ortogonale:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}_\parallel}{dt} &= 0 \\ \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}_\perp}{dt} &= \frac{q}{m}\vec{\boldsymbol{v}}_\perp \times \vec{\boldsymbol{B}} \end{aligned} \tag{21.14}$$

e ciascuna può essere risolta indipendentemente. La prima equazione descrive un moto rettilineo uniforme nella direzione di $\vec{\boldsymbol{B}}$.

Analizziamo la seconda. Anzitutto, sappiamo che $v_\perp = |\vec{\boldsymbol{v}}_\perp|$ non cambia nel tempo (sappiamo che v è costante; abbiamo appena visto che anche $v_\parallel$ è costante; quindi anche $v_\perp = \sqrt{v^2 - v_\parallel^2}$ deve essere costante). Inoltre, dall'accelerazione centripeta possiamo calcolare il raggio di curvatura R:

$$\frac{q}{m}v_\perp = a_n = \frac{v_\perp^2}{R}$$

da cui:

$$R = \frac{mv_\perp}{qB} = \frac{p_\perp}{qB} \tag{21.15}$$

Possiamo anche ricavare la velocità angolare: $\omega = \dfrac{v_\perp}{R}$, quindi:

$$\omega = \frac{qB}{m} \tag{21.16}$$

Possiamo ragionare anche sulle singole componenti cartesiane: scegliamo l'asse z parallelo al campo $\vec{\boldsymbol{B}}$, cosicché $\vec{\boldsymbol{B}} = B_z\hat{\boldsymbol{z}}$. L'Eq. (21.12) diventa:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{q}{m}(v_yB_z - v_zB_y) = \frac{qB}{m}v_y \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{q}{m}(v_zB_x - v_xB_z) = -\frac{qB}{m}v_x \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{q}{m}(v_xB_y - v_yB_x) = 0 \end{aligned} \tag{21.17}$$

La terza equazione ci dice che v_z è costante nel tempo. Le prime due equazioni hanno per soluzione

$$
\begin{aligned}
v_x &= v_0 \sin\left(\frac{qB}{m}t + \Phi\right) \\
v_y &= v_0 \cos\left(\frac{qB}{m}t + \Phi\right)
\end{aligned}
\tag{21.18}
$$

come si può verificare per sostituzione diretta nelle Eq. (21.17). Qui v_0 è una costante di integrazione. Poiché $\sin^2 + \cos^2 = 1$, abbiamo che $\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_0$, quindi v_0 è il modulo della velocità sul piano (x, y).

Per trovare x, y occorre integrare v_x, v_y nel tempo. Ricordiamo che $\int dt\ \sin(\omega t + \Phi) = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \Phi) + \text{costante}$ e $\int dt\ \cos(\omega t + \Phi) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \Phi) + \text{costante}$. Quindi:

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 - \frac{mv_0}{qB}\cos\left(\frac{qB}{m}t + \Phi\right) \\
y &= y_0 + \frac{mv_0}{qB}\sin\left(\frac{qB}{m}t + \Phi\right)
\end{aligned}
\tag{21.19}
$$

Le conclusioni che si traggono sono le stesse già viste: moto rettilineo uniforme lungo l'asse z e moto circolare uniforme sul piano (x, y), con velocità v_0, raggio $R = \frac{mv_0}{qB}$ e velocità angolare $\omega = \frac{qB}{m}$.

La traiettoria della particella apparirà come raffigurata in Fig. 21.2(b,c): se $\vec{\boldsymbol{v}}_\parallel = 0$ la traiettoria è circolare, altrimenti è *elicoidale*. Il raggio di curvatura della traiettoria sul piano ortogonale a $\vec{\boldsymbol{B}}$ è dato dall'Eq. (21.15). Nel caso di traiettoria elicoidale, il *passo* dell'elica (ovvero la distanza fra due successivi passaggi) è calcolabile così: in un tempo $T = 2\pi/\omega$ la particella carica descrive un giro completo intorno all'asse dell'elica; nello stesso tempo lo spostamento nella direzione assiale è dato da $\lambda = v_\parallel T$, ovvero da una delle seguenti forme equivalenti:

$$
\lambda = \frac{2\pi\, v_\parallel}{\omega} = \frac{2\pi\, mv_\parallel}{qB} = 2\pi R\frac{v_\parallel}{v_\perp} = 2\pi R\frac{p_\parallel}{p_\perp}
\tag{21.20}
$$

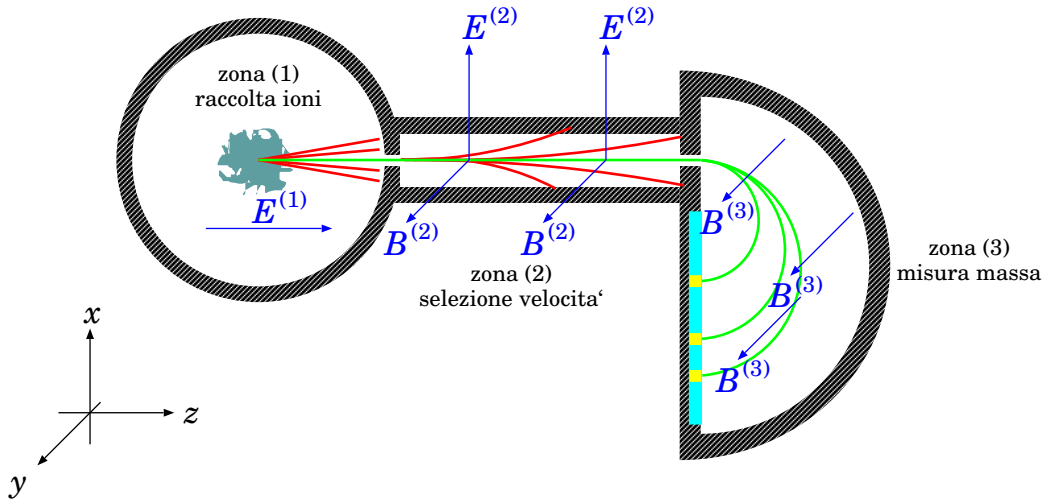


Figura 21.3: *Schema dello spettrometro di massa. Nella figura, i campi magnetici vanno pensati come "uscenti" dal foglio. Le linee verdi sono le traiettorie degli ioni selezionati in velocità, di cui si misura la massa. Le linee rosse sono le traiettorie degli ioni scartati.*

21.4 Spettrometro di massa

Lo *spettrometro di massa* è un apparato per misurare il rapporto $\frac{q}{m}$ fra la carica elettrica q e la massa m di una particella — tipicamente un atomo ionizzato.

La misura è logicamente divisa in tre fasi: produzione e raccolta degli ioni; selezione in velocità; analisi della massa, come indicato in Fig. 21.3.

Nella prima fase, la sostanza da esaminare viene ionizzata, cosicché le sue particelle (atomi o molecole) acquistano carica elettrica q e possono essere dunque raccolte ed accelerate da un campo elettrico $\vec{\boldsymbol{E}}^{(1)}$.

Gli ioni vengono poi iniettati attraverso uno stretto ugello nella seconda porzione dell'apparato: qui entrano come un fascio collimato e monodirezionale, ma con velocità v diverse fra loro, che dipendono dalla loro condizione di moto iniziale al momento della ionizzazione e da come il campo elettrico $\vec{\boldsymbol{E}}^{(1)}$ ha agito su ciascuna di essa (quindi per esempio dalle loro masse). La seconda fase della misura consiste nel selezionare la velocità v delle particelle, sottoponendole ad un campo elettrico $\vec{\boldsymbol{E}}^{(2)}$ ed un campo magnetico $\vec{\boldsymbol{B}}^{(2)}$, entrambi uniformi, ortogonali fra loro e alla direzione del moto. Per fissare le idee, possiamo orientare gli assi cartesiani in modo che $\hat{\boldsymbol{z}}$ punti nella direzione del moto, $\hat{\boldsymbol{x}}$ sia orientato come $\vec{\boldsymbol{E}}^{(2)}$ e $\hat{\boldsymbol{y}}$ come $\vec{\boldsymbol{B}}^{(2)}$.

La forza agente sullo ione di carica q è:

$$\vec{\boldsymbol{F}} \;=\; q\left(\vec{\boldsymbol{E}}_2 + \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}_2\right)$$

che scritta per componenti cartesiane, e tenendo conto dell'orientamento di $\vec{\boldsymbol{E}}^{(2)}, \vec{\boldsymbol{B}}^{(2)}$, risulta:

$$\begin{aligned}
F_x &= m\frac{dv_x}{dt} &&= q\left(E_x^{(2)} + v_y B_z^{(2)} - v_z B_y^{(2)}\right) &&= q\left(E^{(2)} - v_z B^{(2)}\right)\\
F_y &= m\frac{dv_y}{dt} &&= q\left(E_y^{(2)} + v_z B_x^{(2)} - v_x B_z^{(2)}\right) &&= 0\\
F_z &= m\frac{dv_z}{dt} &&= q\left(E_z^{(2)} + v_x B_y^{(2)} - v_v B_x^{(2)}\right) &&= q\, v_x B^{(2)}
\end{aligned}$$

Gli ioni entrano con velocità $\vec{\boldsymbol{v}} = v_z\hat{\boldsymbol{z}}$, cioè senza componenti v_x, v_y trasverse. Lungo $\hat{\boldsymbol{y}}$ non c'è forza, quindi il moto non subisce deviazioni. Lungo $\hat{\boldsymbol{x}}$ agiscono sia la forza elettrica che quella magnetica. In generale producono deviazioni, a meno che non si bilancino esattamente: questo può avvenire solo se

$$v_z \;=\; \frac{E^{(2)}}{B^{(2)}}$$

Gli ioni vengono poi iniettati nella terza parte dell'apparato attraverso uno stretto ugello allineato con il precedente: quindi solo quelli che non hanno subito deviazioni sono selezionati. La loro velocità è dunque nota.

Nell'ultima fase della misura, gli ioni selezionati in velocità sono soggetti ad un campo magnetico $\vec{\boldsymbol{B}}^{(3)}$, trasversale rispetto alla loro direzione di moto, pertanto descrivono un arco di traiettoria circolare. Un rivelatore misura il raggio di curvatura R della traiettoria. Da questo, usando l'Eq. (21.15), si può risalire alla quantità di moto:

$$p \;=\; qRB^{(3)}$$

e da questa alla massa:

$$m \;=\; \frac{p}{v} \;=\; \frac{qRB^{(3)}}{E^{(2)}/B^{(2)}} \;=\; \frac{qRB^{(2)}B^{(3)}}{E^{(2)}}$$

21.5 Acceleratori circolari

Un'altra applicazione dei campi elettromagnetici è costituita dagli *acceleratori di particelle*. Ci sono molti tipi di queste macchine. Una

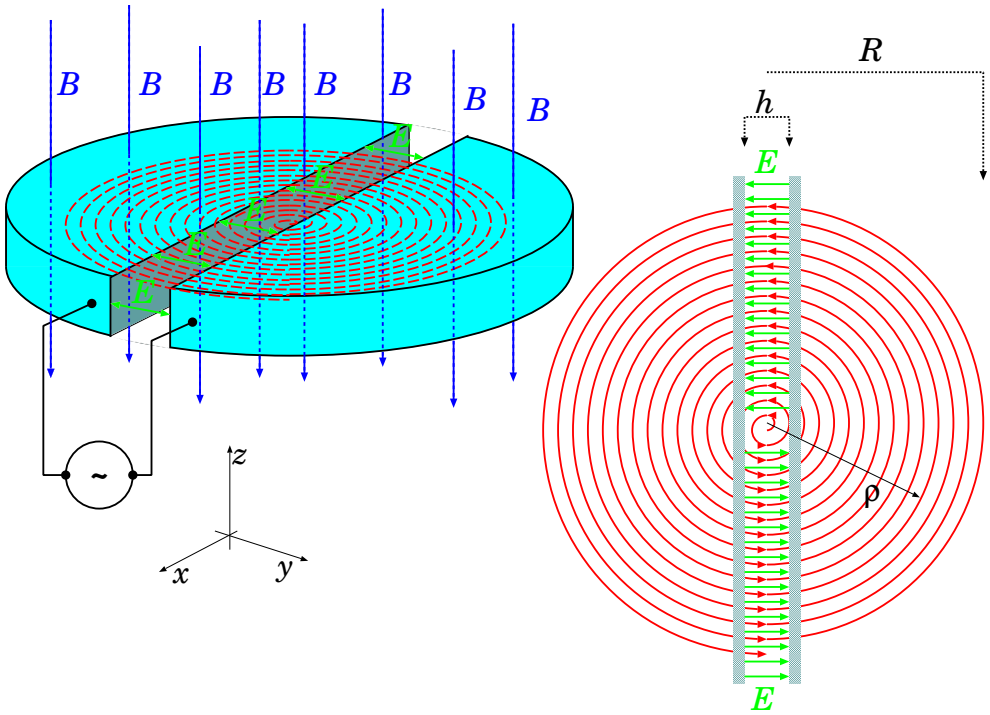


Figura 21.4: *Schema del ciclotrone.*

particolare classe consiste negli *acceleratori circolari*: le particelle cariche vengono accelerate da una forza accelerante prodotta da un campo elettrico $\vec{\boldsymbol{E}}$ diretto nella direzione del moto delle particelle:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{acc} = q\vec{\boldsymbol{E}}$$

Le particelle sono mantenute su un'orbita circolare da un campo magnetico $\vec{\boldsymbol{B}}$, che produce una forza centripeta

$$\vec{\boldsymbol{F}}_L = q\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$$

In questo modo, le particelle passano più volte nelle stesse regioni interessate dal campo elettrico, e ricevono ogni volta un'accelerazione. Il tutto viene iterato fino a quando l'energia cinetica delle particelle non ha raggiunto il valore voluto. A questo punto il campo magnetico viene spento e le particelle vengono estratte.

Come esempio, descriviamo il *ciclotrone*. La struttura dell'acceleratore è schematizzata in Fig. 21.4.

L'apparato è costituito da due strutture semicircolari cave (dette "le D") all'interno delle quali c'è un campo magnetico uniforme $\vec{\boldsymbol{B}}$, perpendicolare.

Fra le due "D" c'è una stretta zona ("gap") di larghezza h in cui viene generato un campo elettrico $\vec{\boldsymbol{E}}$, pilotato da un generatore oscillante di frequenza ν. Per fissare le idee, scegliamo un riferimento cartesiano con l'asse $\hat{\boldsymbol{z}}$ verticale e l'asse $\hat{\boldsymbol{y}}$ nella direzione del campo elettrico. Quindi, il campi elettrico e magnetico sono:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = E_0 \cos(2\pi\nu t)\hat{\boldsymbol{y}} \quad ; \quad \vec{\boldsymbol{B}} = -B\hat{\boldsymbol{z}} \tag{21.21}$$

Le particelle vengono iniettate nel gap al centro della struttura, a $t = 0$, dove sentono la forza accelerante $\vec{\boldsymbol{F}}_{acc} = q\vec{\boldsymbol{E}}$, che agisce per tutta la larghezza h, quindi produce un lavoro $\mathcal{W}_{gap} = qE_0h$. Pertanto le particelle subiscono un aumento di energia cinetica

$$\Delta\mathcal{E}_{gap} = qE_0h \tag{21.22}$$

Il campo magnetico $\vec{\boldsymbol{B}}$ imprime una traiettoria ad arco di cerchio sulle particelle, con raggio di curvatura

$$\rho = \frac{p}{qB} \tag{21.23}$$

e velocità angolare

$$\omega = \frac{q}{m}B \tag{21.24}$$

quindi il tempo per percorrere un'intero giro è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\frac{m}{qB} \tag{21.25}$$

Dopo un tempo $\frac{T}{2}$ le particelle hanno completato mezzo giro e ri-attraversano il gap, in direzione opposta. Affinché ricevano ancora un'accelerazione, occorre che anche il campo elettrico abbia invertito l'orientamento. Dopo un altro intervallo di tempo $\frac{T}{2}$ esse riattraversano ancora il gap, nella direzione originaria, quindi occorre che anche il campo elettrico sia tornato all'orientamento iniziale.

Quindi il campo elettrico deve oscillare con una frequenza $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$. Qui è interessante notare che ω non subisce variazioni durante il processo di accelerazione, poiché dipende solo da q, m, B (vd Eq. (21.24)), quindi la frequenza del generatore non deve essere "aggiustata" durante l'accelerazione — il che è decisamente vantaggioso!

L'energia raggiungibile con un ciclotrone è limitata dalle caratteristiche costruttive: il particolare dall'intensità B del campo magnetico e dal raggio

R della regione in cui esso è presente, attraverso l'Eq. (21.23). Infatti ovviamente $\rho < R$, quindi $p < qBR$; scrivendo $\mathcal{E} = \dfrac{p^2}{m}$ troviamo dunque

$$\mathcal{E}_{max} = \frac{(qBR)^2}{2m} \tag{21.26}$$

Esercizio 21.8. *Un ciclotrone viene utilizzato per accelerare protoni (massa* $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg*, carica* $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C*). I parametri sono i seguenti: intensità del campo magnetico* $B = 1.5$ T*, raggio massimo* $R = 0.5$ m*, campo elettrico massimo* $E_0 = 10^6$ N/C*, gap* $h = 1$ cm*. Qual è l'energia massima* $\mathcal{E}_{max}$ *raggiungibile per i protoni? Quanti giri fanno i protoni per arrivare all'energia massima? Quanto tempo impiegano?*

Risposta.

Inserendo i valori numerici troviamo $\mathcal{E}_{max} = \dfrac{(qBR)^2}{2m} = 4.322 \cdot 10^{-12}$ J*. Ad ogni attraversamento del gap l'energia aumenta di* $\Delta\mathcal{E}_{gap} = qE_0h = 1.602 \cdot 10^{-15}$ J*; poiché in un giro il gap viene attraversato 2 volte, il numero di giri necessario è* $N_{giri} = \dfrac{\mathcal{E}_{max}}{2\Delta\mathcal{E}_{gap}} \simeq 1\,350$*. Il tempo per compiere un giro è* $T = 2\pi\dfrac{m}{qB} = 4.367 \cdot 10^{-8}$ s*, quindi il tempo di accelerazione totale per raggiungere l'energia massima è* $t_{acc} = N_{giri}T = 5.89 \cdot 10^{-5}$ s $\simeq 60$ μs.

Osservazione. *Abbiamo trovato* $\mathcal{E}_{max} = 4.322 \cdot 10^{-12}$ J*: è un numero piuttosto piccolo, rispetto a energie "ordinarie", ma per un protone è "poco" o è "molto"? Proviamo a calcolare la velocità:* $v = \sqrt{\dfrac{2\mathcal{E}}{m}} = 7.19 \cdot 10^7$ m/s*. Decisamente veloci questi protoni!*

Capitolo 22

Correnti elettriche

22.1 Conduttori elettrici

Esistono materiali in cui alcune particelle portatrici di carica elettrica non sono strettamente vincolate a posizioni precise, ma hanno una certa libertà di movimento. Facciamo alcuni esempi notevoli.

- *Metalli*: ogni atomo contiene molti elettroni, che occupano "orbite" diverse. Gli elettroni delle orbite più interne sono saldamente vincolati ai rispettivi atomi; viceversa, quelli delle orbite più esterne hanno un legame più debole e possono migrare verso atomi vicini. Questi elettroni sono detti *elettroni di conduzione*, e ciascuno porta una carica elettrica $-e$.

- *Semiconduttori*: questi materiali hanno una struttura solida cristallina. In essi, si distinguono elettroni di *conduzione* e di *valenza*: i primi si comportano come nei metalli, mentre i secondi sono responsabili dei legami chimici che dànno al materiale la struttura di reticolo cristallino, e sono vincolati a stare nelle vicinanze dell'atomo di appartenenza. Può accadere però che, a causa dell'agitazione termica, alcuni elettroni di valenza si svincolino dall'atomo, diventando "di conduzione", e lasciando così una *lacuna* (cioè un "vuoto"), cui corrisponde un eccesso di carica positiva, $+e$. Un elettrone da un atomo vicino può andare a colmare questa lacuna, lasciandone però una nell'atomo da cui proviene. Il risultato effettivo è che nel semiconduttore abbiamo due tipi di portatori di carica: gli elettroni ($-e$) e le lacune ($+e$).

- *Soluzioni ioniche*: si ottengono quando una sostanza cristallina viene disciolta in acqua. I materiali cristallini sono aggregati da legami ionici, che in acqua si spezzano formando ioni (per esempio

$NaCl \rightarrow Na^+ + Cl^-$). In questo caso gli stessi ioni fungono da portatori di carica.

22.2 Correnti elettriche microscopiche

Pensiamo ad un conduttore come ad un sistema di atomi, o molecole, separati da spazio vuoto. In assenza di forze esterne, i portatori "liberi" di carica si muovono fra gli atomi senza essere soggetti a forze dovute ai singoli atomi, se non quando essi entrano nelle loro immediate vicinanze. Le loro velocità $\vec{\boldsymbol{v}}_q$, dovute all'agitazione termica, sono disordinate e vanno ugualmente in tutte le direzioni, pertanto la loro media vettoriale è nulla:

$$\langle \vec{\boldsymbol{v}}_q \rangle \;=\; 0 \qquad \text{(in assenza di forze esterne)}$$

Viceversa, le velocità scalari medie $\langle v_q \rangle$ sono molto elevate: possono andare da 10^4 m/s a 10^6 m/s, a seconda della natura dei portatori "liberi".

In presenza di un campo elettrico applicato $\vec{\boldsymbol{E}}$, un portatore "libero" di carica q è soggetto ad una forza elettrica $\vec{\boldsymbol{F}}_q = q\vec{\boldsymbol{E}}$, e quindi ad una accelerazione:

$$\vec{\boldsymbol{a}}_q = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}_q}{m_q} = \frac{q}{m_q}\vec{\boldsymbol{E}}$$

essendo m_q la massa del portatore. Ciò è vero finché il portatore può essere considerato "libero", ovvero finché non si trova nelle immediate vicinanze di un atomo: quando ciò avviene, esso subisce una forza molto superiore, per un intervallo di tempo molto breve, tanto che si può assimilare ad un urto. Essendo totalmente casuali i parametri di tale urto, il portatore ne esce con direzione del tutto casuale.

Chiamiamo $\vec{\boldsymbol{v}}_q^{(0)}$ la velocità di un generico portatore appena uscito da un urto. Nell'intervallo di tempo Δt che intercorre fra due successivi urti, la distanza percorsa dal portatore è:

$$\Delta\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{v}}_q^{(0)}\Delta t + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{a}}_q(\Delta t)^2 = \vec{\boldsymbol{v}}_q^{(0)}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{q\vec{\boldsymbol{E}}}{m_q}(\Delta t)^2$$

pertanto la sua velocità media fra due successivi urti è:

$$\overline{\vec{\boldsymbol{v}}_q} = \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta t} = \vec{\boldsymbol{v}}_q^{(0)} + \frac{\Delta t}{2}\frac{q}{m_q}\vec{\boldsymbol{E}}$$

Calcolando la media su molti portatori si trova:

$$\left\langle \overline{\vec{\boldsymbol{v}}_q} \right\rangle = \left\langle \vec{\boldsymbol{v}}_q^{(0)} \right\rangle + \frac{q}{2m_q}\langle \Delta t \rangle \vec{\boldsymbol{E}}$$

Ora, essendo $\left\langle \vec{\boldsymbol{v}}_q^{(0)} \right\rangle$ la media vettoriale dei portatori appena usciti da urti con atomi, essa è zero, a causa della direzione casuale. Invece $\langle \Delta t \rangle$ è il tempo medio che intercorre fra due urti. Esso può essere utilizzato per definire il *libero cammino medio* λ fra due urti:

$$\lambda \equiv \langle \Delta t \rangle \langle v_q \rangle$$

Quindi abbiamo trovato che, in presenza di un campo elettrico applicato $\vec{\boldsymbol{E}}$, i portatori acquisiscono una velocità media, detta *velocità di deriva*, pari a:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \equiv \langle \vec{\boldsymbol{v}}_q \rangle = \mu \vec{\boldsymbol{E}} \qquad \left(\mu \approx \frac{q}{2m_q} \frac{\lambda}{\langle v_q \rangle} \right) \tag{22.1}$$

essendo μ la *mobilità*.

In un conduttore, detta $\vec{\boldsymbol{u}}$ la velocità di deriva dei portatori di carica, q la loro carica elettrica e n la loro densità in volume, si definisce la *densità di corrente elettrica* $\vec{\boldsymbol{J}}$ come:

$$\vec{\boldsymbol{J}} = nq\vec{\boldsymbol{u}} \tag{22.2}$$

Dalla definizione di mobilità, Eq. (22.1), ricaviamo subito:

$$\vec{\boldsymbol{J}} = nq\mu\vec{\boldsymbol{E}} = \sigma\vec{\boldsymbol{E}} \tag{22.3}$$

dove σ è la *conducibilità elettrica*. La legge

$$\vec{\boldsymbol{J}} = \sigma\vec{\boldsymbol{E}} \tag{22.4}$$

è la *legge di Ohm microscopica*.

Esempio: conduzione nel rame

Consideriamo la conduzione nel rame: per ogni atomo esiste un elettrone che agisce come portatore libero di carica. La densità in volume degli atomi di rame si calcola conoscendo la densità del materiale $\rho = 8.96$ g/cm^3 *e il suo numero di massa* $A = 63.546$ *g (ovvero il peso in grammi di una "mole" di atomi: una mole corrisponde al numero di Avogadro* $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$*). La densità di atomi in volume,* n_{Cu}*, si ricava dall'equazione:*

$$\rho = n_{\mathrm{Cu}} \frac{A}{N_A}$$

da cui $n_{\mathrm{Cu}} = 8.5 \cdot 10^{28}$ m^{-3}.

Sperimentalmente, la conducibilità elettrica del rame è $\sigma = 6 \cdot 10^7$ *(unità S.I.). Poichè per ogni atomo c'è un solo elettrone portatore libero, allora la densità dei*

portatori è $n = n_{\mathrm{Cu}}$, e la loro carica elettrica è $q = -e = -1.602 \cdot 10^{-19}$ C. Da questi dati ricaviamo la mobilità elettronica nel rame:

$$\mu_e = \frac{\sigma}{nq} = -4.4 \cdot 10^{-3} \qquad \textit{(unità S.I.)}$$

Dall'Eq. (22.1) si deduce che per campi elettromotori ordinari, $\lesssim 10^4$ V/m, la velocità di deriva è $|\vec{\boldsymbol{u}}| \lesssim 40$ m/s, molto inferiore alla velocità termica media degli elettroni, $\langle v_e \rangle \approx 10^6$ m/s.

Il libero cammino medio degli elettroni è stimabile dall'Eq. (22.1) come $\lambda \approx 8 \cdot 10^{-8}$ m $= 800$ Å [1]. È interessante stimare la distanza interatomica media: se n_{Cu} è la densità atomica, il volume medio a disposizione di un atomo è $1/n_{\mathrm{Cu}}$, quindi la distanza interatomica è stimabile come $\approx \sqrt[3]{\dfrac{1}{n_{\mathrm{Cu}}}} \approx 2$ Å. Il libero cammino medio è molto più grande della distanza interatomica: questo è il senso di portatori "liberi"!

Se il conduttore fosse dotato di più tipi di portatori, con cariche $q_1, q_2, \ldots$, la definizione diventerebbe:

$$\vec{\boldsymbol{J}} = \sum_i n_i q_i \vec{\boldsymbol{u}}_i \tag{22.5}$$

La mobilità di ciascun portatore è definita da:

$$\vec{\boldsymbol{u}}_i = \mu_i \vec{\boldsymbol{E}} \tag{22.6}$$

e la conducibilità elettrica risulta quindi pari a

$$\sigma = \sum_i n_i q_i \mu_i \tag{22.7}$$

Esempi di conduttori con più tipi di portatori sono i semiconduttori e le soluzioni ioniche.

22.2.1 Conduttori non ohmici

Sperimentalmente, non tutti i conduttori sono ohmici, ovvero non seguono la legge di Ohm. Ciò può sembrare strano, visto che apparentemente la legge di Ohm è stata "dimostrata" in questa sezione. Riguardando la trattazione si

[1] L'Ångstrom, indicato Å, è un'unità di lunghezza corrispondente a 10^{-10} m, spesso usato in fisica atomica perché è dell'ordine di grandezza delle dimensioni dell'atomo. Dal libero cammino medio λ si può stimare la *sezione d'urto* σ di interazione di un elettrone libero con un atomo: $\sigma = \frac{1}{n\lambda} \approx 10^{-22}$ m$^2 = 10^6$ barn (1 barn=10^{-24} cm^2).

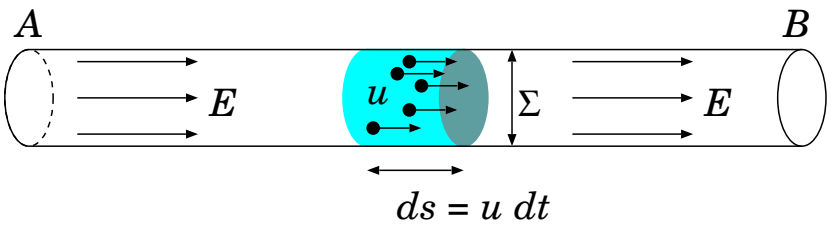


Figura 22.1: *Corrente elettrica come flusso di portatori di carica attraverso una sezione Σ di un conduttore.*

vede che la chiave sta nell'assunzione che $\vec{\boldsymbol{J}} \propto \vec{\boldsymbol{E}}$. Ora, $\vec{\boldsymbol{J}} = nq\vec{\boldsymbol{u}}$, e l'ipotesi che $\vec{\boldsymbol{u}} \propto \vec{\boldsymbol{E}}$ è valida in molti casi. Tuttavia, in alcuni materiali (per esempio nei gas) la densità di portatori n non è costante: in presenza di campi forti, la velocità dei portatori diventa tale da produrre fenomeni di ionizzazione degli atomi, liberando così altri portatori (effetto a valanga).

22.3 Corrente elettrica

Ora consideriamo un conduttore filiforme, di sezione trasversa Σ, cui viene applicato un campo elettrico $\vec{\boldsymbol{E}}$ parallelo al conduttore. In esso, i portatori di carica acquisiscono una velocità di deriva $\vec{\boldsymbol{u}} = \sigma\vec{\boldsymbol{E}}$, anch'essa parallela al conduttore. Quindi attraverso la sezione Σ c'è un flusso netto di cariche elettriche — vedi Fig. 22.1.

Si definisce *corrente elettrica* in un conduttore una quantità I pari al rapporto fra la quantità di carica elettrica dQ che attraversa la sezione Σ, ed il tempo dt in cui questo passaggio avviene:

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{22.8}$$

Calcoliamo quanta carica elettrica dQ attraversa Σ in un tempo infinitesimo dt. Poiché il conduttore è filiforme, $\vec{\boldsymbol{E}}$, $\vec{\boldsymbol{u}}$, $\vec{\boldsymbol{J}}$ hanno tutti orientamento uniforme lungo il conduttore. Il problema diventa quindi unidimensionale, e possiamo omettere la notazione vettoriale.

Consideriamo un piccolo tratto di conduttore di lunghezza $ds = u\,dt$, subito prima di Σ. Tutti i portatori che si trovano in esso attraverseranno la sezione Σ entro il tempo dt. Detta n la loro densità in volume, e $dV = \Sigma\,ds$ il volume del trattino di conduttore, il numero dei portatori che attraversano Σ nel tempo dt è $dN = n\,dV = n\Sigma\,ds = n\Sigma u\,dt$, quindi la carica elettrica

totale che passa è

$$dQ \;=\; q\,dN \;=\; nq\,u\,\Sigma\,dt \;=\; J\cdot\Sigma\,dt$$

Ne segue che

$$I \;=\; J\cdot\Sigma \tag{22.9}$$

22.4 La legge di Ohm

Per i conduttori "ohmici", cioè quelli per cui vale la legge di Ohm microscopica, Eq. (22.4), possiamo elaborare oltre il risultato. Introducendo $J = \sigma E$ nell'Eq. (22.9), otteniamo

$$I \;=\; \sigma\Sigma E$$

Ora, a capi A, B del conduttore esiste una differenza di potenziale $\Delta\Phi = \int_A^B \vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{s}}$, ed essendo $\vec{\boldsymbol{E}}, d\vec{\boldsymbol{s}}$ paralleli possiamo scrivere semplicemente:

$$\Delta\Phi \;\equiv\; \Phi_A - \Phi_B \;=\; \int_A^B E\,ds \;=\; \int_A^B \frac{I}{\sigma}\Sigma\,ds$$

Ora, la corrente I deve essere uguale attraverso tutte le sezioni del conduttore. Se così non fosse, ci sarebbero porzioni di conduttore dove entra più (o meno) corrente di quanta ne esca, e quindi si avrebbe un accumulo di cariche positive (o rispettivamente negative). Questo processo non può avere luogo, poiché la loro repulsione elettrica le disperderebbe. Inoltre assumiamo anche che il conduttore sia di materiale omogeneo, cosicché *sigma* sia uguale ovunque. Infine consideriamo che la sezione Σ sia costante. Allora l'integrale diventa semplicemente

$$\int_A^B \frac{I}{\sigma}\Sigma\,ds = \frac{I}{\sigma}\Sigma\int_A^B ds = \left(\frac{\ell_{AB}}{\sigma\Sigma}\right) I$$

Il risultato che abbiamo trovato è quindi:

$$\Delta\Phi \;\equiv\; \Phi_A - \Phi_B \;=\; \left(\frac{\ell_{AB}}{\sigma\Sigma}\right) I \;=\; RI \tag{22.10}$$

E questa è la nota *legge di Ohm* ("macroscopica", per distinguerla da quella microscopica).

La quantità R che vi compare è la *resistenza* del conduttore, e si può esprimere attraverso le dimensioni geometriche del conduttore (ℓ, Σ) e la conducibilità σ:

$$R \;=\; \frac{\ell}{\Sigma}\cdot\frac{1}{\sigma} \tag{22.11}$$

Dato un certo materiale (conducibilità σ), la resistenza può essere regolata scegliendo opportunamente la lunghezza ℓ (ove possibile) e la sezione Σ.

22.4.1 Unità di misura

La resistenza R si misura in Ohm (Ω=V/A). Quindi, la conducibilità σ si misura in $\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$.

22.5 Lavoro fatto sulle cariche in moto

Il lavoro fatto su una carica q in un tempo dt è:

$$\delta\mathcal{W}_q = \vec{\boldsymbol{F}}_q \cdot d\vec{\boldsymbol{s}} = q\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_q \, dt$$

Dunque il lavoro fatto in un tempo dt su un volumetto δV, contenente densità di portatori di carica n con velocità di deriva $\vec{\boldsymbol{u}}$, è:

$$\delta\mathcal{W}_{\delta V} = n\,\delta V \;\langle\delta\mathcal{W}_q\rangle = nq\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}\, dt\, \delta V = \vec{\boldsymbol{J}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}\, dt\, \delta V$$

La potenza $\delta\mathcal{P}$, ceduta alle cariche contenute nel volumetto δV, vale

$$\delta\mathcal{P} = \frac{\delta\mathcal{W}_{\delta V}}{dt} = \vec{\boldsymbol{J}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}\, \delta V$$

La potenza w, ceduta alle cariche per unità di volume ("densità di potenza"), è:

$$w \;=\; \frac{\delta\mathcal{P}}{\delta V} \;=\; \frac{\delta\mathcal{W}_{\delta V}}{\delta V\, dt} \;=\; \vec{\boldsymbol{J}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \tag{22.12}$$

Questa equazione è del tutto generale. Se il moto delle cariche avviene in un conduttore ohmico, allora $\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{1}{\sigma}\vec{\boldsymbol{J}}$. In questo caso, $\vec{\boldsymbol{J}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = |\vec{\boldsymbol{J}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{E}}| = JE$. La potenza ceduta alle cariche per unità di volume diventa quindi:

$$w \;=\; \frac{\delta\mathcal{P}}{\delta V} \;=\; \sigma\, E^2 \;=\; \frac{J^2}{\sigma} \tag{22.13}$$

In un conduttore filiforme, come quello in Fig. 22.1, la potenza totale dissipata può essere calcolata considerando che il volume di un tratto di conduttore di lunghezza ℓ e sezione trasversale Σ è $V = \ell\Sigma$, quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \;&=\; V\, w \;=\; \ell\Sigma\, JE \;=\; \ell E \cdot \Sigma J \\ &=\; \Delta\Phi\, I \end{aligned}$$

Dalla legge di Ohm, $\Delta\Phi = RI$, Eq. (22.10), si ottiene quindi:

$$\mathcal{P} \;=\; R\, I^2 \;=\; \frac{(\Delta\Phi)^2}{R} \tag{22.14}$$

nota come *legge di Joule*, o *effetto Joule*.

Nel conduttore ohmico la potenza ceduta alle cariche in moto non va ad aumentare la loro velocità di deriva: in effetti $\vec{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{\mu}\vec{\boldsymbol{E}}$ resta costante. Ciò che avviene realmente è che ogni portatore di carica, finché si muove senza urtare gli atomi, viene accelerato dal campo elettromotore. Ma ad ogni urto cede l'energia acquisita al reticolo atomico. Il risultato macroscopico dell'effetto Joule è infatti un surriscaldamento del conduttore.

22.6 Forze magnetiche su un circuito elettrico

Consideriamo un conduttore filiforme come quello di Fig. 22.1 percorso da una corrente I. In presenza di un campo magnetico $\vec{\boldsymbol{B}}$ la forza di Lorentz agisce sulle cariche in moto, producendo come effetto macroscopico una forza netta sul conduttore.

Chiamando q la carica elettrica dei portatori e n la loro densità in volume, in un trattino di conduttore di lunghezza ds e sezione trasversa Σ ci sono

$$dN = n\, ds\, \Sigma$$

portatori di carica che si muovono con una velocità media $\vec{\boldsymbol{u}} = \langle \vec{\boldsymbol{v}}_q \rangle$. La forza di Lorentz complessiva sul volumetto è data dal valore medio $\langle \vec{\boldsymbol{F}}_q \rangle$ della forza sul singolo portatore moltiplicato per il numero di portatori dN:

$$d\vec{\boldsymbol{F}}_L = dN \langle \vec{\boldsymbol{F}}_q \rangle = (n\, ds\, \Sigma) \langle q\vec{\boldsymbol{v}}_q \times \vec{\boldsymbol{B}} \rangle = nq\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\, \Sigma\, ds$$

Ora, $nq\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{J}}$ è parallelo a $d\vec{\boldsymbol{s}}$ (essendo il conduttore filiforme), quindi

$$\vec{\boldsymbol{J}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\, \Sigma_\perp\, ds = d\vec{\boldsymbol{s}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\, J\, \Sigma = d\vec{\boldsymbol{s}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\, I$$

Abbiamo quindi trovato la *2ª formula di Laplace*:

$$d\vec{\boldsymbol{F}}_L = I d\vec{\boldsymbol{s}} \times \vec{\boldsymbol{B}} \tag{22.15}$$

che descrive la forza agente su un tratto infinitesimo di conduttore di lunghezza ds percorso da una corrente I. Il vettore $d\vec{\boldsymbol{s}}$ è tangente al conduttore; si assume $I > 0$ se $\vec{\boldsymbol{J}} \uparrow\uparrow d\vec{\boldsymbol{s}}$.

La forza su un circuito esteso si ottiene integrando la forma differenziale dell'Eq. (22.15). Per un ramo di circuito che va da un punto A a un punto B la forza magnetica è:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_L = I \int_A^B d\vec{\boldsymbol{s}} \times \vec{\boldsymbol{B}} \tag{22.16}$$

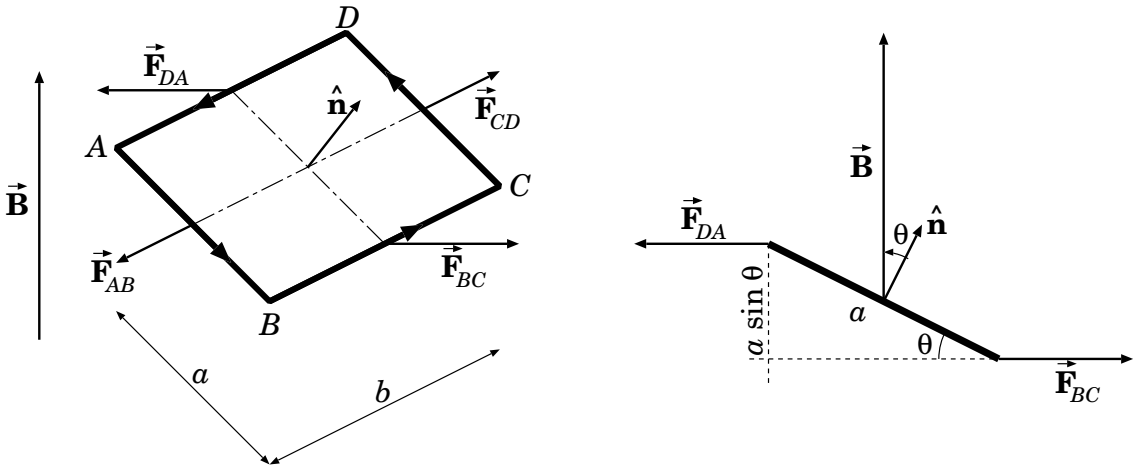


Figura 22.2: *Forze magnetiche su una spira rettangolare*

Se $\vec{\boldsymbol{B}}$ è uniforme l'integrale diventa:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_L = I\,\overrightarrow{AB} \times \vec{\boldsymbol{B}}$$

Per un circuito chiuso la forza totale è:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_L = I \oint d\vec{\boldsymbol{s}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$$

che si annulla se $\vec{\boldsymbol{B}}$ è uniforme (poiché $\oint d\vec{\boldsymbol{s}} = 0$).

22.6.1 Momento torcente su una spira in un campo uniforme

Abbiamo già visto che su un circuito chiuso percorso da corrente I in un campo magnetico uniforme $\vec{\boldsymbol{B}}$ la forza di Lorentz totale è nulla. Tuttavia esiste un momento torcente $\vec{\boldsymbol{M}}$.

Analizziamo il caso semplice della spira rettangolare disegnata in Fig. 22.2. I lati BC e DA sono lunghi b e perpendicolari a $\vec{\boldsymbol{B}}$; i lati AB e CD sono lunghi a e obliqui rispetto a $\vec{\boldsymbol{B}}$; l'asse della spira $\hat{\boldsymbol{n}}$ forma un angolo θ col vettore $\vec{\boldsymbol{B}}$.

Usando l'Eq. (22.16) possiamo calcolare le forze agenti sui quattro lati della spira. Le direzioni sono quelle indicate in Fig. 22.2. Le forze agenti sui lati AB e CD sono opposte, hanno modulo

$$|\vec{\boldsymbol{F}}_{AB}| = |\vec{\boldsymbol{F}}_{CD}| = IaB \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

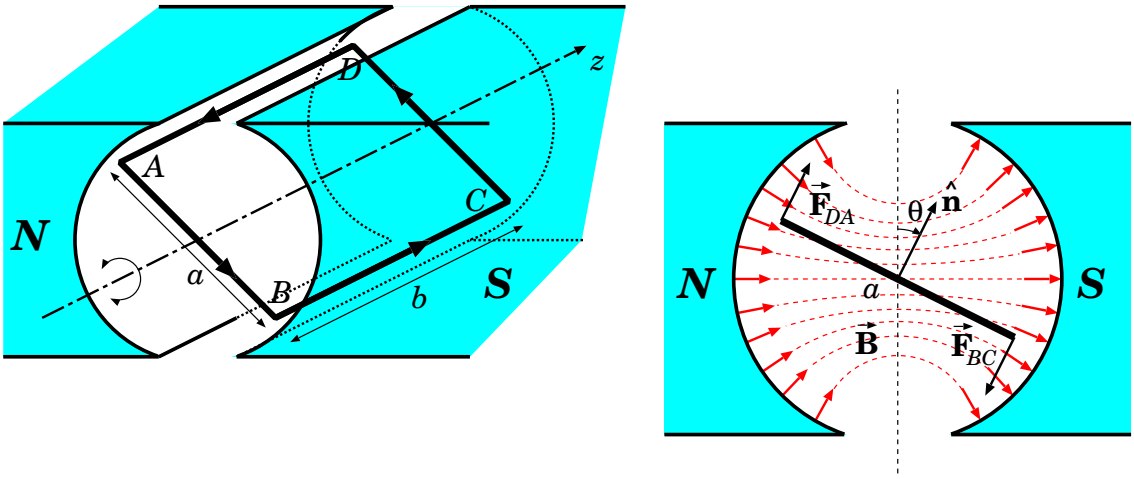


Figura 22.3: *Schema dell'amperometro*

ma non producono alcuna coppia. Le forze agenti sui lati BC e DA sono opposte, hanno modulo

$$|\vec{\boldsymbol{F}}_{BC}| = |\vec{\boldsymbol{F}}_{DA}| = IbB$$

e producono una coppia:

$$M = aF\,\sin\theta = I\,ab\,B\,\sin\theta$$

La direzione del momento torcente $\vec{\boldsymbol{M}}$ è ortogonale al piano contenente $\hat{\boldsymbol{n}}, \vec{\boldsymbol{B}}$ ed è tale da portare $\hat{\boldsymbol{n}}$ ad allinearsi con $\vec{\boldsymbol{B}}$. Tutto questo si può scrivere in forma vettoriale così:

$$\vec{\boldsymbol{M}} = (Iab)\hat{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = I\vec{\boldsymbol{\Sigma}} \times \vec{\boldsymbol{B}} \tag{22.17}$$

essendo $\vec{\boldsymbol{\Sigma}}$ la superficie orientata concatenata alla spira. Se al posto della spira ci fosse una bobina compatta formata da N spire sovrapposte, l'effetto meccanico totale sarebbe la somma degli effetti su ciascuna spira della bobina, ovvero:

$$\vec{\boldsymbol{M}} = N(Iab)\hat{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = NI\vec{\boldsymbol{\Sigma}} \times \vec{\boldsymbol{B}} \tag{22.18}$$

22.6.2 L'amperometro

In Fig. 22.3 è raffigurata una bobina rettangolare con N spire in cui circola una corrente I. Il tutto è immerso in un campo magnetico $\vec{\boldsymbol{B}}$ prodotto da un magnete permanente. Le espansioni polari sono sagomate in modo da generare nelle loro vicinanze un campo $\vec{\boldsymbol{B}}$ uniforme in modulo e di direzione

radiale. La bobina può ruotare intorno all'asse z, ed in assenza di corrente è tenuta in equilibrio nella posizione $\theta = 0$ da una molla, che esercita un momento torcente di tipo elastico:

$$M_{\text{el}} = -k_{\text{el}}\,\theta$$

Quando nella bobina passa una corrente I, le forze agenti sui lati AB e CD sono opposte, dirette lungo l'asse z e non producono alcuna coppia. Le forze agenti sui lati BC e DA sono opposte, perpendicolari al piano della bobina e valgono in modulo:

$$F = |\vec{\boldsymbol{F}}_{BC}| = |\vec{\boldsymbol{F}}_{DA}| = NIbB$$

La coppia prodotta è

$$M_{\text{magn}} = aF = NI\,ab\,B$$

e tende a far ruotare la bobina in senso orario se $I > 0$. La condizione di equilibrio della bobina si trova per $M_{\text{el}} + M_{\text{magn}} = 0$, ovvero:

$$I = \frac{k_{\text{el}}}{Nab\,B}\theta = K_A\theta$$

Questo dispositivo è alla base del funzionamento dell'*amperometro*, ovvero lo strumento che misura correnti elettriche. Infatti, collegando alla bobina un ago che segna l'angolo θ su un quadrante, si può dedurre la corrente che circola nella bobina. La costante K_A può essere dedotta dai parametri di costruzione delllo strumento $(N, a, b, B, k_{\text{el}})$ oppure ricavata calibrandolo con una corrente nota.

Capitolo 23

Campi elettromagnetici

23.1 Premessa

Abbiamo più volte introdotto la forza elettromagnetica, prodotta su una carica elettrica q da un campo elettrico $\vec{\boldsymbol{E}}$ e da un campo magnetico $\vec{\boldsymbol{B}}$ (cfr per es Eq. (11.11)). Per comodità la riportiamo qui:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{em} = q\left[\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) + \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\right] \tag{23.1}$$

Ricordiamo che qualunque carica elettrica q_k è sorgente di un campo elettrico $\vec{\boldsymbol{E}}_k(\vec{\boldsymbol{r}})$; se essa è in movimento, produce anche un campo magnetico $\vec{\boldsymbol{B}}_k(\vec{\boldsymbol{r}})$. In qualunque luogo $\vec{\boldsymbol{r}}$ dello spazio, i campi elettrici e i campi magnetici si sovrappongono come somma vettoriale:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \sum_k \vec{\boldsymbol{E}}_k(\vec{\boldsymbol{r}}) \\ \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \sum_k \vec{\boldsymbol{B}}_k(\vec{\boldsymbol{r}}) \end{aligned} \tag{23.2}$$

L'elettromagnetismo è la branca della Fisica che descrive la forma dei campi elettrico e magnetico generati da una configurazione di cariche. Si tratta di una materia molto vasta, che qui non possiamo pensare di esporre in maniera esaustiva. Ci limiteremo quindi ad alcuni casi particolari.

In Sezione 11.3 abbiamo anticipato la forma dei campi elettrici e magnetici prodotti da cariche in quiete o in moto "lento e poco accelerato":

$$|\vec{\boldsymbol{v}}| \ll c \qquad ; \qquad |\vec{\boldsymbol{a}}| \ll \frac{c^2}{|\Delta\vec{\boldsymbol{r}}|}$$

La forma generale dei campi elettrici e magnetici, e la loro dipendenza dalle cariche che li producono, è molto più complicata. L'approssimazione di "moto lento e poco accelerato" fallisce non appena le cariche acquistano velocità $\approx 0.1c$, o subiscono accelerazioni significative, o ancora i loro effetti sono studiati a distanze "grandi" in relazione alle loro accelerazioni — cioè $|\Delta\vec{\boldsymbol{r}}| \gg \dfrac{c^2}{|\vec{\boldsymbol{a}}|}$. Queste condizioni sono in effetti abbastanza comuni nella fisica delle particelle elementari. L'ultima poi è particolarmente rilevante quando si studino le onde elettromagnetiche.

23.2 Equazioni del campo elettromagnetico

Le equazioni del campo elettromagnetico sono state ricavate da J.C.Maxwell, compendiando una grande varietà di risultati sperimentali sulle interazioni elettriche e magnetiche. Esse sono espresse in forma integrale, attraverso circuitazioni e flussi: quindi è necessario avere letto e capito il Capitolo 17, dove queste operazioni matematiche sono definite.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi}_{\text{ch}}(\vec{\boldsymbol{E}}) = \oint d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = \frac{Q^{(\text{int})}}{\epsilon_0} \quad ; \quad \boldsymbol{\Phi}_{\text{ch}}(\vec{\boldsymbol{B}}) = \oint d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0 \\
&\oint d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = -\boldsymbol{\Phi}_{\text{conc}}\left(\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\right) \quad ; \quad \oint d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \left[I_{\text{conc}} + \epsilon_0 \boldsymbol{\Phi}_{\text{conc}}\left(\frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right)\right]
\end{aligned} \tag{23.3}$$

dove:

- $Q^{(\text{int})}$ nella prima equazione è la carica elettrica totale contenuta all'interno della superficie chiusa attraverso cui si calcola il flusso $\boldsymbol{\Phi}_{\text{ch}}(\vec{\boldsymbol{E}})$;
- I_{conc} nella quarta equazione è la corrente elettrica totale che fluisce entro la linea chiusa lungo cui si calcola la circuitazione $\oint d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}$;

inoltre:

$$\frac{1}{\epsilon_0} = 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \ \text{Nm}^2\text{C}^{-2} \quad ; \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \ \text{Ns}^2\text{C}^{-2} \tag{23.4}$$

Come già fatto per le leggi della dinamica, accettiamole come assiomi, confidando nel fatto che sono ampiamente supportate da innumerevoli

fatti sperimentali, e sono alla base di tutti gli apparati elettrotecnici che utilizziamo quotidianamente. Insomma *funzionano, e anche molto bene!*

Proviamo a capire qualitativamente, da queste equazioni, che cosa genera i campi elettrici e magnetici.

23.2.1 Campi stazionari

Cominciamo dapprima con situazioni stazionarie, in cui niente varia nel tempo: ciò significa che nelle Eq. (23.3) possiamo porre $\dfrac{\partial(\cdots)}{\partial t} = 0$. Le equazioni diventano:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}_{\rm ch}(\vec{\boldsymbol{E}}) = \oint d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = \frac{Q^{(\rm int)}}{\epsilon_0} \quad &; \quad \mathbf{\Phi}_{\rm ch}(\vec{\boldsymbol{B}}) = \oint d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0 \\ \oint d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = 0 \quad &; \quad \oint d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0\, I_{\rm conc} \end{aligned} \tag{23.5}$$

Da qui vediamo che:

- le equazioni per $\vec{\boldsymbol{E}}$ e $\vec{\boldsymbol{B}}$ sono completamente indipendenti: campi elettrici e magnetici fanno vite separate e non si disturbano l'un l'altro;
- i campi elettrici sono creati dalla presenza di cariche elettriche, attraverso $\mathbf{\Phi}_{\rm ch}(\vec{\boldsymbol{E}}) = \dfrac{Q^{(\rm int)}}{\epsilon_0}$; inoltre sono conservativi, come si deduce da $\oint d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = 0$;
- i campi magnetici sono creati dalle correnti elettriche (cioè cariche elettriche in movimento), come descritto da $\oint d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 I_{\rm conc}$; inoltre, non esistono "cariche magnetiche", come ci testimonia $\mathbf{\Phi}_{\rm ch}(\vec{\boldsymbol{B}}) = 0$.

In questo scenario, i campi elettrici e magnetici possono essere trattati indipendentemente gli uni dagli altri. Pertanto, affronteremo i campi elettrici nella Sezione 23.3 e seguenti, mentre tratteremo i campi magnetici nella Sezione 23.5.

23.2.2 Campi variabili in assenza di cariche

Ora mettiamoci nel caso completamente opposto: supponiamo che in una regione di spazio non ci siano cariche elettriche, quindi $Q^{(\mathrm{int})} = 0$ e $I_{\mathrm{conc}} = 0$. Le equazioni di Maxwell prendono la forma:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{ch}}(\vec{\boldsymbol{E}}) = \oint d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = 0 \qquad ; \qquad \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{ch}}(\vec{\boldsymbol{B}}) = \oint d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0 \\ &\oint d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = -\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{conc}}\left(\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\right) \qquad ; \qquad \oint d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = \epsilon_0 \mu_0\, \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{conc}}\left(\frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right) \end{aligned} \tag{23.6}$$

che ci dicono che un campo magnetico variabile ($\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \neq 0$) dà luogo ad un campo elettrico *non conservativo*, e viceversa, un campo elettrico variabile ($\frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t} \neq 0$) dà luogo ad un campo magnetico. Questo scenario è molto interessante! Proviamo a pensare ad un campo magnetico oscillante, $B \approx \cos(\omega t)$. Il campo elettrico indotto dalla sua variazione sarà qualcosa come $E \approx -\frac{\partial B}{\partial t} \approx \sin(\omega t)$. Questo a sua volta è variabile, quindi induce un campo magnetico $B \approx \frac{\partial E}{\partial t} \approx \cos(\omega t)$. E così via... Quindi i campi elettrico e magnetico si sostengono a vicenda. Come vedremo, questo fenomeno è la base delle *onde elettromagnetiche*.

Discuteremo questo scenario nel Capitolo 24.

23.2.3 Campi elettrici non conservativi

Abbiamo sempre trattato i campi elettrici come *conservativi*, cioè assumendo $\oint d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = 0$. Questo ci ha consentito di definire il potenziale elettrostatico Φ, tale che $\Phi(A) - \Phi(B) = \int_A^B d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}$. Tuttavia possiamo porci un dubbio: come fa un campo elettrico conservativo a produrre una corrente elettrica in un circuito chiuso di resistenza R? Sul circuito viene dissipata una potenza $\mathcal{P} = RI^2$ (legge di Joule, Eq. (22.14)), che cosa fornisce questa potenza? Se il campo elettrico è conservativo, su un circuito chiuso non può compiere lavoro.

In effetti ci sono molti casi di campi elettrici non conservativi. A livello fondamentale, la spiegazione sta nell'equazione di Maxwell scritta in modo completo:

$$\oint d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = -\boldsymbol{\Phi}_{\text{conc}} \left(\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \right) \tag{23.7}$$

Quando le cariche elettriche sono in moto, possono produrre correnti — anche a livello atomico — e quindi campi magnetici. Se questi sono variabili nel tempo — il che è ragionevole, visto che le cariche che li producono si spostano — allora possono indurre campi elettrici non conservativi, cioè con $\oint d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \neq 0$.

Nella pratica, l'Eq. (23.7), detta *legge di Faraday-Neumann*, è utilizzatissima per costruire macchine elettriche, come generatori di tensione ("alternatori") e motori ("a induzione"). Non sviluppiamo oltre questo argomento, peraltro molto ricco.

23.3 Campi elettrici statici

Abbiamo visto (Sezione 23.2.1) che in condizioni stazionarie le equazioni per il campo elettrico si disacoppiano da quelle per il campo magnetico.

Concentriamoci dunque sui soli campi elettrici.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}_{\text{ch}}(\vec{\boldsymbol{E}}) &= \frac{Q^{(\text{int})}}{\epsilon_0} \\ \oint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} &= 0 \end{aligned} \tag{23.8}$$

La prima equazione va sotto il nome di *legge di Gauss*. Come fatto per le forze gravitazionali (Sezione 19.7), essa può essere *dedotta* dalla legge di Coulomb, che ha la stessa forma $\propto \frac{1}{r^2}$. Tuttavia, la legge di Coulomb vale solo per cariche puntiformi ferme, mentre la legge di Gauss ha validità del tutto generale.

La seconda equazione — ricordiamolo — ci dice che il campo elettrico statico è conservativo. Infatti, detta q una carica elettrica qualunque, la forza elettrica è $\vec{\boldsymbol{F}} = q\vec{\boldsymbol{E}}$, e la sua circuitazione lungo un percorso chiuso è:

$$\oint \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = q \oint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = 0$$

Così come si può definire l'energia potenziale come:

$$\mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(B) \;=\; \int_A^B \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$$

allo stesso modo si definisce il *potenziale elettrostatico* Φ come:

$$\Phi(A) - \Phi(B) \;=\; \int_A^B \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} \tag{23.9}$$

Le due equazioni Eq. (23.8) sono sufficienti ad analizzare qualunque problema elettrostatico. Qui di seguito ci limitiamo ad analizzare alcuni casi particolari:

- il campo Coulombiano generato da una carica puntiforme ferma;
- le proprietà dei campi elettrici nei conduttori;
- la costruzione di un campo elettrico uniforme.

23.3.1 Deduzione della legge di Coulomb

In condizioni statiche le equazioni di Maxwell consentono di ricavare la legge di Coulomb, ovvero i campi elettrici della forma

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

In effetti, se la carica q è ferma, ogni direzione nello spazio è altrettanto valida di tutte le altre, quindi il campo elettrico prodotto da q deve dipendere solo dalla distanza r dalla carica, e deve essere orientato in modo radiale:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = E(r)\hat{\boldsymbol{r}}$$

Scegliamo quindi una superficie chiusa Σ_{ch} di forma sferica e raggio r; $d\vec{\boldsymbol{\Sigma}}$ è per convenzione ortogonale alla superficie e orientato verso l'esterno, quindi $d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} = d\Sigma\hat{\boldsymbol{r}}$. Allora $d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = d\Sigma\, E(r)$ Chiamando $d\Omega$ l'angolo solido che sottende $d\Sigma$, abbiamo $d\Sigma = r^2\, d\Omega$, quindi $d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = r^2 E(r)\, d\Omega$. Integrando su tutta la sfera si trova:

$$\oint d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = \oint d\Omega\, r^2 E(r) = r^2 E(r) \cdot 4\pi$$

e confrontando con $\displaystyle\oint d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{\epsilon_0}$ otteniamo

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

(c.v.d.)

23.3.2 Campi elettrici statici nei conduttori

Abbiamo introdotto i conduttori elettrici in Sezione 22.1. Si tratta di materiali in cui esistono particelle portatrici di carica che, il presenza di forze elettriche, sono libere di muoversi. Per i conduttori ohmici, abbiamo anche dedotto che la densità di corrente $\vec{\boldsymbol{J}}$ è legata al campo elettrico $\vec{\boldsymbol{E}}$ dalla *legge di Ohm microscopica* (Eq. (22.4)):

$$\vec{\boldsymbol{J}} = \sigma \vec{\boldsymbol{E}}$$

In questa sezione tratteremo le proprietà dei conduttori in condizioni statiche, cioè in assenza di correnti. È evidente che in tali condizioni, il campo elettrico all'interno del conduttore deve essere esattamente nullo:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = 0 \qquad \text{all'interno del conduttore}$$

Un'ulteriore conseguenza diretta è che *tutto il conduttore è equipotenziale*: due punti qualunque del conduttore hanno una differenza di potenziale $\Delta\Phi = \int \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = 0$, essendo $\vec{\boldsymbol{E}} = 0$ ovunque all'interno.

Ogni porzione interna ad un conduttore è elettricamente neutra. Questa è una conseguenza della legge di Gauss: dato un qualunque volumetto ΔV completamente interno al conduttore, e chiamata Σ_{ch} la superficie che ne costituisce il bordo, $Q^{(\text{int})} = \epsilon_0 \oint_{\Sigma_{\text{ch}}} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\Sigma}} = 0$. Si noti che questo non significa che non esistono cariche elementari — sappiamo che ogni singolo atomo è formato di particelle cariche — bensì che ne esistono di positive e negative in uguali quantità in modo da bilanciarsi.

Se un conduttore non è elettricamente neutro, ovvero se la carica elettrica totale su di esso non è nulla, essa deve necessariamente essere localizzata *sulla sua superficie*.

23.3.3 Cavità di un conduttore

Se il conduttore ha una cavità interna vuota (cavità elettrostatica), il campo elettrostatico in essa è sempre nullo. Infatti, applicando la legge di Gauss ad una superficie Σ che circonda tutta la cavità, come il Fig. 23.1(a), essendo $\vec{\boldsymbol{E}} = 0$ ovunque nel conduttore, segue che la carica totale disposta sulla superficie della cavità deve essere nulla. Questo in sé non significa che la carica sia nulla in ogni punto, potrebbero esserci cariche positive in alcune zone e negative in altre, come indicato in Fig. 23.1(b). Ma se così fosse, ci sarebbe un campo elettrostatico nella cavità, le cui linee di campo partirebbero dai punti con cariche positive e si chiuderebbero sui punti con cariche negative. Allora si potrebbe scegliere un percorso chiuso Γ orientato

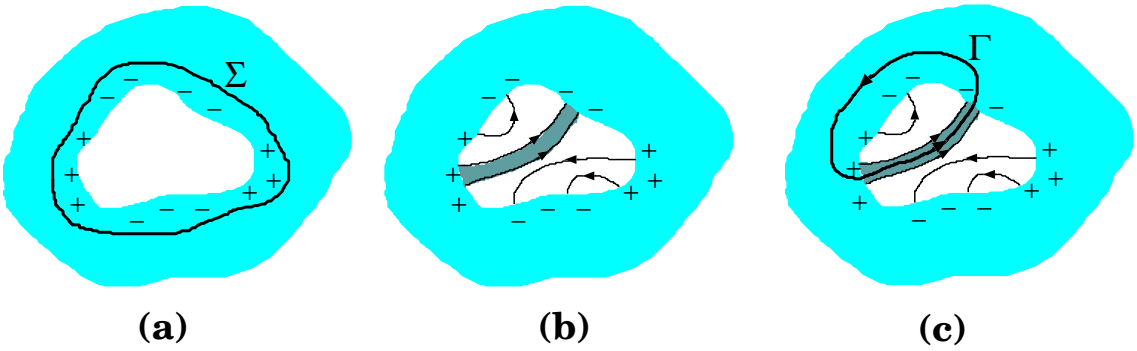


Figura 23.1: *Campo elettrostatico in una cavità elettrostatica*

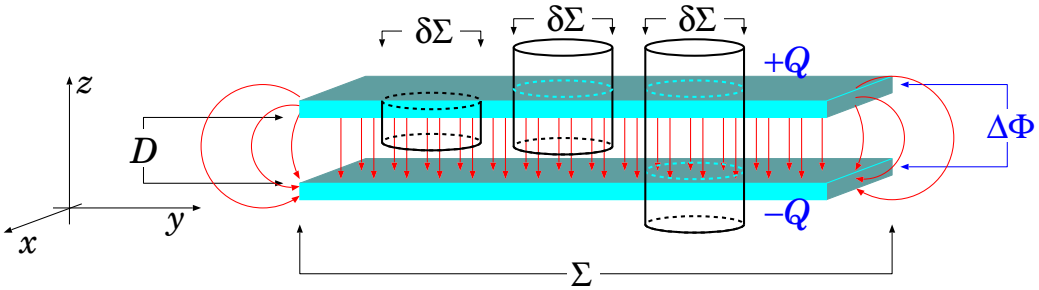


Figura 23.2: *Schema di un condensatore piano.*

come il campo $\vec{\boldsymbol{E}}$ nella cavità; essendo $\vec{\boldsymbol{E}} = 0$ nella parte di Γ nel conduttore, avremmo $\oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} > 0$, il che viola la legge della circuitazione nulla.

Si conclude che deve essere $\vec{\boldsymbol{E}} = 0$ anche nella cavità.

Questo risultato è valido sempre, a prescindere da che cosa succede all'esterno del conduttore: una cavità elettrostatica è quindi perfettamente isolata dall'universo esterno, per questo viene detta *schermo elettrostatico totale*.

23.3.4 Costruzione di un campo elettrico uniforme

Consideriamo un sistema formato da due lastre conduttrici piane parallele, di superficie Σ e separate da una distanza D, come in Fig. 23.2. Questa struttura si chiama *condensatore*, e le lastre *armature*.

Alle armature viene applicata una differenza di potenziale $\Delta\Phi$, che ha l'effetto di trasportare una quantità di carica elettrica Q da un'armatura all'altra. Per fissare le idee, supponiamo che l'armatura superiore porti carica $+Q$ e quella inferiore $-Q$.

Fra le armature deve esserci un campo elettrico $\vec{\boldsymbol{E}}$, in modo che $\Delta\Phi = \int d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}$. Vogliamo mostrare che questo campo, lontano dai bordi delle armature, è uniforme.

Anzitutto, per ragioni di simmetria, $\vec{\boldsymbol{E}}$ deve essere ortogonale alle armature stesse. Se così non fosse, dovrebbe esistere una componente $\vec{\boldsymbol{E}}_{\parallel}$ parallela alle armature. Immaginando di ruotare tutto il sistema di 180° intorno al suo asse verticale, anche $\vec{\boldsymbol{E}}_{\parallel}$ deve ruotare, diventando $\vec{\boldsymbol{E}}'_{\parallel} = -\vec{\boldsymbol{E}}_{\parallel}$; ma con questa rotazione otterremmo una configurazione di cariche identica a quella iniziale. Com'è possibile che la stessa configurazione dia due campi diversi? L'unica spiegazione è che sia $\vec{\boldsymbol{E}}_{\parallel} = 0$.

Introducendo quindi gli assi cartesiani come in Fig. 23.2, possiamo dire che la forma del campo è

$$\vec{\boldsymbol{E}} = E(x, y, z)\, \hat{\boldsymbol{z}}$$

Ora consideriamo una superficie cilindrica chiusa, come quella a sinistra nella Fig. 23.2, con la base superiore all'interno dello spessore dell'armatura superiore, la base inferiore in mezzo alle due armature, un'area di base piccola, $\delta\Sigma$ (al limite $\delta\Sigma \to 0$), e applichiamo la legge di Gauss. Lungo la superficie laterale del cilindro non c'è flusso, perché $\vec{\boldsymbol{E}}$ è parallelo a $\hat{\boldsymbol{z}}$. La base superiore del cilindro è all'interno di un conduttore, quindi $\vec{\boldsymbol{E}} = 0$. L'unico contributo al flusso è attraverso la base inferiore, che ha versore ortogonale $\hat{\boldsymbol{n}} = -\hat{\boldsymbol{z}}$. Quindi il flusso vale $\boldsymbol{\Phi}(\vec{\boldsymbol{E}}) = (E\hat{\boldsymbol{z}}) \cdot (\delta\Sigma\hat{\boldsymbol{n}}) = -E\delta\Sigma$. Questo risultato è indipendente dall'altezza del cilindro, cioè dalla coordinata z alla quale si trova la base inferiore. Quindi E non dipende da z, in mezzo alle armature:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = E(x, y)\, \hat{\boldsymbol{z}} \qquad \text{(fra le armature)}$$

Ne consegue che $\Delta\Phi = \int \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int E(x, y)\, dz = E(x, y)\, \Delta z = E(x, y)\, D$. Ora $\Delta\Phi$ non può dipendere da x, y, poiché ciascuna delle armature è conduttrice, quindi tutti i suoi punti si trovano allo stesso potenziale, a prescindere da x, y. Quindi, all'interno delle armature, E non dipende da x, y:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = E\, \hat{\boldsymbol{z}} \quad ; \quad E = \frac{\Delta\Phi}{D} \qquad \text{(uniforme fra le armature)}$$

Studiamo anche il campo fuori dalle armature. Applichiamo la legge di Gauss al cilindretto centrale della Fig. 23.2. Con ragionamenti analoghi ai

precedenti, possiamo concludere che anche al di fuori delle armature il campo è diretto lungo z e uniforme. Al flusso contribuiscono solo le due basi del cilindro, dando:

$$\mathbf{\Phi}(\vec{\boldsymbol{E}}) \;=\; \delta\Sigma\,\left(E^{sopra} - E^{dentro}\right) \;=\; \frac{\delta q^{sup}}{\epsilon_0}$$

dove si intende che δq^{sup} è la parte di carica elettrica sulla superficie dell'armatura superiore, racchiusa dal cilindretto.

Infine, applichiamo la legge di Gauss al cilindretto di destra della Fig. 23.2. Troviamo che:

$$\mathbf{\Phi}(\vec{\boldsymbol{E}}) \;=\; \delta\Sigma\,\left(E^{sopra} - E^{sotto}\right) \;=\; \frac{\delta q^{sup} + \delta q^{inf}}{\epsilon_0}$$

Queste equazioni possono valere per qualunque scelta di $\delta\Sigma$: visto che i campi non dipendono da x, y, possiamo allargare $\delta\Sigma$ fino ad includere (quasi) tutta l'armatura (al limite lasciando fuori una piccola porzione per evitare gli effetti-bordo). Dunque ragioniamo per $\delta\Sigma \simeq \Sigma$, e quindi $\delta q^{sup} \simeq Q$ e $\delta q^{inf} \simeq -Q$. Riscriviamo le due equazioni appena trovate:

$$\begin{aligned} \Sigma(E^{sopra} - E^{dentro}) &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ \Sigma(E^{sopra} - E^{sotto}) &= 0 \end{aligned}$$

In particolare, il campo "sopra" il condensatore e quello "sotto" devono essere uguali, a prescindere dalla separazione D delle armature. Pensiamo di avvicinare sempre più le due armature fino a che arrivino quasi a toccarsi ($D \to 0$): allora le loro cariche $+Q$ e $-Q$ dovrebbero compensarsi, ma all'esterno avremmo sempre un campo $E^{fuori} = E^{sopra} = E^{sotto}$. Come è possibile? L'unica soluzione è che i campi esterni siano nulli. Se così è, il campo interno è $E^{dentro} = -\dfrac{Q}{\epsilon_0\Sigma}$.

Riassumiamo quanto abbiamo trovato:

- un condensatore piano, con armature di area Σ e separazione D, produce al suo interno un campo elettrostatico uniforme, che vale

$$E \;=\; \frac{Q}{\epsilon_0\Sigma} \;=\; \frac{\Delta\Phi}{D} \tag{23.10}$$

- all'esterno delle armature il campo elettrostatico è nullo;

- dall'equazione precedente si deduce che $Q \propto \Delta\Phi$, sempre; pertanto si definisce la *capacità* del condensatore

$$C \;=\; \frac{Q}{\Delta\Phi} \;=\; \frac{\epsilon_0\Sigma}{D} \tag{23.11}$$

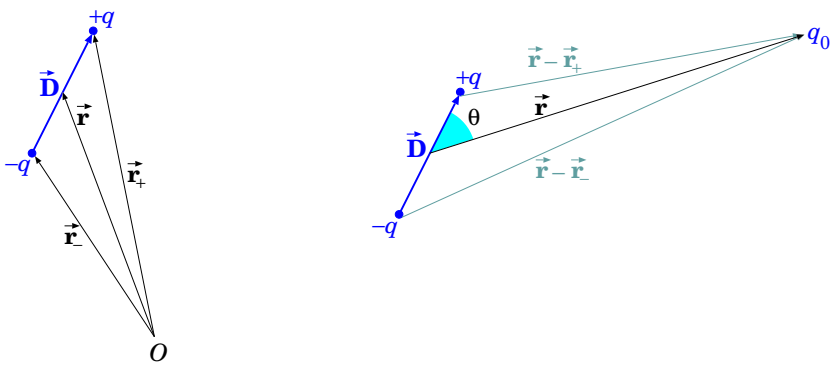


Figura 23.3: *A sinistra: schema di un dipolo elettrico di cariche $\pm q$ e separazione $\vec{\boldsymbol{D}}$. A destra: schema per il calcolo del potenziale elettrico generato da un dipolo.*

23.4 Dipoli elettrici

Un dipolo elettrico è costituito da un sistema di due cariche elettriche opposte $\pm q$, poste ad una distanza D. Possiamo definire la separazione delle cariche mediante un vettore-spostamento $\vec{\boldsymbol{D}}$, che va dalla carica $-q$ alla carica $+q$ (vedi Fig. 23.3).

Si definisce il *momento di dipolo elettrico* come

$$\vec{\boldsymbol{p}} \;=\; q\vec{\boldsymbol{D}} \tag{23.12}$$

23.4.1 Forze elettriche agenti su un dipolo

Consideriamo ora un dipolo elettrico $\vec{\boldsymbol{p}}$ posto in un campo elettrico $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$. L'azione del campo sul dipolo può essere ricavata dall'energia potenziale. Questa è calcolabile come somma delle due energie potenziali associate alle cariche $\pm q$ che formano il dipolo. Facciamo riferimento alla Fig. 23.3(sinistra). Le cariche si trovano nelle posizioni $\vec{\boldsymbol{r}}_\pm = \vec{\boldsymbol{r}} \pm \dfrac{\vec{\boldsymbol{D}}}{2}$, quindi troviamo:

$$\mathcal{U}(\vec{\boldsymbol{r}}) \;=\; q\Phi\left(\vec{\boldsymbol{r}} + \frac{\vec{\boldsymbol{D}}}{2}\right) - q\Phi\left(\vec{\boldsymbol{r}} - \frac{\vec{\boldsymbol{D}}}{2}\right) \;=\; q\,\vec{\boldsymbol{\nabla}}\Phi\cdot\vec{\boldsymbol{D}} \;=\; \vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}\Phi$$

Ora però ricordiamo anche che $\vec{\boldsymbol{E}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\Phi$, quindi:

$$\mathcal{U} \;=\; -\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}} \tag{23.13}$$

Come si muove un dipolo in un campo elettrico?

L'energia meccanica $\mathcal{E} + \mathcal{U}$ si conserva, e le forze elettriche agenti sul dipolo in generale tendono ad aumentare l'energia cinetica, quindi a diminuire l'energia potenziale. Questa diminuzione può avvenire in due modi: o ruotando il dipolo, o spostandolo. Analizziamo i due casi.

- *Rotazione.* Chiamando θ l'angolo fra il campo $\vec{\boldsymbol{E}}$ e il dipolo $\vec{\boldsymbol{p}}$, risulta

$$\mathcal{U} \;=\; -p\,E\,\cos\theta$$

  che per rotazione diventa minimo se $\cos\theta$ è massimo, vale a dire $\theta = 0$. Quindi il dipolo tende ad allinearsi come il campo elettrico.

- *Traslazione.* Consideriamo il dipolo già allineato con il campo elettrico. Quindi

$$\mathcal{U} \;=\; -p\,E$$

  Se il campo elettrico è uniforme, il dipolo non può modificare $\mathcal{U}$, quindi non sente forze. Viceversa, se il campo elettrico non è uniforme, il dipolo, per minimizzare $\mathcal{U}$, deve muoversi verso regioni di campo elettrico più intenso — tipicamente quindi, avvicinandosi alla sorgente del campo.

23.4.2 Potenziale elettrostatico prodotto da un dipolo

Il campo elettrostatico prodotto da un dipolo elettrico può essere calcolato con l'ausilio del potenziale elettrostatico. Se conosciamo il potenziale elettrostatico $\Phi_{dip}(\vec{\boldsymbol{r}})$ prodotto da un dipolo $\vec{\boldsymbol{p}}$, possiamo sempre calcolare il campo elettrostatico come $\vec{\boldsymbol{E}}_{dip} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\Phi_{dip}$.

Per semplicità, scegliamo un sistema di riferimento con l'origine O al centro del dipolo, come in Fig. 23.3(destra). Allora le cariche $\pm q$ sono localizzate rispettivamente in $\vec{\boldsymbol{r}}_\pm = \pm\dfrac{\vec{\boldsymbol{D}}}{2}$. Ciascuna genera nello spazio un potenziale elettrostatico

$$\Phi_\pm(\vec{\boldsymbol{r}}) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\pm q}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_\pm|}$$

Ovviamente il potenziale del dipolo è la somma:

$$\Phi_{dip}(\vec{\boldsymbol{r}}) \;=\; \Phi_+(\vec{\boldsymbol{r}}) + \Phi_-(\vec{\boldsymbol{r}}) \;=\; \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_+|} - \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_-|}\right)$$

Potremmo sviluppare fino in fondo questo ragionamento, ma richiede calcoli un po' lunghi. Scegliamo quindi un altro approccio.

Se il dipolo $\vec{\boldsymbol{p}}$, posto nell'origine, produce un potenziale $\Phi_{dip}(\vec{\boldsymbol{r}})$ (da determinare!) in ciascun punto $\vec{\boldsymbol{r}}$ dello spazio, una carica elettrica puntiforme q_0 posta in $\vec{\boldsymbol{r}}$ si trova ad una energia potenziale

$$\mathcal{U}_{q_0,dip} = q_0\,\Phi_{dip}(\vec{\boldsymbol{r}})$$

L'energia potenziale $\mathcal{U}_{q_0,dip}$ è caratteristica dell'interazione carica-dipolo, e può essere vista anche come l'energia potenziale del dipolo $\vec{\boldsymbol{p}}$ posto nel campo elettrico $\vec{\boldsymbol{E}}_{q_0}$ prodotto dalla carica q_0, posizionata in $\vec{\boldsymbol{r}}$. Per l'Eq. (23.13), essa vale $\mathcal{U}_{q_0,dip} = -\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_{q_0}$. Ora, il campo elettrico $\vec{\boldsymbol{E}}_{q_0}$ prodotto da q_0 nell'origine O dove si trova il dipolo è dato dalla legge di Coulomb: $\vec{\boldsymbol{E}}_{q_0}(O) = -\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}q_0 r^2\hat{\boldsymbol{r}}$. Il segno "meno" deriva dal fatto che la direzione che va dalla sorgente di campo (q_0) al punto dove si sonda il campo (O) è $-\hat{\boldsymbol{r}}$. Pertanto si trova:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{q_0,dip} &= -\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_0}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\right)\\ &= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}\end{aligned}$$

Per confronto, si ricava la forma del potenziale generato dal dipolo:

$$\begin{aligned}\Phi_{dip}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{p}}}{r^2}\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\,\cos\theta}{r^2}\end{aligned} \tag{23.14}$$

Da questa equazione si nota subito una cosa interessante: *il potenziale elettrostatico del dipolo decresce come* $\dfrac{1}{r^2}$. Anche senza addentrarci nei calcoli, deduciamo che il campo elettrico del dipolo — che si calcola con il gradiente del potenziale — deve decrescere come $\dfrac{1}{r^3}$.

Se poi vogliamo calcolare l'energia potenziale fra due dipoli $\vec{\boldsymbol{p}}_1$, $\vec{\boldsymbol{p}}_2$, esa può essere scritta come

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{dip1,dip2} &= -\vec{\boldsymbol{p}}_1\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_{dip2} = \vec{\boldsymbol{p}}_1\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}\Phi_{dip2}\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\vec{\boldsymbol{p}}_1\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}\left(\frac{\vec{\boldsymbol{p}}_2\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{21}}{r_{12}^2}\right)\end{aligned}$$

Anche qui, senza addentrarci nei calcoli, capiamo che $\mathcal{U}_{dip1,dip2} \propto \frac{1}{r_{12}^3}$, e quindi che la forza fra essi deve andare come $F_{dip1,dip2} \propto \frac{1}{r_{12}^4}$. I dettagli sono più complicati: dipendono dagli orientamenti dei due dipoli. Però ci interessa notare che le forze elettrostatiche fra dipoli si attenuano con la distanza molto più rapidamente che le forze fra cariche elettrica, che seguono invece la legge di Coulomb, $\propto \frac{1}{r^2}$.

23.4.3 Interazioni molecolari

Molte molecole sono dotate di dipoli elettrici intrinseci. L'esempio più ovvio è la molecola dell'acqua, H_2O: in essa i due atomi di idrogeno non sono esattamente opposti rispetto all'atomo di ossigeno, ma formano un angolo, dando alla molecola una forma leggermente a "V"; inoltre, i due elettroni dei due atomi di idrogeno tendono ad avvicinarsi all'atomo di ossigeno, cosicché questo assume un eccesso di carica negativa, lasciando gli atomi di idrogeno con un eccesso di carica positiva. Pertanto la molecola dell'acqua è polare.

Altre molecole non hanno un dipolo intrinseco. Tuttavia, in presenza di campi elettrici esterni la "nube di elettroni" (negativa) tende a spostarsi in direzione opposta al campo elettrico (ricordiamo che per gli elettroni $\vec{\boldsymbol{F}} = -e\vec{\boldsymbol{E}}$), creando così uno sbilanciamento di cariche nella molecola, che acquista di fatto un dipolo elettrico. Il campo elettrico esterno alla molecola potrebbe essere anche prodotto da molecole vicine.

Lo stesso meccanismo può avvenire anche fra atomi vicini: ciascuno di essi, con il suo campo elettrico, induce un dipolo elettrico negli atomi circostanti. In Fig. 23.4 è schematizzato un atomo: senza campi esterni la nube elettronica è centrata intorno al nucleo, mentre in presenza di un campo esterno $\vec{\boldsymbol{E}}$ la nube elettronica si sposta in direzione opposta, creando un dipolo elettrico indotto $\vec{\boldsymbol{p}} = Ze\vec{\boldsymbol{D}}$.

Si può costruire un modello semi-quantitativo di questa polarizzazione. Supponiamo che la forza che tenderebbe a ri-centrare la nuvola elettronica sul nucleo sia in prima approssimazione elastica: abbiamo visto nella Sezione 14.3 che questa ipotesi è ragionevole per spostamenti intorno ad una condizione di equilibrio. Quindi, sulla nube elettronica ($n.e.$) agiscono due forze: una dovuta al campo esterno, $\vec{\boldsymbol{F}}_{n.e.}^{est} = -Ze\vec{\boldsymbol{E}}$, e una dovuta al richiamo elastico del nucleo, $\vec{\boldsymbol{F}}_{n.e.}^{nucleo} = +k\vec{\boldsymbol{D}}$. In questa espressione k è una costante elastica efficace, che dipende dalla forma della nube elettronica e dalle cariche del nucleo e della nube — ci aspetteremmo $k \approx (Ze)^2$; il segno

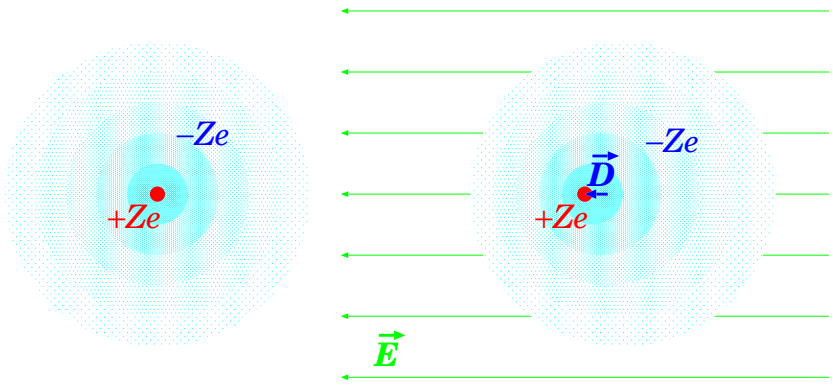


Figura 23.4: *Polarizzazione di un atomo: in assenza di campi esterni (a sinistra) la nube elettronica è simmetrica rispetto al nucleo e non c'è dipolo. In presenza di un campo elettrico $\vec{\boldsymbol{E}}$ (a destra) la nube elettronica si sposta in direzione opposta al campo, producendo una separazione $\vec{\boldsymbol{D}}$ fra il baricentro delle cariche negative e il nucleo positivo.*

+ indica che la nube elettronica è attratta verso il nucleo, che si trova in direzione $\vec{\boldsymbol{D}}$. La forza totale sulla nube elettronica è:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{n.e.} \;=\; -Ze\vec{\boldsymbol{E}} + k\vec{\boldsymbol{D}}$$

Affinché l'atomo sia in equilibrio con la sua nube elettronica questa forza deve essere nulla. Quindi $\vec{\boldsymbol{D}} = \dfrac{Ze}{k}\vec{\boldsymbol{E}}$. Il dipolo indotto nell'atomo è quindi $\vec{\boldsymbol{p}} = Ze\vec{\boldsymbol{D}} = \dfrac{Z^2e^2}{k}\vec{\boldsymbol{E}}$. Non conoscendo bene la forma di k non possiamo andare oltre nella trattazione, ma ci accontentiamo di dire che

$$\vec{\boldsymbol{p}} \;=\; \alpha\,\vec{\boldsymbol{E}} \tag{23.15}$$

ossia il dipolo indotto è proporzionale al campo elettrico applicato $\vec{\boldsymbol{E}}$. La costante α si chiama *polarizzabilità atomica.*

Una volta che molecole e/o atomi sono dotati di dipolo elettrico (intrinseco o indotto che sia) essi si possono scambiare interazioni elettriche: i dipoli si orientano nelle direzioni più favorite, tendendo a diminuire l'energia potenziale, e quindi ad avvicinarsi fra loro. Così si formano i legami molecolari.

Abbiamo notato già che tali legami devono avere una forza proporzionale all'inverso del cubo della distanza, $\propto \dfrac{1}{r^3}$, se sono fra un dipolo e ula carica

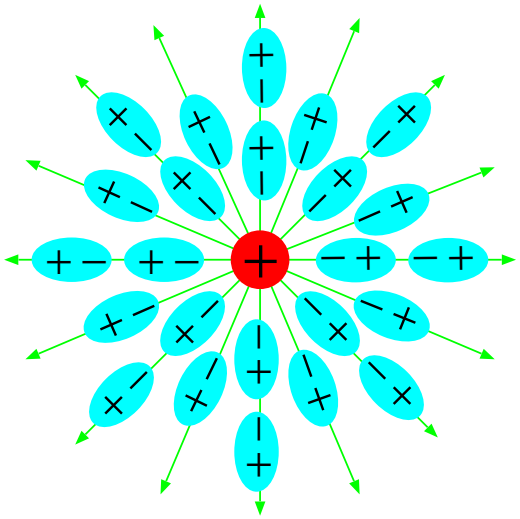


Figura 23.5: *Polarizzazione di un dielettrico.*

libera, oppure all'inverso della quarta potenza, $\propto \dfrac{1}{r^4}$, se sono fra due dipoli. Pertanto la loro intensità diminuisce rapidamente al crescere delle distanze, e quindi può giocare un ruolo importante solo a distanze interatomiche o intermolecolari.

23.4.4 Polarizzazione dei materiali dielettrici

Si chiamano genericamente *dielettrici* i materiali che non sono conduttori.

Quando viene applicato un campo elettrico esterno $\vec{\boldsymbol{E}}$ ad un dielettrico, gli atomi e/o le molecole si polarizzano: se hanno un dipolo intrinseco lo orientano in modo parallelo e concorde al campo elettrico; se non hanno un dipolo intrinseco, formano un dipolo indotto, in direzione parallela e concorde al campo elettrico. L'effetto collettivo di tutti questi dipoli elementari è di produrre una parziale schermatura del campo elettrico.

Il meccanismo si può capire osservando la Fig. 23.5: in questo esempio particolare, una carica elettrica $+q$ posta all'interno di un dielettrico induce una polarizzazione del medesimo. L'effetto netto è una concentrazione di cariche negative elementari in prossimità della carica $+q$, il cui effetto quindi risulta attenuato. Quindi la legge di Coulomb $\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$ per il campo non può più essere valida. Il campo elettrico deve essere attenuato, pertanto essa viene modificata come

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \qquad (\ \epsilon > \epsilon_0\ )$$

In generale, con lo stesso criterio, anche la legge di Gauss andrà modificata in:

$$\mathbf{\Phi}_{\rm ch}(\vec{\boldsymbol{E}}) \;=\; \frac{Q^{(\rm int)}}{\epsilon} \qquad\qquad (\;\epsilon > \epsilon_0\;) \tag{23.16}$$

Il valore di ϵ è caratteristico del materiale. In ogni caso è sempre $\epsilon > \epsilon_0$, ad esprimere che la polarizzazione del dielettrico produce sempre una diminuzione del campo elettrico.

Un'importante applicazione della polarizzazione dei dielettrici è nella costruzione di condensatori. Abbiamo visto nella Sezione 23.3.4, Eq. (23.11), che la capacità di un condensatore è $C = \dfrac{\epsilon_0 \Sigma}{D}$. Nella trattazione si assumeva che fra le due armature ci fosse il vuoto. Se invece queste vengono riempite da un dielettrico di costante ϵ (ricordiamo, $> \epsilon_0$), la capacità può essere aumentata fino a

$$C \;=\; \frac{Q}{\Delta\Phi} \;=\; \frac{\epsilon\Sigma}{D} \tag{23.17}$$

Riprenderemo l'argomento della polarizzazione dei dielettrici quando studieremo le onde elettromagnetiche nei materiali.

23.5 Campi magnetici prodotti da correnti stazionarie

Consideriamo la parte magnetica delle equazioni di Maxwell in regime stazionario, Eq. (23.5):

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}_{\rm ch}(\vec{\boldsymbol{B}}) &= 0 \\ \oint d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} &= \mu_0\, I_{\rm conc} \end{aligned} \tag{23.18}$$

La seconda equazione va sotto il nome di *legge di Ampere*. Analogamente alla legge di Gauss per i campi elettrostatici, essa consente di calcolare i campi magnetici prodotti da correnti elettriche in condizioni di simmetria particolari.

Per calcolare campi magnetici con l'ausilio della legge di Ampere occorre anzitutto sfruttare le simmetrie del problema, per porre vincoli sulla forma del campo. L'idea è di applicare trasformazioni geometriche (come

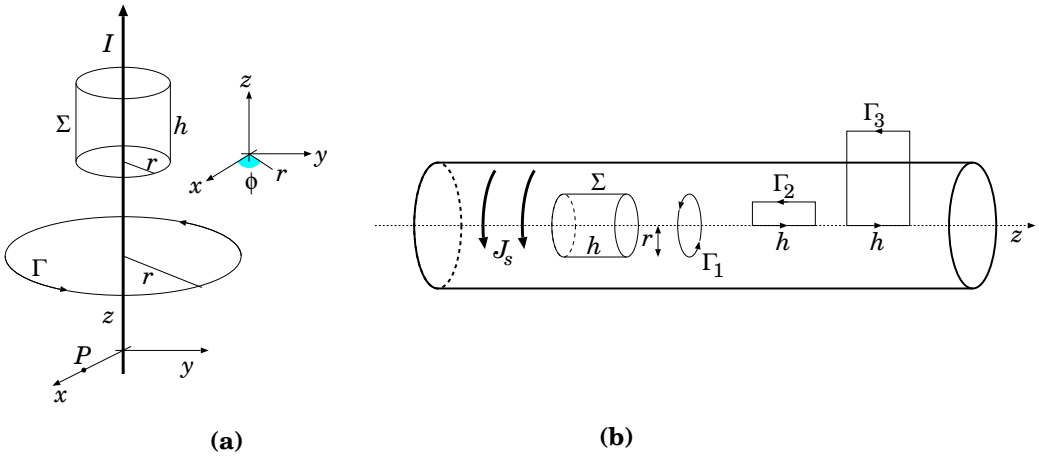


Figura 23.6: *Calcolo di campi magnetici usando la legge di Ampere e il flusso di $\vec{\boldsymbol{B}}$: filo infinito (a sinistra) e solenoide infinito (a destra).*

traslazioni, rotazioni, ...) che lasciano il sistema di correnti invariato. Quindi, anche il campo magnetico non deve subire modifiche. Una trasformazione particolare, utile trattando i campi magnetici, è l'*inversione spaziale*, che cambia segno alle tre coordinate cartesiane. Mentre i campi vettoriali ordinari subiscono la stessa trasformazione sulle tre componenti cartesiane, il campo magnetico, che è uno *pseudo-vettore*, mantiene le tre componenti invariate. Ciò è evidente se si considera la forza di Lorentz:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = q\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$$

Con l'inversione spaziale, le componenti di $\vec{\boldsymbol{F}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}$ cambiano segno. Quindi le componenti di $\vec{\boldsymbol{B}}$ devono rimanere invariate, per mantenere la validità della forza di Lorentz — che, come già detto, è anche una definizione del campo magnetico.

Vediamo alcuni esempi di calcolo di campo magnetico.

23.5.1 Campo magnetico prodotto da un filo rettilineo

Consideriamo un filo rettilineo molto lungo, percorso da una corrente costante I. Qui, per "molto lungo", intendiamo che le distanze r da esso, in cui andiamo a calcolare il campo magnetico, sono molto minori della lunghezza del filo, cosicché esso può al limite apparire come infinito.

Utilizziamo coordinate cilindriche con l'asse z lungo il filo (Fig. 23.6(a)). Il sistema è invariante per traslazioni lungo z e per rotazioni intorno a z,

quindi:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \phi} = 0$$

Consideriamo il flusso di $\vec{\boldsymbol{B}}$ attraverso la superficie cilindrica Σ. Grazie alle invarianze rispetto a z e ϕ possiamo scrivere la solenoidalità di $\vec{\boldsymbol{B}}$ come:

$$\boldsymbol{\Phi}_\Sigma(\vec{\boldsymbol{B}}) = \underbrace{B_z\,\pi r^2}_{\text{base superiore}} + \underbrace{B_r\,2\pi r h}_{\text{superficie laterale}} + \underbrace{(-B_z\,\pi r^2)}_{\text{base inferiore}}$$

da cui deduciamo che:

$$B_r = 0$$

Consideriamo un generico punto P, e fissiamo l'asse x in modo che passi per esso, cosicché le sue coordinate cartesiane sono $(x_P, 0, 0)$. Una rotazione di 180° intorno all'asse y, seguita da un'inversione spaziale, lascia invariato il sistema: infatti, l'asse del filo resta immutato e il verso della corrente cambia segno due volte, prima con la rotazione e poi con l'inversione. Anche il punto P resta invariato, poiché la rotazione lo porta in $(-x_P, 0, 0)$ e l'inversione lo riporta in $(x_P, 0, 0)$. Allora il campo $\vec{\boldsymbol{B}}$ nel punto P deve essere invariato. D'altra parte, la componente B_z cambia segno per rotazione, ma resta invariata per inversione. L'unica spiegazione è che:

$$B_z = 0$$

Quindi il campo magnetico ha la forma:

$$\vec{\boldsymbol{B}} = B_\phi(r)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Per calcolarne l'intensità usiamo la legge di Ampere applicato alla linea chiusa Γ:

$$\mu_0 I = \oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{s}} = 2\pi r B_\phi(r)$$

da cui deduciamo

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{23.19}$$

23.5.2 Campo magnetico prodotto da un solenoide rettilineo

Un solenoide è un avvolgimento di N spire percorse da una corrente I intorno ad un supporto cilindrico.

Detta $2L$ la lunghezza del solenoide, possiamo caratterizzare il solenoide con la *densità di spire* $n = \dfrac{N}{2L}$, cosicché per una porzione di solenoide di lunghezza $\Delta\ell$ il numero di spire è

$$\Delta N = n\,\Delta\ell$$

e la corrente totale circolante in esse è

$$\Delta I = I\,\Delta N = n\,I\,\Delta\ell$$

Riferendoci alla Fig. 23.6(b), ed usando coordinate cilindriche, con l'asse z lungo l'asse del cilindro, il sistema è invariante per traslazioni e rotazioni lungo l'asse, quindi:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \phi} = 0$$

Calcoliamo il flusso di $\vec{\boldsymbol{B}}$ attraverso la superficie chiusa Σ, che è nullo per la solenoidalità. I flussi attraverso le due basi si cancellano, rimane:

$$0 = \boldsymbol{\Phi}_\Sigma(\vec{\boldsymbol{B}}) = 2\pi r h B_r \quad \Rightarrow \quad B_r = 0$$

Applicando la legge di Ampere alla curva Γ_1, a cui non è concatenata nessuna corrente, troviamo:

$$0 = \oint_{\Gamma_1} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{s}} = 2\pi r B_\phi \quad \Rightarrow \quad B_\phi = 0$$

Quindi il campo magnetico ha la forma:

$$\vec{\boldsymbol{B}} = B_z(r)\hat{\boldsymbol{z}}$$

Applicando la legge di Ampere alla curva Γ_2, a cui non è concatenata nessuna corrente, troviamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\Gamma_2} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{s}} = h[B_z(r=0) - B_z(r)] \\ &\Rightarrow \quad B_z(r) = B_z(r=0) \quad (r \text{ all'interno del cilindro}) \end{aligned}$$

Quindi il campo magnetico all'interno di un solenoide infinito è uniforme e diretto lungo l'asse del cilindro.

Invece, considerando la curva Γ_3, cui è concatenata una corrente $I_{\text{conc}} = nIh$, troviamo:

$$\begin{aligned} \mu_0 nIh &= \oint_{\Gamma_3} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{s}} = h[B_z(r=0) - B_z(r)] \\ &\Rightarrow \quad B_z(r=0) - B_z(r) = \mu_0 nI \quad (r \text{ all'esterno del cilindro}) \end{aligned}$$

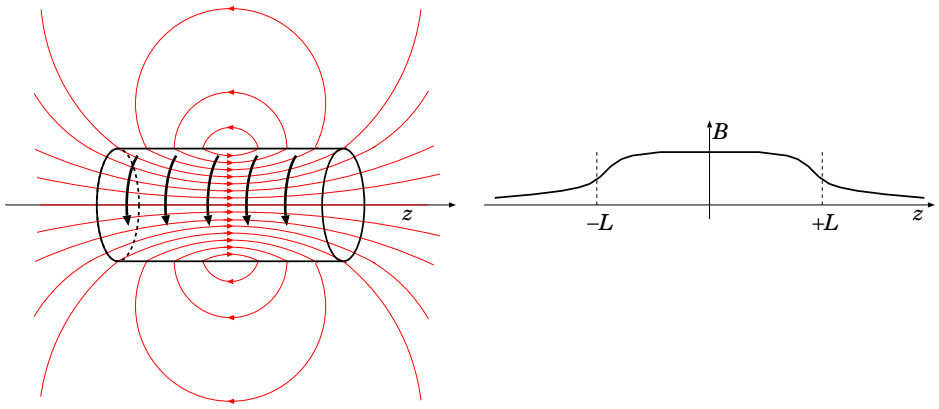


Figura 23.7: *Campo magnetico generato da un solenoide reale.*

Quindi anche il campo magnetico all'esterno del cilindro infinito è uniforme e diretto lungo l'asse del cilindro.

Riassumendo, abbiamo trovato che il campo magnetico ha un valore uniforme $B_z^{(int)}$ all'interno del solenoide, e un valore uniforme $B_z^{(est)}$ all'esterno; la differenza fra i due valori è $B_z^{(int)} - B_z^{(est)} = \mu_0 n I$.

Ora qui dobbiamo fare una congettura, che non dimostriamo [1]: *il campo all'esterno del solenoide deve essere nullo.* Per capirlo, proviamo ad assumere che $B_z^{(est)} \neq 0$. Avremmo dunque un campo magnetico non nullo che riempie un volume che si estende all'infinito. Questo sarebbe vero per qualunque raggio del solenoide, al limite anche quando il solenoide diventa infinitamente piccolo, e questa cosa appare abbastanza assurda.

In conclusione, il campo magnetico generato dal solenoide infinito è:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{B}} &= \mu_0 n I \qquad \text{(all'interno del solenoide)} \\ \vec{\boldsymbol{B}} &= 0 \qquad \text{(all'esterno del solenoide)} \end{aligned} \tag{23.20}$$

Per concludere, ricordiamo che un solenoide infinito, ovviamente, non esiste. Un solenoide reale produce un campo magnetico come quello rappresentato in Fig. 23.7.

[1] Si potrebbe dimostrare in maniera matematica che $B_z(r = 0) = \mu_0 n I$, ma appesantiremmo la trattazione in maniera eccessiva.

23.6 Esercizi su campi elettromagnetici

Esercizio 23.1. *Un condensatore piano ha armature di superficie* $\Sigma = 1\ \mathrm{cm}^2$ *a distanza* $D = 1$ mm. *Al suo interno viene creato un campo elettrico* $E = 10^5$ V/m. *Qual è la differenza di potenziale* $\Delta\Phi$ *necessaria fra le armature? Quant'è la carica elettrica* Q *depositata su ciascuna delle armature?*

Risposta. *Assumiamo l'approssimazione di campo elettrico uniforme, ragionevole poiché* D *è piccolo rispetto a* Σ. *In questo caso,* $\Delta\Phi = E \cdot D = (10^5\ \mathrm{V/m}) \cdot (10^{-3}\ \mathrm{m}) = 100$ V. *Per trovare* Q *occorre determinare la capacità* $C = \dfrac{Q}{\Delta\Phi}$*: essa si ricava dalla geometria del condensatore,* $C = \dfrac{\epsilon_0 \Sigma}{d} = \dfrac{(8.854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}})(10^{-4}\ \mathrm{m^2})}{10^{-3}\ \mathrm{m}} = 8.854 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{C^2N^{-1}m^{-1}}$. *La carica elettrica è quindi* $Q = \Delta\Phi \cdot C = 8.854 \cdot 10^{-11}$ C.

Osservazione sulle unità di misura. *Abbiamo usato tutte le unità di misura del S.I., quindo la carica* deve *venire in Coulomb. Verifichiamo se ciò è vero. Abbiamo visto che* C *è misurato in* $\mathrm{C^2N^{-1}m^{-1}}$. *Ora,* $\Delta\Phi$ *si misura in Volt, cioè in Joule divisi per Coulomb:* $\mathrm{V = J/C = NmC^{-1}}$. *Vediamo quindi che il prodotto* $C \cdot \Delta\Phi$ *si misura effettivamente in Coulomb.*

Esercizio 23.2. *Come si modifica la capacità del condensatore dell'esercizio precedente, se fra le armature, anziché il vuoto, c'è un materiale dielettrico con costante* $\epsilon_r = 3.4$ *(per es. il plexiglass)? Per avere sempre un campo elettrico* $E = 10^5$ V/m, *come variano* $\Delta\Phi$ *e* Q*?*

Risposta.
In presenza di dielettrici omogenei, tutte le equazioni che contengono ϵ_0 *vanno modificate, sostituendo* $\epsilon_0 \to \epsilon \equiv \epsilon_r \epsilon_0$. *Pertanto, in particolare, la capacità diventa* $C = \dfrac{\epsilon_r \epsilon_0 \Sigma}{D} = 3.4 \cdot 8.854 \cdot 10^{-13}$ *(unità S.I.)* $= 3.010 \cdot 10^{-12}$ *(unità S.I.). La differenza di potenziale non cambia: è sempre* $\Delta\Phi = D \cdot E = 100$ V. *Invece cambia la carica sulle armature:* $Q = C \cdot \Delta\Phi = 3.010 \cdot 10^{-10}$ C.

Osservazione: *sappiamo che l'effetto del dielettrico è di polarizzarsi, schermando parzialmente le cariche elettriche. Pertanto, come abbiamo appena visto, per realizzare lo stesso campo elettrico, è necessario depositare una carica elettrica maggiore sulle armature.*

Esercizio 23.3. *Si vuole costruire un selettore di velocità come quello dello spettrometro di massa (Sezione 21.4), che selezioni particelle cariche di velocità* $v = 10^5$ m/s. *Il campo elettrico* E *è realizzato applicando una differenza di potenziale* $\Delta\Phi = 5$ V *fra due armature distanti* $D = 2$ mm. *Quanto vale il campo elettrico* E*? Quanto deve valere il campo magnetico* B*? Quest'ultimo viene realizzato con un solenoide, lungo* 5 cm, *su cui sono avvolte 1000 spire. Quanta corrente* I *deve circolare nelle spire?*

Risposte. *Il campo elettrico vale* $E = \dfrac{\Delta\Phi}{D} = 2.5 \cdot 10^3$ V/m — *e deve essere orientato perpendicolare alla direzione di volo, come sappiamo. Il*

campo magnetico deve valere $B = \dfrac{E}{v} = 0.025$ T *— orientato perpendicolare sia alla direzione di volo che al campo elettrico. Il solenoide ha densità di spire* $n = \dfrac{1000}{5\ \text{cm}} = 2 \cdot 10^4\ \text{m}^{-1}$. *Poiché* $B = \mu_0 n I$, *deve essere* $I = \dfrac{B}{\mu_0 n} = \dfrac{0.025\ \text{T}}{(4\pi \cdot 10^{-7}\ \textit{(unità S.I.)})(2 \cdot 10^4\ \text{m}^{-1})} = 0.995$ A.

Esercizio 23.4. *In una regione di spazio è creato un campo magnetico uniforme* B, *mediante un solenoide con densità di spire* $n = 10^4\ \text{m}^{-1}$ *in cui circola una corrente* $I = 150$ A. *Calcolare* B. *Un protone in questo campo descrive una traiettoria ad arco di cerchio, con raggio di curvatura* $\rho = 2.5$ cm. *Calcolare la quantità di moto* p *e la velocità* v *del protone.*

Risposte. *Il campo magnetico vale* $B = \mu_0 n I = 1.885$ T. *La quantità di moto del protone si calcola con la formula* $p = \rho q B$, *essendo* $q = e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C. *Quindi si ottiene* $p = 7.549 \cdot 10^{-21}\ \text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$. *La massa del protone è* $m_p = 1.673 \cdot 10^{-27}$ kg, *quindi la velocità è* $v = \dfrac{p}{m_p} = 4.51 \cdot 10^6$ m/s.

Capitolo 24

Onde elettromagnetiche

24.1 Premessa: che cos'è un'onda?

24.1.1 Le onde progressive

Che cosa intendiamo per "onda progressiva"? In generale, qualunque proprietà ψ dello spazio che, al passare del tempo, si propaga traslando nello spazio con una data velocità $\vec{\boldsymbol{u}}$ e mantenendo la stessa forma. Questa "proprietà", ψ, può essere una qualunque grandezza fisica (una pressione, una temperatura, ...). Noi qui siamo interessati ai campi elettrici e magnetici, ma in questa sezione stiamo sul generale.

Dunque abbiamo una proprietà ψ definita in qualunque punto dello spazio, che può evolvere nel tempo, quindi abbiamo un *campo* $\psi(\vec{\boldsymbol{r}}; t)$.

Immaginiamo di "fotografare" la sua configurazione all'istante $t = 0$, ottenendo quindi una funzione della posizione:

$$\Psi_0(\vec{\boldsymbol{r}}) \quad \equiv \quad \psi(\vec{\boldsymbol{r}}; t = 0)$$

(vd Fig. 24.1). Poi all'istante t ne facciamo un'altra istantanea, ottenendo una nuova configurazione

$$\Psi_t(\vec{\boldsymbol{r}}) \quad \equiv \quad \psi(\vec{\boldsymbol{r}}; t)$$

Per la definizione data, le forme $\Psi_0(\vec{\boldsymbol{r}})$ e $\Psi_t(\vec{\boldsymbol{r}})$ devono differire solo per una traslazione, definita dal vettore-spostamento

$$\vec{\boldsymbol{s}} \quad \equiv \quad \vec{\boldsymbol{u}}\, t$$

cioè, traslando la forma $\Psi_0(\vec{\boldsymbol{r}})$ nello spazio di uno spostamento $\vec{\boldsymbol{s}}$, essa si deve sovrapporre esattamente alla forma $\Psi_t(\vec{\boldsymbol{r}})$.

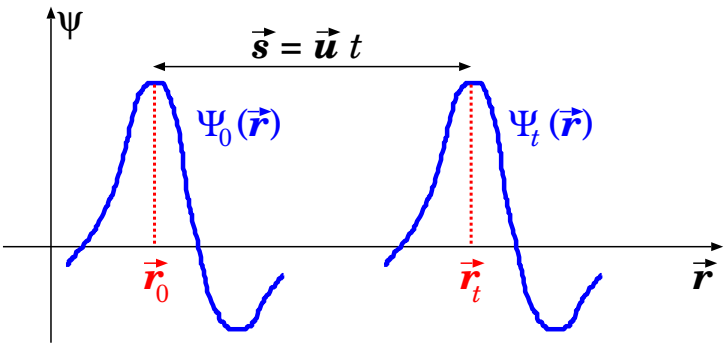


Figura 24.1: *Due "istantanee" di un'onda piana, prese a $t = 0$ e a un diverso t.*

Esprimiamo in termini matematici questa proprietà. Un generico punto che si muove insieme all'onda possiede velocità $\vec{u}$, quindi se a $t = 0$ si trova in $\vec{r}_0$, all'istante t si trova in $\vec{r}_t = \vec{r}_0 + \vec{u}t$. Perché l'onda mantenga la stessa forma, deve essere

$$\Psi_0(\vec{r}_0) \;=\; \Psi_t(\vec{r}_t) \;=\; \Psi_t(\vec{r}_0 + \vec{u}t)$$

da cui deduciamo che Ψ_t può essere sempre espressa in termini di Ψ_0 così:

$$\Psi_t(\vec{r}) \;=\; \Psi_0(\vec{r} - \vec{u}t)$$

e quindi che in maniera del tutto generale possiamo esprimere $\psi(\vec{r}; t)$ come:

$$\psi(\vec{r}; t) \;=\; \Psi_0(\vec{r} - \vec{u}t) \tag{24.1}$$

24.1.2 Le onde piane

Ora scegliamo un sistema di assi cartesiani in modo che l'asse z sia orientato come la velocità $\vec{u}$: quindi $\vec{u} = u\hat{z}$. Possiamo dunque scrivere l'Eq. (24.1) come:

$$\psi(x, y, z; t) \;=\; \Psi(x, y, z - ut)$$

(abbiamo omesso il pedice "0" alla Ψ, visto che d'ora in poi non ci serve più).

Se Ψ (e quindi ψ) non dipendono dalle coordinate x, y, l'onda appare identica a sè stessa su tutti i piani ortogonali alla direzione di propagazione $\hat{z}$. In tal caso possiamo scrivere

$$\psi(z; t) \;=\; \Psi(z - ut) \tag{24.2}$$

e diciamo che è un'*onda piana*.

Ora, Ψ è funzione di un solo argomento, $z - ut$, quindi possiamo indicare con Ψ' la sua derivata, rispetto al suo unico argomento, senza ambiguità. Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \Psi' \cdot \frac{d(z-ut)}{dt} = -u\,\Psi' \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \Psi' \cdot \frac{d(z-ut)}{dz} = \Psi' \end{aligned}$$

ovvero

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -u\,\frac{\partial \psi}{\partial z} \tag{24.3}$$

Quindi, la velocità u di propagazione dell'onda è definita dalle derivate parziali di ψ rispetto a t e a z.

Un'altra forma, del tutto equivalente all'Eq. (24.2), può essere scritta così:

$$\psi(z;t) = \varphi\left(t - \frac{z}{u}\right) \tag{24.4}$$

(basta definire $\varphi(\xi) \equiv \Psi\,(-u\xi)$ per qualunque valore dell'argomento ξ).

Si può dimostrare che le funzioni che hanno la forma dell'Eq. (24.2) sono *tutte* e *sole* quelle che soddisfano la seguente *equazione differenziale alle derivate parziali*:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \tag{24.5}$$

Che la forma Eq. (24.2) soddisfi l'Eq. (24.5) si può provare per sostituzione diretta. In effetti, la funzione Ψ ora dipende da un solo argomento, quindi possiamo chiamare Ψ', Ψ'' le sue derivate prima e seconda, rispetto all'unico argomento, senza alcuna ambiguità. Allora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \Psi'(z-ut) \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -u\Psi'(z-ut) \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= \Psi''(z-ut) \quad ; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = u^2\Psi''(z-ut) \end{aligned}$$

e l'Eq. (24.5) è soddisfatta.

24.1.3 Le onde monocromatiche

Un particolare tipo di onda piana è l'*onda monocromatica*.

Essa è definita come un'onda dotata di una *oscillazione armonica nel tempo* con una *frequenza di oscillazione* ν precisa. Oscillazione armonica

nel tempo significa che $\psi(z;t) \approx \cos(\omega t + \phi)$, dove la frequenza angolare ω è collegata al periodo di oscillazione T e alla frequenza di oscillazione ν dalle relazioni:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\,\nu \tag{24.6}$$

Poiché la forma dell'onda piana è del tipo $\Psi(z - ut)$, l'onda monocromatica in particolare deve essere della forma

$$\psi \approx \cos\left[k(z - ut) + \phi\right]$$

essendo k una quantità che ha dimensioni come l'inverso di una lunghezza — acciocché $k(z - ut)$ sia un numero privo di dimensioni e possa quindi essere argomento di un coseno. Occorre inoltre che compaia il termine ωt, quindi deve essere $\omega = ku$. Quindi un'onda piana monocromatica ha la forma generale:

$$\psi(z;t) = A\,\cos(kz - \omega t + \phi) \qquad \left(\, k = \frac{\omega}{u} \,\right) \tag{24.7}$$

Il parametro k si chiama *numero d'onda*. Il parametro A si chiama *ampiezza dell'onda*.

Dalla forma dell'Eq. (24.7) si nota che l'onda monocromatica è periodica sia nel tempo che nello spazio. In effetti, una variazione di 2π nell'argomento del coseno può essere realizzata sia con $\Delta t = \dfrac{2\pi}{\omega}$, sia con $\Delta z = \dfrac{2\pi}{k}$. Il primo caso è il periodo T, già definito. Il secondo caso definisce la *lunghezza d'onda*:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{24.8}$$

Ricordando che $k = \dfrac{\omega}{u} = 2\pi\dfrac{\nu}{u}$ si ottiene $\lambda = \dfrac{u}{\nu}$, ovvero:

$$\lambda \cdot \nu = u \tag{24.9}$$

relazione fondamentale che lega frequenza ν, lunghezza d'onda λ, e velocità di propagazione u di un'onda monocromatica.

La forma dell'onda in funzione della posizione z e la sua evoluzione nel tempo sono raffigurate in Fig. 24.2.

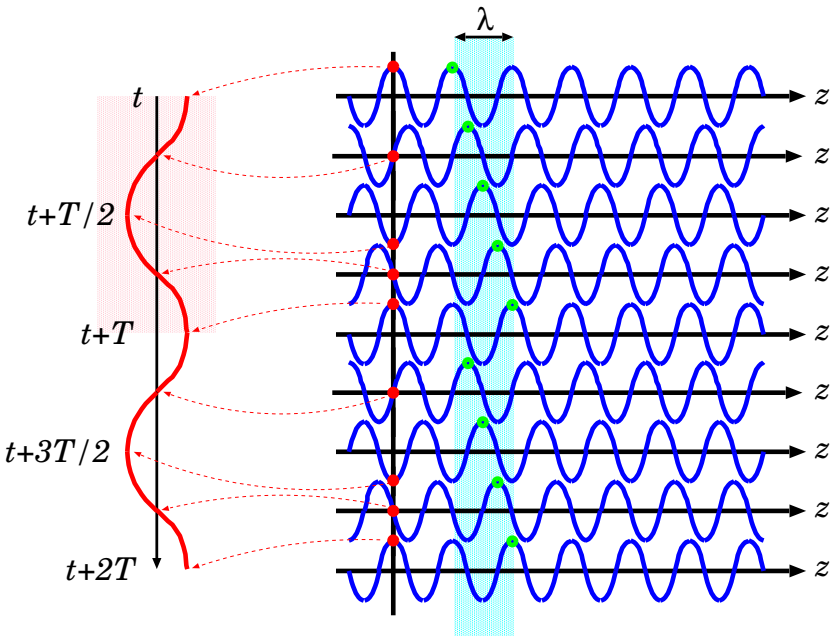


Figura 24.2: *Onda monocromatica: forma spaziale "fotografata" in diversi istanti temporali (curve blu su asse z orizzontale) ed evoluzione temporale in un punto z preciso (curva rossa su asse t verticale). Sono evidenziate la lunghezza d'onda λ (azzurro) e il periodo T (rosa).*

24.1.4 Formalismo complesso delle onde monocromatiche (*)

Nella trattazione matematica delle onde monocromatiche, è spesso utile descrivere la quantità ψ come se assumesse valori complessi. Ricordando che

$$\mathrm{e}^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

l'Eq. (24.7) può essere modificata in

$$\psi(z;t) \quad = \quad A\,\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \qquad \left(k \;=\; \frac{\omega}{u} \right) \tag{24.10}$$

dove anche A è una quantità complessa: $A = |A|\mathrm{e}^{i\phi}$. Siccome in Fisica classica tutte le quantità sono espresse da numeri reali [1], solo la parte reale

[1] Invece, in meccanica quantistica, la "funzione d'onda associata ad una particella è intrisecamente complessa.

di ψ alla fine sarà di rilevanza. Ricordando che $\mathbf{Re}\left[\mathrm{e}^{-\alpha}\right] = \cos\alpha$, otteniamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{Re}\left[\psi(z;t)\right] &= \mathbf{Re}\left[A\,\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}\right] = |A|\,\mathbf{Re}\left[\mathrm{e}^{i(kz-\omega t+\phi)}\right] \\ &= |A|\,\cos(kz-\omega t+\phi)\end{aligned}$$

con il che si ripristina la forma originaria dell'Eq. (24.7).

La ragione di trattare ψ come un numero complesso sta nella notevole semplificazione che la funzione esponenziale fornisce, rispetto alle funzioni trigonometriche. Per esempio, le dipendenze temporale (ωt) e spaziale (kz) possono essere fattorizzate dalla fase ϕ:

$$\psi(z;t) = |A|\,\mathrm{e}^{i(kz-\omega t+\phi)} = |A|\,\mathrm{e}^{ikz}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{e}^{i\phi}$$

e le derivate parziali $\dfrac{\partial}{\partial z}$ e $\dfrac{\partial}{\partial t}$ si riducono a semplici fattori moltiplicativi:

$$\frac{\partial}{\partial z}\psi = ik\psi \qquad ; \qquad \frac{\partial}{\partial t}\psi = -i\omega\psi$$

L'equazione delle onde, Eq. (24.5), con il formalismo complesso, prende la semplice forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} &= u^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \\ -\omega^2\psi &= -u^2k^2\psi\end{aligned}$$

da cui la relazione $k = \dfrac{\omega}{u}$ è manifesta.

24.2 Equazioni di Maxwell in forma differenziale

Riprendiamo le equazioni di Maxwell, Eq. (23.3):

$$\mathbf{\Phi}_{\mathrm{ch}}(\vec{\boldsymbol{E}}) = \oint d\vec{\boldsymbol{\Sigma}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{Q^{(\mathrm{int})}}{\epsilon_0} \qquad ; \qquad \mathbf{\Phi}_{\mathrm{ch}}(\vec{\boldsymbol{B}}) = \oint d\vec{\boldsymbol{\Sigma}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}} = 0$$

$$\oint d\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}} = -\mathbf{\Phi}_{\mathrm{conc}}\left(\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\right) \qquad ; \qquad \oint d\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0\left[I_{\mathrm{conc}} + \epsilon_0\mathbf{\Phi}_{\mathrm{conc}}\left(\frac{\partial\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right)\right]$$

Nel capitolo precedente, la scrittura in "forma integrale" (con circuitazioni e flussi) si è dimostrata utile per calcolare campi elettrici e magnetici in configurazioni altamente simmetriche.

Tuttavia, in altre situazioni è più maneggevole un'altra scrittura, che contiene derivate invece che integrali. Qui riportiamo le *equazioni di Maxwell in forma differenziale*, dimostrando l'equivalenza con la forma integrale successivamente.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
&\begin{cases}
\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} &= -\dfrac{\partial B_x}{\partial t} \\[2ex]
\dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} &= -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} \\[2ex]
\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} &= -\dfrac{\partial B_z}{\partial t}
\end{cases} \\
&\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \\
&\begin{cases}
\dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} &= \mu_0 J_x + \epsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial E_x}{\partial t} \\[2ex]
\dfrac{\partial B_x}{\partial z} - \dfrac{\partial B_z}{\partial x} &= \mu_0 J_y + \epsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial E_y}{\partial t} \\[2ex]
\dfrac{\partial B_y}{\partial x} - \dfrac{\partial B_x}{\partial y} &= \mu_0 J_z + \epsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial E_z}{\partial t}
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{24.11}
$$

Qui ricordiamo che $\vec{\boldsymbol{J}}$ è la *densità di corrente*.Inoltre è stata introdotta la *densità di carica elettrica in volume*

$$
\rho = \frac{\delta Q}{\delta V} \tag{24.12}
$$

24.2.1 Dimostrazioni (*)

Cominciamo con i flussi attraverso superfici chiuse. Scegliamo una superficie chiusa costituita da un parallelepipedo di spigoli infinitesimi dx, dy, dz paralleli agli assi cartesiani, come nella Fig. 24.3, a sinistra. Allora, il calcolo di $\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{ch}}(\vec{\boldsymbol{E}})$ può essere suddiviso sulle 6 facce del parallelepipedo, dove si tiene conto che l'orientamento del versore normale alla superficie selezione una

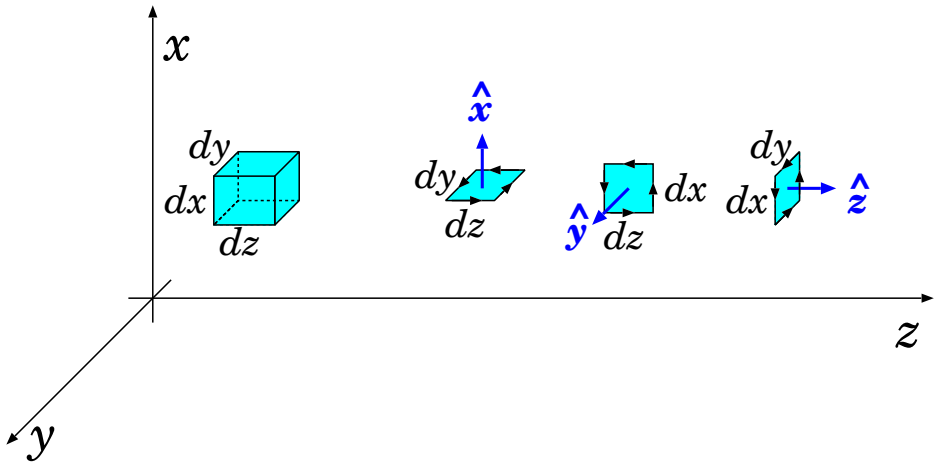


Figura 24.3: *Figure di ausilio per scrivere le equazioni di Maxwell in forma differenziale.*

precisa componente cartesiana di $\vec{\boldsymbol{E}}$.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}_{\rm ch}(\vec{\boldsymbol{E}}) &= -dy\,dz\,E_x(x,y,z) \;+ dy\,dz\,E_x(x+dx,y,z) \\
&\quad -dx\,dz\,E_y(x,y,z) \;+ dx\,dz\,E_y(x,y+dy,z) \\
&\quad -dx\,dy\,E_z(x,y,z) \;+ dx\,dy\,E_z(x,y,z+dz) \\
&= \quad dy\,dz\,\frac{\partial E_x}{\partial x}dx \\
&\quad +dx\,dz\,\frac{\partial E_y}{\partial y}dy \\
&\quad +dx\,dy\,\frac{\partial E_z}{\partial z}dz \\
&= (dx\,dy\,dz)\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)
\end{aligned}
$$

Notiamo che $\delta V = dx\,dy\,dz$ è il volumetto racchiuso nel parallelepipedo. Chiamiamo $\delta Q^{(\rm int)} = \rho\,\delta V$ la carica elettrica totale in esso contenuta. Pertanto, l'equazione $\boldsymbol{\Phi}_{\rm ch}(\vec{\boldsymbol{E}}) = \dfrac{\delta Q^{(\rm int)}}{\epsilon_0}$ prende la forma

$$
\delta V\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = \delta V\,\frac{\rho}{\epsilon_0}
$$

da cui si ricava la prima delle Eq. (24.11). Il ragionamento per ricavare la terza è identico.

Ora passiamo alle circuitazioni. Partiamo dall'equazione $\oint d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = -\boldsymbol{\Phi}_{\text{conc}}\left(\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\right)$, e scegliamo per la circuitazione una linea chiusa rettangolare di lati dy, dz paralleli agli assi cartesiani y, z, come nel secondo schema della Fig. 24.3. Con la scelta fatta, la superficie concatenata alla linea chiusa è orientata come $\hat{\boldsymbol{x}}$. La circuitazione si calcola come:

$$\begin{aligned}\oint d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} &= dy\,[E_y(x,y,z) - E_y(x,y,z_d z)] \;+\; dz\,[-E_z(x,y,z) + E_z(x,y+dy,z)] \\ &= dy\,dz\left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right]\end{aligned}$$

Invece il flusso concatenato si calcola solo considerando la componente lungo x di $\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}$:

$$\boldsymbol{\Phi}_{\text{conc}}\left(\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\right) = dy\,dz\,\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

Quindi l'equazione diventa:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

che è la componente-x del secondo gruppo di equazioni in Eq. (24.11). Con ragionamenti del tutto analoghi si ottengono anche le componenti lungo y e z, scegliendo come circuitazioni le altre due della Fig. 24.3. In generale, la linea di circuitazione deve essere scelta in modo che il versore della superficie concatenata sia orientato come uno dei tre versori cartesiani.

Anche l'equazione $\oint d\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0\left[I_{\text{conc}} + \epsilon_0 \boldsymbol{\Phi}_{\text{conc}}\left(\frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\right)\right]$ si elabora in modo analogo. C'è un elemento in più da considerare, però: I_{conc}. Questa è la corrente che attraversa la superficie concatenata alla linea di circuitazione. A seconda di come è orientata tale superficie, si seleziona una componente della densità di corrente, $\vec{\boldsymbol{J}}$. Per esempio, per una linea di circuitazione che giace sul piano (y, z), come la prima circuitazione della Fig. 24.3, la superficie concatenata è orientata lungo $\hat{\boldsymbol{x}}$, pertanto la corrente cocatenata attraverso la superficie $\delta\Sigma = dy\,dz$ deve essere $\delta I_{\text{conc}} = dy\,dz\,J_x$.

24.3 Equazioni di Maxwell nel vuoto

Riprendiamo le equazioni di Maxwell, Eq. (24.11), e scriviamole in assenza di cariche e correnti elettriche: $\rho = 0$ e $\vec{\boldsymbol{J}} = 0$.

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases} ; \quad \begin{cases} \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} = \epsilon_0\mu_0\dfrac{\partial E_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial B_x}{\partial z} - \dfrac{\partial B_z}{\partial x} = \epsilon_0\mu_0\dfrac{\partial E_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial B_y}{\partial x} - \dfrac{\partial B_x}{\partial y} = \epsilon_0\mu_0\dfrac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases} \tag{24.13}$$

Poiché le quantità ϵ_0, μ_0 compaiono solo moltiplicate fra loro, si suole porre

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} \tag{24.14}$$

ricordando i valori numerici $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ Nm^{2}C^{-2} e $\dfrac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$ Ns^{2}C^{-2}, si ottiene $\dfrac{1}{\epsilon_0\mu_0} = 9 \cdot 10^{16}$ m^{2}s^{-2}, quindi

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \tag{24.15}$$

Sì, è proprio lei, la velocità della luce! Vedremo nel seguito perché entra proprio qui.

La trattazione generale di queste equazioni è complessa e richiede una matematica avanzata.

Qui affronteremo solo alcuni casi particolari: mostriamo che queste equazioni presentano soluzioni matematiche in cui i campi elettrico e magnetico si possono propagare nello spazio in forma di *onde piane* e *onde sferiche*, con una velocità di propagazione pari alla velocità della luce, c.

Prima di procedere, facciamo subito notare che, ovviamente, le Eq. (24.13) ammettono soluzioni in cui sia $\vec{\boldsymbol{E}}$ che $\vec{\boldsymbol{B}}$ siano uniformi nello

spazio e costanti nel tempo. D'altronde queste soluzioni, per quanto matematicamente valide, sono fisicamente assurde e prive di interesse: che cosa potrebbe mai aver prodotto dei campi uniformi in uno spazio infinito, che peraltro sarebbero sempre esistiti???

24.4 Onde elettromagnetiche piane

Consideriamo una situazione di simmetria nello spazio, per cui i campi $\vec{\boldsymbol{E}}, \vec{\boldsymbol{B}}$ non dipendano dalle coordinate x, y, per cui

$$\vec{\boldsymbol{E}} \equiv \vec{\boldsymbol{E}}(z,t) \qquad ; \qquad \vec{\boldsymbol{B}} \equiv \vec{\boldsymbol{B}}(z,t)$$

Mostreremo in questa sezione che le equazioni di Maxwell, Eq. (24.13), ammettono soluzioni che hanno la forma di onde piane, che si propagano in direzione z con velocità pari a c:

$$\vec{\boldsymbol{E}} \;\equiv\; \vec{\boldsymbol{E}}(z-ct) \qquad ; \qquad \vec{\boldsymbol{B}} \;\equiv\; \vec{\boldsymbol{B}}(z-ct) \tag{24.16}$$

Inoltre i campi elettrico e magnetico sono ortogonali fra loro e anche alla direzione di propagazione.

$$\vec{\boldsymbol{E}} \;\perp\; \vec{\boldsymbol{B}} \qquad ; \qquad \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}} \;\uparrow\uparrow\; \hat{\boldsymbol{z}} \tag{24.17}$$

Infine le loro intensità sono tali che, in ogni istante t e in ogni luogo z,

$$|\vec{\boldsymbol{E}}(z-ct)| \;=\; c\,|\vec{\boldsymbol{B}}(z-ct)| \tag{24.18}$$

Tutte queste condizioni si possono scrivere in forma vettoriale, come:

$$\vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}} \;=\; \frac{E^2}{c^2}\,\vec{\boldsymbol{c}} \;=\; \frac{E^2}{c}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{24.19}$$

24.4.1 Dimostrazioni (*)

Iniziamo dalle prime due equazioni del sistema Eq. (24.13). Per esempio consideriamo quella per il campo elettrico: $\dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ Poiché stiamo supponendo che il campo non dipenda da x, y, le prime due derivate parziali devono essere nulle, quindi deve essere nulla anche la terza: $\dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0$. In altre parole, E_z è uniforme in x, y, z. Abbiamo già detto che questa soluzione non rientra in questo studio, per cui possiamo scartarla e assumere $E_z = 0$.

In maniera del tutto analoga si può ragionare per $\vec{\boldsymbol{B}}$. Concludiamo quindi che

$$E_z = 0 \quad ; \quad B_z = 0$$

Ora, il campo elettrico che consideriamo esiste solo nelle sue componenti E_x, E_y. Orientiamo gli assi in modo che l'asse x sia diretto come $\vec{\boldsymbol{E}}$, quindi $E_y = 0$. Riscriviamo i due sistemi di 3 equazioni ciascuno, tenendo conto di tutte le condizioni ottenute finora: $\dfrac{\partial}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial}{\partial y} = 0$, $E_z = 0$, $B_z = 0$, $E_y = 0$:

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial B_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} -\dfrac{\partial B_y}{\partial z} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial B_x}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

(abbiamo omesso le terze equazioni di ciascun sistema, che darebbero le identità $0 = 0$).

Le due equazioni $\dfrac{\partial B_x}{\partial t} = 0$ e $\dfrac{\partial B_x}{\partial z} = 0$ ci dicono che B_x non dipende nè da t, nè da z, quindi è uniforme e costante: come tale non verrà più considerato. Assumiamo quindi $B_x = 0$. Finora abbiamo concluso che

$$\vec{\boldsymbol{E}} = E_x(z,t)\,\hat{\boldsymbol{x}} \quad ; \quad \vec{\boldsymbol{B}} = B_y(z,t)\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

cioè $\vec{\boldsymbol{E}}$, $\vec{\boldsymbol{B}}$ sono sempre ortogonali fra loro.

Le alre due equazioni sono:

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} \tag{24.20}$$

e:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \tag{24.21}$$

Ora deriviamo l'Eq. (24.21) rispetto al tempo, e l'Eq. (24.20) rispetto a z:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial B_y}{\partial z} &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial E_x}{\partial t} \end{aligned}$$

Per confronto, si ottiene

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \tag{24.22}$$

Derivando invece l'Eq. (24.20) rispetto al tempo, e l'Eq. (24.21) rispetto a z, e confrontandole, si otterrebbe invece:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \tag{24.23}$$

Le Eq. (24.22) e Eq. (24.23) sono della stessa forma $\frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi(z,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(z,t)$, che abbiamo conosciuto come *equazione delle onde*, Eq. (24.5) nella Sezione 24.1.2. Pertanto ammettono soluzioni della forma:

$$\begin{aligned} E_x(z,t) &= f(z-ct) \\ B_y(z,t) &= g(z-ct) \end{aligned}$$

dunque sia E_x che B_y si propagano lungo la direzione z come onde progressive, con velocità pari a c. Ma c'è di più: applicando per esempio l'Eq. (24.21), e indicando con f', g' le derivate delle funzioni f, g rispetto al loro unico argomento, abbiamo $\frac{\partial E_x}{\partial z} = f'(z-ct)$ e $\frac{\partial B_y}{\partial t} = -c\,g'(z-ct)$, da cui si deduce che

$$f'(z-ct) = c\,g'(z-ct)$$

ovvero $f(\cdots) = c\,g(\cdots) + \text{costante}$. Ricordiamo che nello studio di onde le costanti non sono di interesse, quindi assumiamo $f(\cdots) = c\,g(\cdots)$, il che significa

$$E_x(z-ct) = c\,B_y(z-ct)$$

Con questo, tutte le asserzioni Eq. (24.16), Eq. (24.17), Eq. (24.18) sono dimostrate.

24.5 Onde monocromatiche

La forma matematica di un'onda piana monocromatica, di frequenza ν, che si propaga lungo $\hat{\boldsymbol{z}}$, è:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{E}} &= E_{max}\cos(\omega t - kz + \phi)\,\hat{\boldsymbol{x}} \\ \vec{\boldsymbol{B}} &= \frac{E_{max}}{c}\cos(\omega t - kz + \phi)\,\hat{\boldsymbol{y}} \end{aligned} \qquad \left(\begin{aligned} \omega &= 2\pi\,\nu \\ k &= \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \end{aligned}\right) \tag{24.24}$$

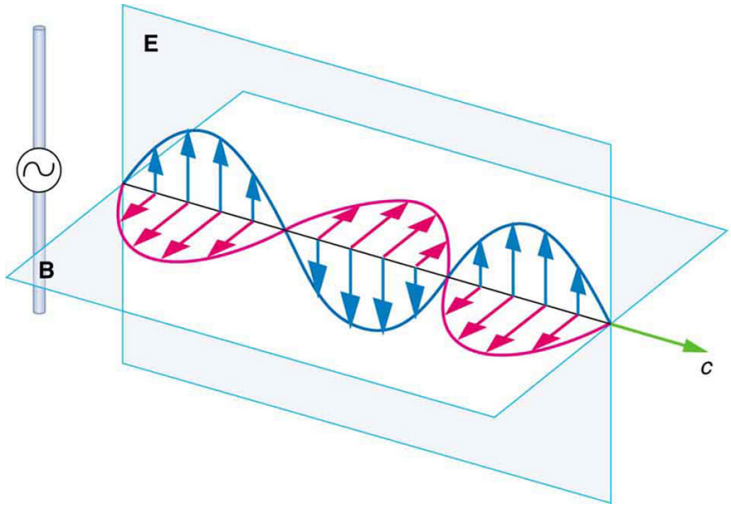


Figura 24.4: *Onda elettromagnetica piana monocromatica.*

La situazione è illustrata in Fig. 24.4.

24.5.1 Lo spettro elettromagnetico

Le onde elettromagnetiche sono prodotte da molti meccanismi fisici, che causano oscillazioni di cariche elettriche. A seconda di tali oscillazioni, la frequenza ν emessa può assumere un ampio spettro di valori, come indicato in Fig. 24.5.

La luce visibile dall'occhio umano occupa una banda piuttosto limitata: la lunghezza d'onda λ va da circa 380 nm (luce violetta) a circa 770 nm (luce rossa). Le frequenze corrispondenti si ottengono con la relazione

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \tag{24.25}$$

e sono da circa $790 \cdot 10^{12}$ Hz (violetto) a circa $400 \cdot 10^{12}$ Hz (rosso).

Frequenze più basse (cioè onde più lunghe) corrispondono alla radiazione infrarossa, alle microonde e alle onde radio. Viceversa, frequenze più alte (cioè onde più corte) corrispondono alla radiazione ultravioletta, X e γ (gamma).

24.6 Energia di un'onda elettromagnetica

Un'onda elettromagnetica, formata dai campi $\vec{\boldsymbol{E}}$, $\vec{\boldsymbol{B}}$, possiede un'energia e trasporta un'energia. Quantitativamente, la *densità di energia in volume* è

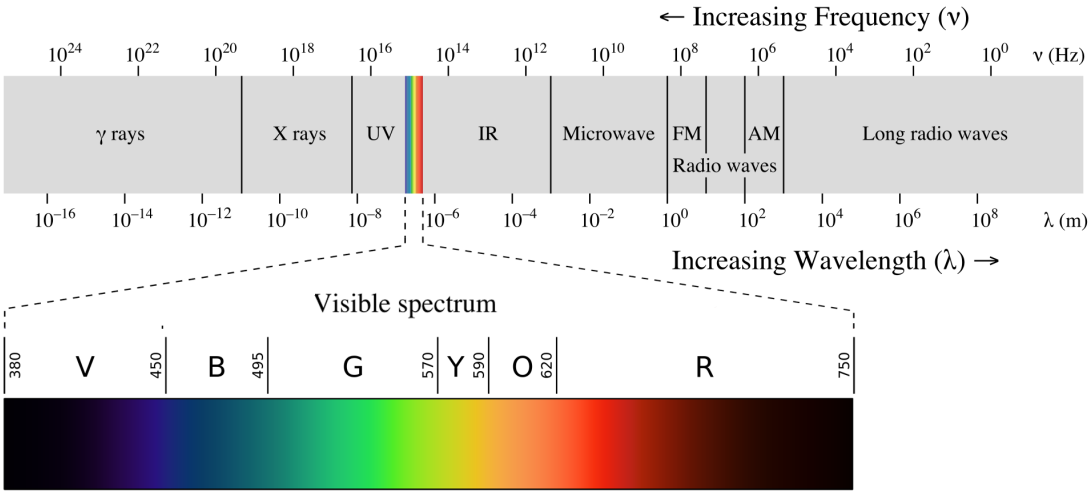


Figura 24.5: *Lo spettro elettromagnetico. Ricordiamo che* $\lambda = \dfrac{c}{\nu}$.

esprimibile come:

$$u_{em} \;=\; \frac{\epsilon_0}{2}\left[E^2 + (cB)^2\right] \tag{24.26}$$

e il trasporto di energia è esprimibile attraverso il *vettore di Poynting*:

$$\vec{\boldsymbol{S}} \;=\; \epsilon_0 c^2 \left(\vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\right) \tag{24.27}$$

Per un'onda piana, il vettore di Poynting è parallelo e concorde alla direzione di propagazione: basti confrontare la sua definizione, Eq. (24.27), con l'Eq. (24.19): $\vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{E^2}{c}\hat{\boldsymbol{z}}$.

Data una superficie Σ piana, orientata con un versore $\hat{\boldsymbol{n}}$ ad essa ortogonale, la *potenza* dell'onda elettromagnetica che la attraversa è

$$\mathcal{P}_{rad} \;=\; \frac{dU_{rad}}{dt} \;=\; \vec{\boldsymbol{S}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\Sigma \;=\; |\vec{\boldsymbol{S}}|\,\Sigma\,\cos\theta \tag{24.28}$$

(assumendo che $\vec{\boldsymbol{S}}$ sia uniforme su tutta la superficie Σ). Il suffisso $_{rad}$ sta per "radiazione" — riferito alla radiazione elettromagnetica. Nell'ultima forma, θ è l'angolo formato fra il vettore di Poynting $\vec{\boldsymbol{S}}$ e il versore $\hat{\boldsymbol{n}}$ normale alla superficie, come in Fig. 24.6. La potenza $\mathcal{P}_{rad}$ è massima se $\theta = 0$, vale a dire se $\hat{\boldsymbol{n}} \uparrow\uparrow \vec{\boldsymbol{S}}$, cioè se la superficie Σ è ortogonale a $\vec{\boldsymbol{S}}$ e alla direzione di

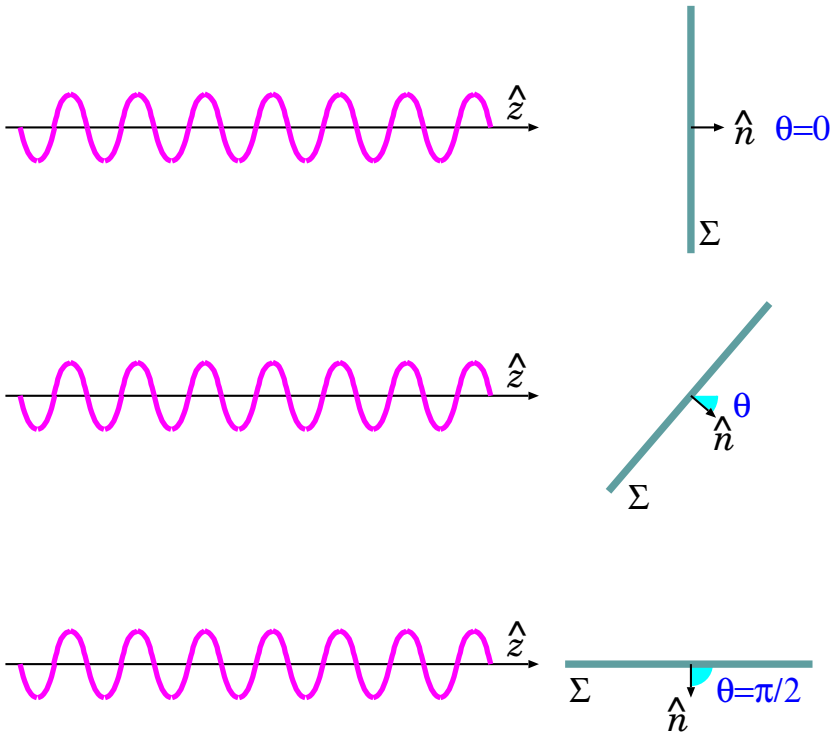


Figura 24.6: *Orientamento di una superficie Σ rispetto alla direzione di propagazione e al vettore di Poynting.*

incidenza dell'onda. Viceversa, se la superficie Σ è parallela alla direzione di propagazione, $\theta = \pi/2$ e $\mathcal{P}_{rad} = 0$.

Se $\vec{\boldsymbol{S}}$ non è uniforme, o se la superficie Σ non è piana, l'Eq. (24.28) si può generalizzare come:

$$\frac{dU}{dt} \;=\; \boldsymbol{\Phi}_\Sigma(\vec{\boldsymbol{S}}) \;=\; \int_\Sigma d\Sigma\, \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{S}} \tag{24.29}$$

24.6.1 Intensità di radiazione

Le espressioni finora viste, Eq. (24.26) e Eq. (24.27), sono valide per qualunque campo elettromagnetico: ora specializziamole per le onde elettromagnetiche.

Sappiamo che $E = cB$, pertanto la densità di energa e il modulo del vettore di Poynting diventano:

$$u_{em} \;=\; \epsilon_0\, E^2 \qquad ; \qquad |\vec{\boldsymbol{S}}| \;=\; \epsilon_0\, c\, E^2$$

Questi sono *valori istantanei*, che cambiano nel tempo a seconda delle variazioni del campo elettrico E. Abbiamo osservato che in generale E oscilla con frequenze che vanno da $\approx 10^3$ Hz (onde radio lunghe), a $\approx 10^{24}$ Hz (raggi γ) — vd Fig. 24.5. Poiché $E = E_{max}\cos(\omega t + \dots)$, i valori istantanei di u_{em} e $|\vec{\boldsymbol{S}}|$ oscillano molto rapidamente nel tempo, e non hanno nessun uso pratico. Per questo si considerano i loro valori medi, $\langle u_{em}\rangle$ e $\left\langle|\vec{\boldsymbol{S}}|\right\rangle$. Ora, $E^2 = E_{max}^2\cos^2(\omega t - kz + \phi)$, e ricordando che $\left\langle\cos^2\right\rangle = \dfrac{1}{2}$, abbiamo che $\left\langle E^2\right\rangle = \dfrac{E_{max}^2}{2}$, pertanto:

$$\langle u_{em}\rangle = \epsilon_0\,\frac{E_{max}^2}{2} \tag{24.30}$$

Inoltre, si definisce l'*intensità di radiazione* I come:

$$I \;=\; \left\langle|\vec{\boldsymbol{S}}|\right\rangle \;=\; \epsilon_0\,c\,\frac{E_{max}^2}{2} \tag{24.31}$$

24.6.2 Dimostrazioni (*)

Consideriamo un'onda elettromagnetica piana, che si propaga nello spazio in direzione $\hat{\boldsymbol{z}}$, con il campo elettrico diretto lungo $\hat{\boldsymbol{x}}$ e il campo magnetico diretto lungo $\hat{\boldsymbol{y}}$ — quindi $E_y = E_z = 0$ e $B_x = B_z = 0$.

Consideriamo un volumetto parallelepipedo δV di lati δx, δy, δz in cui si trovino delle cariche elettriche $q_1, \dots, q_N$ dotate di velocità $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \dots, \vec{\boldsymbol{v}}_N$. Su ciascuna di queste agisce una forza elettromagnetica

$$\vec{\boldsymbol{F}}_k \;=\; q_k\left(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}}_k \times \vec{\boldsymbol{B}}\right)$$

che quindi cede alla carica una potenza

$$\mathcal{P}_k \;=\; \vec{\boldsymbol{F}}_k \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_k \;=\; q_k\,\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_k$$

(ricordiamo che la forza magnetica non compie mai lavoro). La potenza ceduta dall'onda elettromagnetica sul volumetto δV è

$$\delta\mathcal{P} \;=\; \sum_{k=1}^{N}\mathcal{P}_k \;=\; \left(\sum_{k=1}^{N} q_k\vec{\boldsymbol{v}}_k\right)\cdot\vec{\boldsymbol{E}}$$

Chiamiamo n la densità in volume dei portatori di carica, cosicchè $N = n\delta V$. Ora ovviamente $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} q_k\vec{\boldsymbol{v}}_k = N\,\langle q\vec{\boldsymbol{v}}\rangle = n\delta V\;\langle q\vec{\boldsymbol{v}}\rangle$. Possiamo ricorrere alla densità di corrente, $\vec{\boldsymbol{J}} = n\,\langle q\vec{\boldsymbol{v}}\rangle$, e scrivere:

$$\delta\mathcal{P} \;=\; \delta V\, \vec{\boldsymbol{J}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \tag{24.32}$$

Nel nostro caso, $\vec{\boldsymbol{E}} = E\hat{\boldsymbol{x}}$, quindi solo la componente J_x di $\vec{\boldsymbol{J}}$ ci interessa. Per determinarla, usiamo l'equazione di Maxwell

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \;=\; \mu_0 J_x \;+\; \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial B_x}{\partial t}$$

Ricordando che $B_z = 0$ e $B_x = 0$, abbiamo:

$$J_x \;=\; -\epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_y}{\partial z}$$

e quindi l'Eq. (24.32) diventa:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{P} &= -\delta V \left(\epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} E_x + \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_y}{\partial z} E_x \right) \\ &= -\delta V \left(\frac{\epsilon_0}{2}\frac{\partial (E_x^2)}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial (E_x B_y)}{\partial z} - \frac{1}{\mu_0} B_y \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \end{aligned} \tag{24.33}$$

Ora dall'Eq. (24.21) sappiamo che $\dfrac{\partial E_x}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t}$, quindi:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{P} &= -\delta V \left[\frac{\epsilon_0}{2}\frac{\partial (E_x^2)}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial (E_x B_y)}{\partial z} + \frac{1}{\mu_0} B_y \frac{\partial B_y}{\partial t} \right] \\ &= -\delta V \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon_0 E_x^2}{2} + \frac{B_y^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial (E_x B_y)}{\partial z} \right] \end{aligned} \tag{24.34}$$

Ora ponendo $\dfrac{1}{\mu_0} = c^2\epsilon_0$, e ricordando che $E \equiv E_x$ e $B \equiv B_y$, riconosciamo $\dfrac{\epsilon_0 E_x^2}{2} + \dfrac{B_y^2}{2\mu_0} = \dfrac{\epsilon_0}{2}\left[E^2 + (cB)^2\right] \equiv u$, che coincide con la quantità in Eq. (24.26).

Resta da elaborare il termine $\dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial (E_x B_y)}{\partial z}$. Osserviamo che, essendo $\vec{\boldsymbol{E}} = E_x\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\vec{\boldsymbol{B}} = B_y\hat{\boldsymbol{y}}$, otteniamo $\vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = E_x B_y (\hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{y}}) = E_x B_y \hat{\boldsymbol{z}}$. Anche qui riconosciamo il vettore di Poynting introdotto nell'Eq. (24.27): $\vec{\boldsymbol{S}} = \dfrac{1}{\mu_0} EB\hat{\boldsymbol{z}}$.

Quindi

$$\begin{aligned}
\delta V \cdot \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial(E_x B_y)}{\partial z} &= \delta x \delta y \delta z \frac{\partial S_z}{\partial z} \\
&= \delta x \delta y \left(S_z(z+dz) - S_z(z)\right) \\
&= \boldsymbol{\Phi}_{\text{ch}}(\vec{\boldsymbol{S}})
\end{aligned}$$

L'ultimo passaggio esprime il flusso di $\vec{\boldsymbol{S}}$ attraverso la superficie chiusa che delimita il parallelepipedo di volume δV. Poiché per costruzione $\vec{\boldsymbol{S}} \parallel \hat{\boldsymbol{z}}$, tale flusso ha contributi solo dalle superfici perpendicolari a $\hat{\boldsymbol{z}}$, che sono appunto quelle di lati $\delta x,\ \delta y$.

In conclusione, l'Eq. (24.34) può essere riscritta come:

$$\delta\mathcal{P} \ + \ \delta V \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\epsilon_0}{2}\left(E^2 + (cB)^2\right)\right] \ + \ \boldsymbol{\Phi}_{\text{ch}}(\vec{\boldsymbol{S}}) \ = \ 0 \tag{24.35}$$

che può essere letta come

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\text{energia meccanica}) \ + \ \frac{\partial}{\partial t}(\text{energia elettromagnetica}) \\
&= \ -(\text{flusso di energia elettromagnetica uscente per unità di tempo})
\end{aligned}$$

24.7 Onde elettromagnetiche sferiche

L'onda piana è un caso abbastanza ideale: in pratica non può esistere un'onda infinitamente larga nelle direzioni x, y, proveniente da $z \approx -\infty$ e che viaggia fino a $z \approx +\infty$.

Un altro caso, fisicamente più interessante, è quello di *onda sferica*, formata da una perturbazione elettromagnetica che si propaga da una zona centrale puntiforme verso tutte le direzioni. In questo caso, i risultati sono abbastanza simili a quelli trovati per le onde piane: la propagazione è in direzione radiale, i campi $\vec{\boldsymbol{E}}, \vec{\boldsymbol{B}}$ sono ortogonali fra loro e anche alla direzione di propagazione, e stanno nel rapporto $\dfrac{|\vec{\boldsymbol{E}}|}{|\vec{\boldsymbol{B}}|} = c$. La differenza è che in questo caso si attenuano con la distanza, con un andamento $\propto \dfrac{1}{r}$. In formule:

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{E}} &= \hat{\boldsymbol{n}}_E \, \frac{f(r-ct)}{r} \\
\vec{\boldsymbol{B}} &= \hat{\boldsymbol{n}}_B \, \frac{f(r-ct)}{c\,r} \\
\hat{\boldsymbol{n}}_E \times \hat{\boldsymbol{n}}_B &= \hat{\boldsymbol{r}}
\end{aligned} \tag{24.36}$$

Si noti che l'andamento $\propto \frac{1}{r}$ è consistente con il trasporto di energia elettromagnetica descritto dal vettore di Poynting, $\vec{\boldsymbol{S}} = c^2\epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$. Ovviamente si trova che $|\vec{\boldsymbol{S}}| \propto \frac{1}{r^2}$. Se calcoliamo $\boldsymbol{\Phi}(\vec{\boldsymbol{S}})$ attraverso una superficie sferica di raggio r, otteniamo

$$\boldsymbol{\Phi}(\vec{\boldsymbol{S}}) \;\approx\; 4\pi r^2 \, |\vec{\boldsymbol{S}}|$$

che è indipendente da r.

24.7.1 Onde sferiche prodotte da una carica oscillante

Qual è la sorgente di un'onda elettromagnetica sferica?

Abbiamo visto che cariche elettriche in moto lento e poco accelerato producono campi elettromagnetici che si attenuano con la distanza come $\frac{1}{r^2}$. Qui abbiamo appena detto che le onde elettromagnetiche si attenuano come $\frac{1}{r}$. Che cosa c'è di diverso?

La differenza è che le onde sferiche sono prodotte da cariche elettriche in moto accelerato: tipicamente da cariche elettriche oscillanti.

Una carica elettrica q, posta nell'origine, che si muove di moto oscillatorio armonico lungo l'asse z, modifica la sua posizione come

$$z_q(t) \;=\; z_{max} \, \cos(\omega t)$$

e quindi è soggetta ad una velocità v_q e ad una accelerazione a_q, dirette entrambe nella direzione z, date da:

$$\begin{aligned}
v_q(t) &= \frac{d}{dt}\,[z_q(t)] \;=\; -z_{max}\,\omega \, \sin(\omega t) \\
a_q(t) &= \frac{d^2}{dt^2}\,[z_q(t)] \;=\; -z_{max}\,\omega^2 \, \cos(\omega t)
\end{aligned}$$

È possibile calcolare [2] che questo sistema produce un campo elettrico e un campo magnetico che, in coordinate sferiche, si possono scrivere così:

[2] ... ma qui non sarà dimostrato, perché i calcoli sono decisamente pesanti!

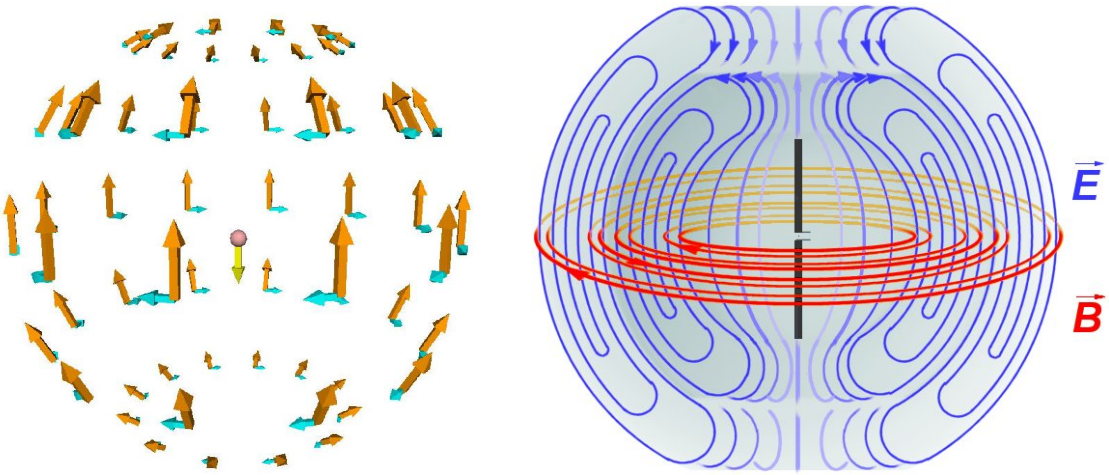


Figura 24.7: *Onda elettromagnetica sferica prodotta da una carica elettrica oscillante: a sinistra, vettori $\vec{\boldsymbol{E}}$, $\vec{\boldsymbol{B}}$ (rispettivamente arancione, azzurro); a destra, linee di campo.*

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}};t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left[\frac{1}{r\,(1-\beta_q\cos\theta)^3}\,a_q\,\sin\theta\right]_{rit}\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}};t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^3}\left[\frac{1}{r\,(1-\beta_q\cos\theta)^3}\,a_q\,\sin\theta\right]_{rit}\hat{\boldsymbol{\phi}} \\
&\left(\beta_q \equiv \frac{v_q}{c}\right)
\end{aligned} \tag{24.37}$$

dove il suffisso "*rit*" significa "ritardato": la velocità $v_q = \beta_q c$ e l'accelerazione a_q della carica q vanno considerate non all'istante t a cui si calcola il campo, ma ad un istante precedente

$$t_{rit} = t - \frac{r}{c} \tag{24.38}$$

Il significato fisico di questo particolare è notevole: gli effetti elettromagnetici della carica q non si propagano istantaneamente, ma in un tempo finito. Per raggiungere una posizione $\vec{\boldsymbol{r}}$ che dista $r = |\vec{\boldsymbol{r}}|$ da q impiegano un tempo $\Delta t = \frac{r}{c}$. Quindi gli effetti elettromagnetici viaggiano nello spazio con la velocità della luce, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

La forma dell'onda sferica è mostrata in Fig. 24.7. L'intensità dei campi è

- proporzionale all'accelerazione a_q, dunque al quadrato della frequenza angolare:

$$|\vec{\boldsymbol{E}}| \ , \ |\vec{\boldsymbol{B}}| \ \propto \ \omega^2$$

- inversamente proporzionale alla distanza r:

$$|\vec{\boldsymbol{E}}| \ , \ |\vec{\boldsymbol{B}}| \ \propto \ \frac{1}{r}$$

- massima all'"equatore" (cioè in direzioni ortogonali all'asse di oscillazione $\hat{\boldsymbol{z}}$ della carica) e si attenua sempre più fino ad annullarsi ai "poli" (sull'asse $\hat{\boldsymbol{z}}$), secondo una legge

$$|\vec{\boldsymbol{E}}| \ , \ |\vec{\boldsymbol{B}}| \ \propto \ \sin\theta$$

- modulata con frequenza angolare ω, pari a quella con cui oscilla la carica q; a causa del "ritardo" $\frac{r}{c}$, i campi a distanza r devono avere un andamento

$$|\vec{\boldsymbol{E}}| \ , \ |\vec{\boldsymbol{B}}| \ \propto \ \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$$

Un commento a parte merita il termine correttivo $\frac{1}{(1-\beta_q\cos\theta)^3}$ che compare nelle Eq. (24.37). Per $v_q \ll c$ (cioè moto molto più lento della velocità della luce), $\beta_q \ll 1$ e il termine non dà alcun effetto. Viceversa, per velocità paragonabili a quella della luce, la correzione scompare all'equatore ($\cos\theta = 0$) mentre si massimizza in effetto ai poli ($\cos\theta = \pm 1$), dove diventa $\frac{1}{(1-\beta_q)^3}$ in direzione $+\hat{\boldsymbol{z}}$ e $\frac{1}{(1+\beta_q)^3}$ in direzione $-\hat{\boldsymbol{z}}$. Per esempio, se la carica si muove verso $+\hat{\boldsymbol{z}}$, $\beta_q > 0$ e la correzione è > 1 in direzione $+\hat{\boldsymbol{z}}$ e < 1 in direzione $-\hat{\boldsymbol{z}}$. In generale, l'intensità dei campi cresce nella direzione di moto della carica, cala nella direzione opposta.

24.8 Onde elettromagnetiche nella materia

Abbiamo visto nella Sezione 23.4.4 che nei materiali dielettrici, in presenza di un campo elettrico applicato $\vec{\boldsymbol{E}}$, le molecole e/o gli atomi subiscono una polarizzazione, che tende a schermare in parte l'effetto del campo applicato. Per descrivere in maniera macroscopica questo effetto si deve rimpiazzare la

costante ϵ_0 con un altro valore, $\epsilon > \epsilon_0$. In questo modo la legge di Gauss diventava $\mathbf{\Phi}_{\rm ch}(\vec{\boldsymbol{E}}) = \dfrac{Q^{(\rm int)}}{\epsilon}$.

Per le onde elettromagnetiche si procede esattamente nello stesso modo. Conviene introdurre la *costante dielettrica relativa*

$$\epsilon_r \;=\; \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \tag{24.39}$$

e l'*indice di rifrazione*:

$$n \;=\; \sqrt{\epsilon_r} \tag{24.40}$$

Essendo sempre $\epsilon > \epsilon_0$, deve essere $n > 1$ sempre.

Partendo dalle Eq. (24.13), e sostituendo

$$\frac{1}{c^2} \equiv \mu_0\epsilon_0 \;\longrightarrow\; \mu_0\epsilon = \mu_0\epsilon_0\epsilon_r = \left(\frac{n}{c}\right)^2$$

si ottiene:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \qquad ; \qquad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{aligned}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} &= \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} &= \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{aligned}\right. \tag{24.41}$$

Queste equazioni sono formalmente identiche alle Eq. (24.13) valide nel vuoto. Quindi anche le soluzioni devono essere identiche: esistono sempre le onde, però la loro velocità di propagazione non è la velocità della luce c, bensì:

$$u \;=\; \frac{c}{n} \tag{24.42}$$

In generale $u < c$, poiché $n > 1$. Anche la relazione fra λ e ν si modifica:

$$\lambda \;=\; \begin{cases} \dfrac{c}{\nu} & \text{nel vuoto} \\[2ex] \dfrac{c}{n\,\nu} & \text{nel dielettrico} \end{cases} \tag{24.43}$$

A parità di frequenza, le onde sono più corte nel dielettrico che nel vuoto, e più è alto l'indice di rifrazione, più sono corte le onde.

L'indice di rifrazione dipende dal materiale dielettrico. In tabella sono raccolti gli indici di rifrazione per alcuni materiali, misurati per una lunghezza d'onda $\lambda = 589$ nm (luce gialla). I gas sono a $P = 1$ Atm, $T = 0°$C. I liquidi sono a $T = 20°$C.

materiale	n
Aria	1.000293
Idrogeno	1.000132
Elio	1.000036
Ossigeno	1.000272
CO_2	1.00045
Acqua	1.333
Etere	1.352
Alcol etilico	1.36
Olio di oliva	1.47
Olio di cedro	1.515

materiale	n
Ghiaccio	1.309
Vetro comune	1.46
Plexiglass	1.49
Vetro Crown	1.517
NaCl	1.53
Quarzo	1.544
Vetro Flint	1.627
Zaffiro	1.76
Diamante	2.419

24.9 Assorbimento, emissione, dispersione

La costante dielettrica ϵ dipende anche da come il campo varia nel tempo. Per campi elettrici statici le molecole del dielettrico hanno il tempo di ruotare e polarizzarsi. Per esempio, le molecole d'acqua H_2O possiedono un momento di dipolo elettrico intrinseco: in presenza di campi elettrici statici, le molecole si orientano e l'acqua acquista una polarizzazione netta notevole, tale per cui $\dfrac{\epsilon}{\epsilon_0} \simeq 80$. Ma se consideriamo campi alternati del tipo $\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_0 \cos(\omega t)$ la polarizzazione del dielettrico è in generale minore. Il tempo impiegato dai dipoli molecolari intrinseci per ruotare e allinearsi è troppo lungo rispetto al periodo di oscillazione del campo elettrico, per cui l'unico effetto di polarizzazione è quello indotto sulle nubi elettroniche degli atomi e/o delle molecole. Prendendo di nuovo ad esempio l'acqua, per campi alternati si trova $\dfrac{\epsilon}{\epsilon_0} \simeq 1.7$: decisamente inferiore rispetto al caso statico!

Inoltre, la polarizzabilità dipende dalla frequenza angolare ω del campo elettrico. Per capirlo, basti pensare che essa dipende da una costante elastica efficace k (vd Sezione 23.4.3), e quindi la nube elettronica ha delle frequenze di oscillazione proprie $\omega_1,\ \omega_2, \ldots$ Se la frequenza esterna ω è prossima ad una delle frequenze proprie ω_k, per il fenomeno della risonanza (Sezione 10.3.3)

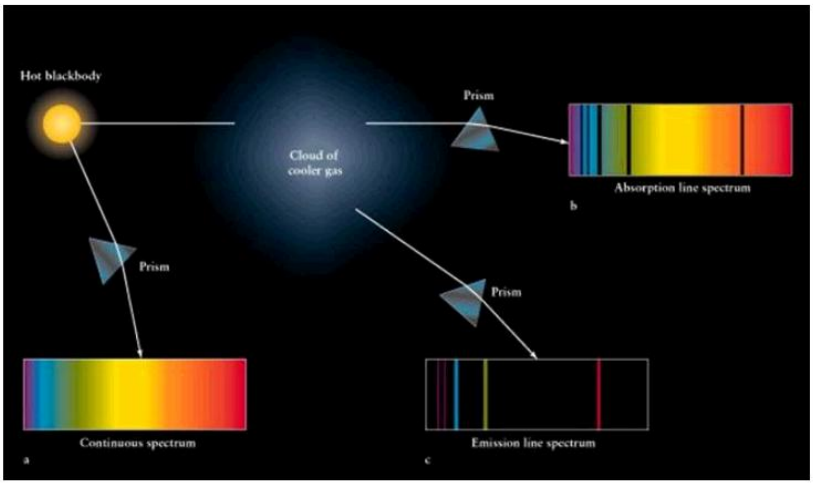


Fig: Emission & Absorption spectrum

Figura 24.8: *Righe spettrali di assorbimento e di emissione di una sostanza.*

la polarizzabilità può essere nettamente più elevata che per frequenze esterne lontane da quelle proprie. Conviene quindi distinguere questi due casi.

24.9.1 Assorbimento ed emissione

Quando il campo esterno ha una frequenza vicina a una delle frequenze intrinseche delle nubi elettroniche, l'oscillazione di queste ultime viene eccitata per il fenomeno della risonanza. Di conseguenza molta radiazione elettromagnetica viene *assorbita*, per queste frequenze specifiche. Viceversa, quando viene meno la radiazione esterna, le nubi elettroniche, eccitate su certe frequenze, emettono radiazione elettromagnetica che è dotata di frequenza pari a quella delle cariche elettriche oscillanti che la producono. Quindi ogni materiale è dotato di uno *spettro di frequenze* per cui si può avere assorbimento e/o emissione di radiazione elettromagnetica.

In Fig. 24.8 viene schematizzato questo duplice fenomeno. Una sorgente di *luce bianca* produce una radiazione che contiene tutte le frequenze. Il passaggio della radiazione attraverso una sostanza eccita le nubi elettroniche alle loro frequenze caratteristiche. Il risultato è che, se si guarda la luce in direzione della sorgente, prevale l'assorbimento, visibile come delle "ombre" per le frequenze caratteristiche. Se invece si guarda la luce ad un angolo diverso, prevale l'emissione alle frequenze caratteristiche, osservabile come righe luminose su uno sfondo buio. Le frequenze di assorbimento e di emissione sono però le stesse.

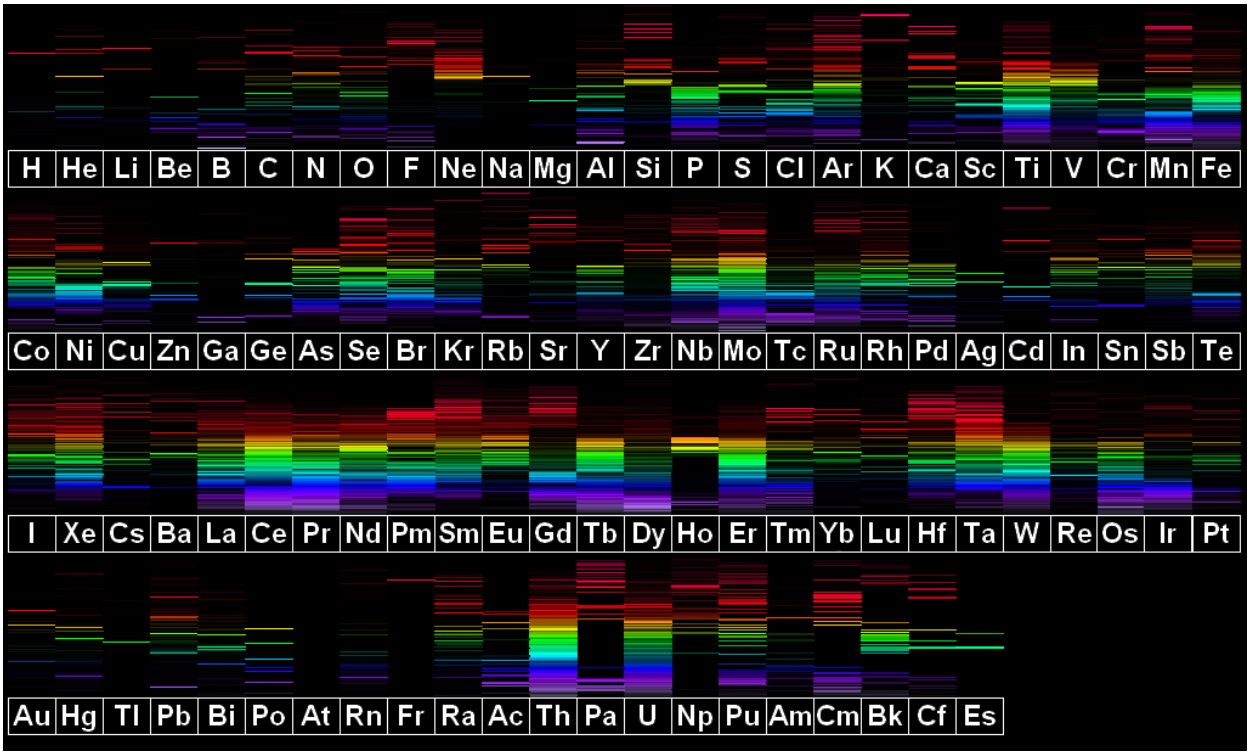


Figura 24.9: *Righe spettrali di emissione dei diversi elementi chimici.*

Potendo analizzare lo spettro di assorbimento o di emissione di un materiale, è possibile avere informazioni molto precise sulla sua composizione chimica. A scopo di esempio, in Fig. 24.9 sono illustrate le righe spettrali di emissione degli elementi chimici.

Come esempio di assorbimento osserviamo in Fig. 24.10 l'assorbimento dell'atmosfera terrestre. Essa è una miscela di gas, ciascuno dei quali ha le sue righe o bande di assorbimento caratteristiche. Il risultato complessivo è complesso. I raggi X e γ sono completamente schermati, così come gli ultra-violetti più corti. La zona della luce visibile, e parte della radiazione infrarossa, penetrano bene fino a raggiungere la superficie terrestre. Viceversa, gli infrarossi più lunghi e le micro-onde sono assorbiti. Le onde radio corte passano bene, mentre quelle lunghe sono di nuovo assorbite.

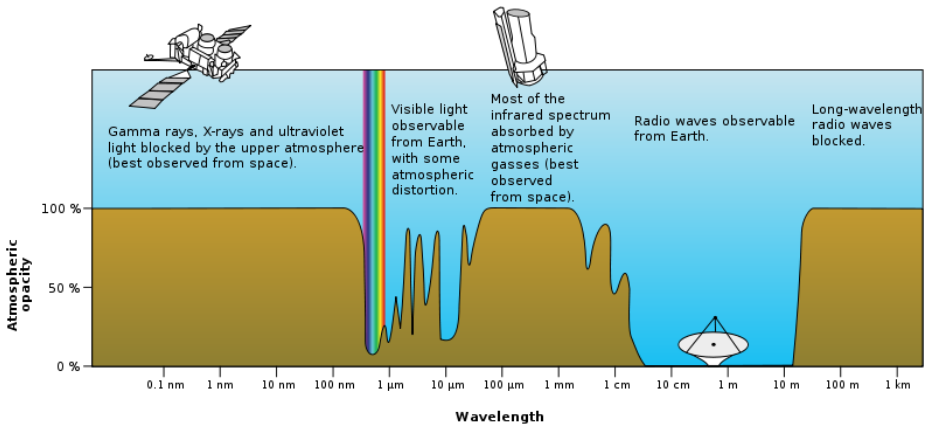


Figura 24.10: *Assorbimento dell'atmosfera terrestre, in funzione della lunghezza d'onda della radiazione elettromagnetica.*

24.9.2 Dispersione cromatica

Per ω lontano dalle frequenze angolari proprie ω_k, si osserva in generale una dipendenza della polarizzabilità, per cui $\epsilon \equiv \epsilon(\omega)$, oppure, lavorando con le frequenze, $\epsilon \equiv \epsilon(\nu)$. Essendo $n = \sqrt{\dfrac{\epsilon}{\epsilon_0}}$, anche l'indice di rifrazione è funzione della frequenza — oppure della lunghezza d'onda:

$$n \;\equiv\; n(\nu) \quad \text{oppure} \quad n \;\equiv\; n(\lambda) \tag{24.44}$$

La velocità di propagazione dell'onda elettromagnetica quindi dipende dalla sua frequenza, oppure dalla lunghezza d'onda. Una legge empirica fornisce una parametrizzazione ragionevolmente valida:

$$n(\lambda) \;=\; A \;+\; \frac{B}{\lambda^2} \;+\; \frac{C}{\lambda^4} \tag{24.45}$$

Questa formula è valida per frequenze $\nu = \dfrac{c}{n\lambda}$ lontane dalle frequenze di oscillazione proprie delle nubi elettroniche. In tali condizioni l'andamento è descritto da una delle seguenti proprietà (tutte equivalenti fra loro):

- l'indice di rifrazione decresce all'aumentare della lunghezza d'onda;
- l'indice di rifrazione aumenta con la frequenza;
- la velocità dell'onda decresce all'aumentare della frequenza.

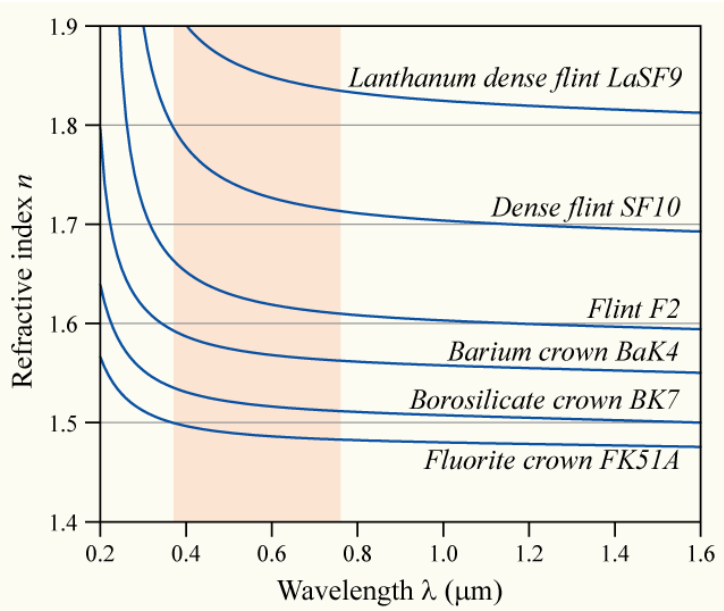


Figura 24.11: *Variazione dell'indice di rifrazione n in funzione della lunghezza d'onda λ, per diversi vetri. La zona colorata indica le lunghezze d'onda della luce visibile.*

I valori di A, B, C dipendono dal materiale dielettrico, e possono essere ricavati misurando n ad alcune lunghezze d'onda precise. La Fig. 24.11 mostra l'indice di rifrazione a diverse lunghezze d'onda, per diversi vetri.

In tabella mostriamo come varia con la lunghezza d'onda l'indice di rifrazione dell'acqua e di due tipi di vetro (usati tipicamente per costruire dispositivi fotografici).

materiale	n		
	luce azzurra $\lambda = 486$ nm	luce gialla $\lambda = 589$ nm	luce rossa $\lambda = 656$ nm
Acqua	1.337	1.333	1.331
Vetro Crown	1.524	1.517	1.515
Vetro Flint	1.639	1.627	1.622

24.10 Onde elettromagnetiche nei conduttori

Nei conduttori, la presenza di forze elettromagnetiche produce densità di corrente $\vec{\boldsymbol{J}}$ (Eq. (22.4))

$$\vec{\boldsymbol{J}} = \sigma \vec{\boldsymbol{E}}$$

Partiamo di nuovo dalle Eq. (24.11) ponendo $\rho = 0$ e $\vec{\boldsymbol{J}} = \sigma \vec{\boldsymbol{E}}$:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases} ; \quad \begin{cases} \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \left(\sigma E_x + \epsilon_0 \dfrac{\partial E_x}{\partial t} \right) \\ \dfrac{\partial B_x}{\partial z} - \dfrac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \left(\sigma E_y + \epsilon_0 \dfrac{\partial E_y}{\partial t} \right) \\ \dfrac{\partial B_y}{\partial x} - \dfrac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 \left(\sigma E_z + \epsilon_0 \dfrac{\partial E_z}{\partial t} \right) \end{cases} \tag{24.46}$$

La presenza di $\sigma \vec{\boldsymbol{E}}$ nelle Eq. (24.46) altera profondamente la propagazione delle onde elettromagnetiche.

Prima di entrare nei dettagli, possiamo già notare che la presenza di una densità di corrente provoca nel conduttore una dissipazione di potenza per unità di volume, data dall'effetto Joule, Eq. (22.13):

$$w = \sigma E^2 = \frac{J^2}{\sigma}$$

Possiamo figurarci qualitativamente che cosa avviene: l'onda elettromagnetica si propaga in direzione z, portando con sè una quantità di potenza per unità di area data dal vettore di Poynting (cfr Eq. (24.27)), quindi proporzionale a E^2. Parte di questa potenza viene dissipata per effetto Joule, in misura proporzionale a σE^2. Quindi la frazione di potenza dissipata è proporzionale alla potenza ricevuta: $\dfrac{\partial E^2}{\partial z} \propto -E^2$; per questo E dovrebbe attenuarsi in maniera esponenziale con z: $E \propto \mathrm{e}^{-z/\delta}$, con δ da determinare.

Qui consideriamo onde piane di frequenza angolare ω che si propagano in "conduttori buoni", cioè tali per cui la conducibilità σ è abbastanza elevata da considerare $\sigma \gg \epsilon_0\omega$. La propagazione dei campi risulta essere del tipo:

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \cos\left(\omega t - \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\sigma\omega}{2\epsilon_0}}\, z\right) \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\sigma\omega}{2c^2\epsilon_0}}\, z} \\ B_y &= B_0 \cos\left(\omega t - \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\sigma\omega}{2\epsilon_0}}\, z - \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\sigma\omega}{2c^2\epsilon_0}}\, z} \end{aligned} \tag{24.47}$$

Prima di dimostrare questi risultati, vediamone il significato.

- L'ampiezza dell'onda non è uniforme, ma si attenua con la penetrazione z nel conduttore, in maniera esponenziale, secondo una legge $\mathrm{e}^{-z/\delta}$, essendo
$$\delta = \sqrt{\frac{2c^2\epsilon_0}{\sigma\omega}} \tag{24.48}$$
La quantità δ si chiama "profondità della pelle" (in inglese, "skin depth"), come se il conduttore avesse una "pelle" di spessore caratteristico δ che può essere penetrata dalla radiazione. Tale profondità diventa sempre più piccola al crescere della frequenza angolare ω.

- Il numero d'onda k vale
$$k = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\sigma\omega}{2\epsilon_0}} \tag{24.49}$$
quindi la velocità di propagazione dell'onda non è più c, bensì
$$u = \frac{\omega}{k} = c\sqrt{\frac{2\epsilon_0\omega}{\sigma}}$$

La "profondità di pelle" ha conseguenze importanti sul piano tecnologico e/o applicativo. Una di queste è che il passaggio nei conduttori di correnti elettriche ad alta frequenza rimane confinato nella zona di conduttore vicina alla superficie, limitando di fatto la sezione utile del conduttore, con il conseguente aumento della sua resistenza. Proviamo a fare un esempio: consideriamo un cavo elettrico di diametro D e lunghezza ℓ. La sua sezione trasversa è $\Sigma_0 = \frac{\pi}{4}D^2$, pertanto la sua resistenza è (vd Eq. (22.11))

$$R_0 = \frac{\ell}{\Sigma_0}\frac{1}{\sigma} = \frac{4\ell}{\pi D^2}\frac{1}{\sigma}$$

Questa equazione però è valida solo in *corrente continua*, oppure per $\omega \simeq 0$. Quando ω diventa grande, possiamo avere $\delta \ll D$ e quindi la sezione efficace che conduce diventa $\Sigma_\omega \simeq \pi D \delta$, e la resistenza del cavo diventa:

$$\begin{aligned} R_\omega &= \frac{\ell}{\Sigma_\omega}\frac{1}{\sigma} = \frac{\ell}{\pi D \delta}\frac{1}{\sigma} \\ &= \frac{\ell}{\pi D}\sqrt{\frac{\omega}{2c^2\epsilon_0\sigma}} \end{aligned}$$

Esempio: corrente alternata nel rame

Il rame ha una conducibilità $\sigma = 6 \cdot 10^7$ (unità S.I.). Quanto vale la profondità di pelle per le tipiche correnti alternate, $\nu_1 = 50$ Hz? E per un segnale a più alta frequenza, tipo onde radio in modulazione di frequenza, $\nu_2 = 100$ MHz?

Risposta. *Anzitutto verifichiamo se siamo nelle condizioni di "buon conduttore". Abbiamo $\omega_1 = 2\pi\nu_1 = 314.16$ rad/s, $\epsilon_0 \simeq 8.85 \cdot 10^{-12}$ unità S.I., quindi $\epsilon_0\omega_1 \simeq 2.8 \cdot 10^{-9}$ unità S.I.: decisamente non ci sono problemi ad assumere $\sigma \gg \epsilon_0\omega_1$! Per le alte frequenze abbiamo $\nu_2 = 10^8$ Hz, dunque $\omega_2 = 6.2932 \cdot 10^8$ rad/s, quindi $\epsilon_0\omega_2 \simeq 5.6 \cdot 10^{-3}$ unità S.I.: anche qui non c'è problema!*

Usiamo l'Eq. (24.48). A 50 Hz abbiamo $\delta_1 = \sqrt{\frac{2c^2\epsilon_0}{\sigma\omega_1}} \simeq 9 \cdot 10^{-3}$ m: circa 9 mm. Per impianti elettrici domestici, in cui i cavi hanno diametri di pochi millimetri, non ci sono effetti pratici, ma per gli elettrodotti, che hanno cavi con sezioni di svariati centimetri, ovviamente solo la parte esterna conduce.

Ora analizziamo i caso $\nu_2 = 100$ MHz: si ottiene $\delta_2 \simeq 6.5\mu$m. Qui decisamente l'effetto è più importante.

Un'altra conseguenza è che la radiazione elettromagnetica non può penetrare in profondità in un conduttore. Un conduttore costituisce un ottimo schermo ai campi elettromagnetici: è la cosiddetta *gabbia di Faraday*.

Esempio: propagazione nel rame

Il rame ha una conducibilità $\sigma = 6 \cdot 10^7$ (unità S.I.). Fino a quali frequenze può essere considerato "buon conduttore"? (Usare come criterio $\sigma > 10\,\omega\epsilon_0$). Le frequenze tipiche della luce visibile (da $400 \cdot 10^{12}$ a $790 \cdot 10^{12}$ Hz) soddisfano questo criterio? Calcolare la "profondità di pelle" per la massima frequenza angolare ottenuta e, se possibile, anche per le frequenze estreme della luce visibile.

Risposta. *La massima frequenza angolare è $\omega_{max} = 0.1\,\frac{\sigma}{\epsilon_0} = 0.1\,\frac{6 \cdot 10^7}{8.85 \cdot 10^{-12}}$ (unità S.I.) $\simeq 7 \cdot 10^{17}$ rad/s, pari a una frequenza massima $\nu_{max} = \frac{\omega_{max}}{2\pi} \simeq 10^{17}$ Hz. Sono frequenze ben più alte della luce visibile, siamo già nei raggi X (vd Fig. 24.5). Calcoliamo dunque la "profondità di pelle"*

per ν_{max}*, e anche per* $\nu_{rosso} = 400 \cdot 10^{12}$ Hz *e* $\nu_{violetto} = 790 \cdot 10^{12}$ Hz*. Usiamo la formula Eq. (24.48) adattata per le frequenze:* $\delta = \sqrt{\dfrac{2c^2\epsilon_0}{\sigma\omega}} = \sqrt{\dfrac{c^2\epsilon_0}{\pi\,\sigma\nu}}$*:*

$$\begin{aligned}
\nu &= 10^{17}\ \text{Hz} \quad \Rightarrow \quad \delta = 2.06 \cdot 10^{-10}\ \text{m} \simeq 0.2\ \text{nm} \\
\nu &= 790 \cdot 10^{12}\ \text{Hz} \quad \Rightarrow \quad \delta = 2.31 \cdot 10^{-9}\ \text{m} \simeq 2.3\ \text{nm} \\
\nu &= 400 \cdot 10^{12}\ \text{Hz} \quad \Rightarrow \quad \delta = 3.25 \cdot 10^{-9}\ \text{m} \simeq 3.3\ \text{nm}
\end{aligned}$$

Osservazione. *Avete notato come la "profondità di pelle" sia piccola? Un nanometro è pari a pochi multipli della distanza interatomica. Questo significa che, per quanto si produca un foglio di rame sempre più sottile, esso non diventa mai trasparente — bisognerebbe fare uno strato di spessore monoatomico o quasi.*

24.10.1 Dimostrazioni (*)

La trattazione generale di questo problema è al di là dei nostri scopi. Qui mostriamo un artifizio matematico che ci consente di farci un'idea.

Stiamo considerando un'onda di frequenza angolare ω, quindi sappiamo che i campi hanno la forma

$$\begin{aligned}
E &= E_0 \cos(\omega t - kz) \\
B &= B_0 \cos(\omega t - kz)
\end{aligned}$$

Per semplificare i calcoli, utilizziamo il formalismo complesso introdotto nella Sezione 24.1.4. I campi si riscrivono come:

$$\begin{aligned}
E &= E_0 \mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \\
B &= B_0 \mathrm{e}^{i(\omega t - kz)}
\end{aligned}$$

e portiamo avanti i nostri calcoli. Alla fine, qualunque soluzione otterremo, dovremo considerare solo la sua parte reale, per avere un significato fisico.

Il termine "incriminato", $\sigma E + \epsilon_0 \dfrac{\partial E}{\partial t}$, può essere manipolato, osservando che

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial t} &= E_0 \frac{\partial \mathrm{e}^{i(\omega t - kz)}}{\partial t} = i\omega\, E_0 \mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \\
&= i\omega\, E
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\sigma E + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} &= (\sigma + i\omega\epsilon_0)\, E = \left(\frac{\sigma}{i\omega\epsilon_0} + 1\right) i\omega\epsilon_0 E \\
&\simeq -i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}\, \epsilon_0\, \frac{\partial E}{\partial t}
\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato l'ipotesi di "buon conduttore", $\sigma \gg \epsilon_0\omega$.

Con questo arrangiamento, le equazioni di campo nei conduttori, Eq. (24.46), prendono una forma del tutto identica a quella delle equazioni nel vuoto, Eq. (24.13), purché si faccia la sostituzione

$$\epsilon_0 \quad \longrightarrow \quad \epsilon_{eff} \;\equiv\; \epsilon_0 \left(-i\frac{\sigma}{\epsilon_0\omega}\right)$$

Nel vuoto, il numero d'onda k è collegato a ω da $k = \dfrac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Nel conduttore, deve sussistere una analoga relazione, con ϵ_{eff}:

$$\begin{aligned} k &= \omega\sqrt{\epsilon_{eff}\mu_0} \;=\; \omega\sqrt{\frac{\epsilon_{eff}}{\epsilon_0}}\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \;=\; \omega\sqrt{-i\frac{\sigma}{\epsilon_0\omega}}\frac{1}{c} \\ &= \pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega\sigma}{\epsilon_0}}\frac{1}{c} \end{aligned}$$

Quindi anche il numero d'onda k è espresso da un numero complesso. La parte reale è quella che descrive la propagazione lungo z, e deve essere positiva come nel caso dell'onda nel vuoto. Pertanto l'ambiguità di segno ($\pm$) si risolve, scegliendo il segno $+$. Il campo elettrico prende la forma:

$$\begin{aligned} E &= E_0 \mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \;=\; E_0\,\mathrm{e}^{i\left(\omega t - \frac{1-i}{c}\sqrt{\frac{\omega\sigma}{2\epsilon_0}}\,z\right)} \\ &= E_0\,\mathrm{e}^{i\left(\omega t - \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\omega\sigma}{2\epsilon_0}}\,z\right)}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{c}\sqrt{\frac{\omega\sigma}{2\epsilon_0}}\,z} \end{aligned}$$

Per tornare ai valori reali di E, basta prendere la parte reale dell'espressione appena trovata.

Per concludere, calcoliamo anche il campo magnetico. Nel vuoto, $B = \dfrac{E}{c} = E\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Nel conduttore quindi deve essere:

$$B \;=\; E\sqrt{\frac{\epsilon_{eff}}{\epsilon_0}}\frac{1}{c} \;=\; \frac{E}{c}\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega\sigma}{\epsilon_0}}$$

Ora, poiché $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$, si ottiene lo sfasamento di $-\dfrac{\pi}{4}$ col campo elettrico.

24.11 Esercizi sulle onde elettromagnetiche

Esercizio 24.1. *Un'onda elettromagnetica monocromatica, di frequenza* $\nu = 100$ MHz, *viaggia nel vuoto. Calcolare la lunghezza d'onda* λ. *Individuare nello spettro elettromagnetico di che tipo di onda si tratta.*

Risposta. *Nel vuoto* $\lambda = \dfrac{c}{\nu} = \dfrac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{10^8 \text{ Hz}} = 3$ m. *È un'onda-radio, in modulazione di frequenza (FM).*

Esercizio 24.2. *Che cosa succede alla velocità, alla frequenza e alla lunghezza d'onda, quando l'onda dell'esercizio precedente attraversa un vetro, con indice di rifrazione* $n = 1.5$*?*

Risposta. *La velocità viene ridotta a* $u = \dfrac{c}{n} = 2 \cdot 10^8$ m/s. *La frequenza non cambia. La lunghezza d'onda deve soddisfare* $\lambda = \dfrac{u}{\nu} = \dfrac{c}{n\,\nu} = \dfrac{\lambda_0}{n}$ *(abbiamo chiamato* λ_0 *la lunghezza d'onda nel vuoto). Pertanto la lunghezza d'onda si riduce a* $\lambda = 2$ m.

Esercizio 24.3. *La stessa onda-radio a* $\nu = 100$ MHz *viene fatta passare attraverso l'acqua del mare, che, essendo salina, è dotata di una conducibilità* $\sigma = 5\ \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$. *Inoltre l'indice di rifrazione è* $n = 1.333$. *Qual è la "profondità di pelle"?*

Risposta. *Anzitutto occorre verificare se siamo in condizioni di "buon conduttore", ovvero se* $\dfrac{\sigma}{\epsilon\omega} = \dfrac{\sigma}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0\nu} \gg 1$. *La costante dielettrica relativa è* $\epsilon_r = n^2 = 1.777$. *Si ottiene quindi* $\dfrac{\sigma}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0\nu} = \dfrac{5}{6.283 \cdot 1.777 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^8} \approx 10^3$, *quindi no problem... La profondità di pelle si calcola come* $\delta = \sqrt{\dfrac{2c^2\epsilon}{\sigma\omega}} = \sqrt{c^2\epsilon_r\epsilon_0}\pi\sigma\nu = cn\sqrt{\dfrac{\epsilon_0}{\pi\sigma\nu}} = 3 \cdot 10^{-2}$ m.

Osservazione. *Abbiamo ottenuto una profondità di pelle di* 3 cm*! A causa della sua salinità, l'acqua di mare non ammette comunicazioni via onde radio FM. Per aumentare la profondità di pelle, occorre abbassare le frequenze, ovvero aumentare la lunghezza d'onda.*

Esercizio 24.4. *Per le ragioni esposte nell'esercizio precedente, le comunicazioni radio dei sommergibili devono usare frequenze più basse, tipicamente del chilo-Hertz. Assumiamo* $\nu = 3$ kHz. *Quanto vale la profondità di pelle? Se il sommergibile è a una profondità* $h = 10$ m, *di quanto si attenuano il campo elettrico e la potenza della trasmissione?*

Risposte. *La profondità di pelle risulta* $\delta = \sqrt{\dfrac{2c^2\epsilon}{\sigma\omega}} = \sqrt{c^2\epsilon_r\epsilon_0}\pi\sigma\nu = cn\sqrt{\dfrac{\epsilon_0}{\pi\sigma\nu}} = 5.48$ m. *Chiamando* E_0 *il campo elettrico all'emissione, e* E *quello uscente, la sua attenuazione è*

$\dfrac{E}{E_0} = \mathrm{e}^{-h/\delta} = \mathrm{e}^{-10/5.48} = 0.16$. *La potenza è* $\mathcal{P} \propto E^2$, *quindi la sua attenuazione è* $\left(\mathrm{e}^{-h/\delta}\right)^2 = \mathrm{e}^{-2h/\delta} = 0.026$.

Solo il 2.6% della potenza del segnale raggiunge la superficie del mare.

Esercizio 24.5. *La potenza che la Terra riceve dalla radiazione solare è espressa dalla* "costante solare", *cioè la potenza ricevuta per unità di area perpendicolare irradiata. Essa vale* $I_\odot = 1.36\ \mathrm{kW/m^2}$. *Qual è la potenza totale emessa dal Sole (la distanza Terra-Sole è* $r_{\oplus\odot} = 150$ *milioni di km)? Qual è la potenza totale ricevuta dalla Terra (il raggio della Terra è* $r_\oplus = 6371\ \mathrm{km}$*)?*

Risposte. *Il Sole emette radiazione elettromagnetica isotropa, quindi la potenza*
totale emessa si ottiene moltiplicando $I_\odot$ *per la superficie di una sfera di raggio* $r_{\oplus\odot}$: $\mathcal{P}_\odot = 4\pi r_{\oplus\odot}^2 I_\odot = 12.57 \cdot (1.5 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m})^2 \cdot (1360\ \mathrm{W/m^2}) = 3.845 \cdot 10^{26}\ \mathrm{W}$.

Per calcolare la potenza totale assorbita dalla Terra, schematizziamo questa come se fosse un disco di raggio $r_\oplus$ *posto perpendicolarmente alla radiazione solare. Questa approssimazione può apparire grossolana, ma è corretta. Per convincersi, basti pensare di porre questo disco esattamente fra il Sole e la Terra, tangente a quest'ultima. Ovviamente assorbirebbe tutta la radiazione, lasciando la Terra in ombra. Rimuovendo il disco, la Terra tornerebbe ad essere irradiata. Quindi disco e Terra sono investiti esattamente dalla stessa potenza. La differenza sta solo nel modo di fare i calcoli: il disco è una superficie piana perpendicolare alla radiazione, quindi possiamo calcolare la potenza assorbita dal disco semplicemente come* $\mathcal{P}_\oplus = \pi r_\oplus^2 I_\odot = 3.1416 \cdot (6.371 \cdot 10^6\ \mathrm{m})^2 \cdot (1360\ \mathrm{W/m^2}) = 1.734 \cdot 10^{17}\ \mathrm{W}$.

Esercizio 24.6. *Calcolare il campo elettrico e magnetico massimi corrispondenti alla costante solare dell'esercizio precedente.*

Risposta. *Utilizziamo la relazione* $I = \epsilon_0 c \dfrac{E_{max}^2}{2}$. *Pertanto ricaviamo* $E_{max} = \sqrt{\dfrac{2I_\odot}{\epsilon_0 c}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 1360\ \mathrm{W/m^2}}{(8.85 \cdot 10^{-12}\ \textit{(unità S.I.)})(3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s})}} = 1012\ \mathrm{V/m}$. *Il campo magnetico è* $B_{max} = \dfrac{E_{max}}{c} = 3.376 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}$.

Capitolo 25

Ottica

La luce visibile è formata da onde elettromagnetiche. Questo vale per tutta la radiazione, dai raggi X alle onde radio.

Il comportamento della luce (e della radiazione elettromagnetica in generale) nel vuoto e nei materiali è descrivibile pensando ai campi elettrico e magnetico che la compongono.

Riassumiamo quanto sappiamo.

- Un'onda elettromagnetica si propaga con velocità

$$u = \begin{cases} c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} & \text{nel vuoto} \\ \dfrac{c}{n} & \text{nel dielettrico} \end{cases} \tag{25.1}$$

  con n indice di rifrazione del dielettrico. In generale $n > 1$, quindi $u < c$.

- I campi elettrico e magnetico sono ortogonali fra loro e alla direzione della propagazione; le intensità dei campi sono collegate dalla relazione

$$\frac{|\vec{\boldsymbol{E}}|}{|\vec{\boldsymbol{B}}|} = u = \begin{cases} c & \text{nel vuoto} \\ \dfrac{c}{n} & \text{nel vuoto} \end{cases} \tag{25.2}$$

  La relazione vettoriale fra $\vec{\boldsymbol{E}}$, $\vec{\boldsymbol{B}}$, per un'onda che si propaga in direzione $\hat{\boldsymbol{r}}$, è:

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\hat{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{E}}}{u} \tag{25.3}$$

- D'ora in poi ci riferiremo al campo elettrico $\vec{\boldsymbol{E}}$; il campo magnetico è deducibile sempre da esso. Il piano individuato dalla direzione di propagazione $\hat{\boldsymbol{r}}$ e dal campo elettrico $\vec{\boldsymbol{E}}$ si chiama *piano di polarizzazione* dell'onda.

- Un'onda monocromatica è caratterizzata da una frequenza ν e una lunghezza d'onda λ. L'intensità dei campi elettrico e magnetico ad essa associati si può scrivere come

$$\begin{aligned} E(r;t) &= E_0 \cos\left(\underbrace{2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda} r + \phi}_{\text{fase}}\right) \\ B(r;t) &= \frac{E_0}{u} \cos\left(\underbrace{2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda} r + \phi}_{\text{fase}}\right) \end{aligned} \tag{25.4}$$

  (se assumiamo una propagazione per una distanza r dalla sorgente). L'argomento della funzione coseno si chiama *fase* dell'onda: lo indicheremo con Φ [1]:

$$\Phi = 2\pi\nu\, t - \frac{2\pi}{\lambda} r + \phi \tag{25.5}$$

- La relazione fra ν e λ è:

$$\lambda \cdot \nu = u = \begin{cases} c & \text{nel vuoto} \\ \dfrac{c}{n} & \text{nei dielettrici} \end{cases} \tag{25.6}$$

[1] Il termine ϕ (minuscolo) deriva dalla condizione della sorgente all'istante $t = 0$; potrebbe essere eliminato ridefinendo l'istante $t = 0$ per una data sorgente, ma con molte sorgenti in generale questo non è possibile, quindi preferiamo tenerlo.

- Un'onda nel vuoto trasporta un flusso di energia per unità di tempo e unità di superficie, dato dal vettore di Poynting, $\vec{\boldsymbol{S}} = \epsilon_0 c^2 \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$. Per onde monocromatiche, $|\vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}}| = \dfrac{E_0^2}{c} \cos^2\left(2\pi\nu t - \dfrac{2\pi}{\lambda} z\right)$, e poiché il valore medio di $\cos^2$ è $\dfrac{1}{2}$, otteniamo l'intensità media di un'onda monocromatica come:

$$I \;=\; \left\langle \frac{d\mathcal{P}}{d\Sigma} \right\rangle \;=\; \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2 \qquad \text{(nel vuoto)} \tag{25.7}$$

  In un dielettrico, l'intensità si ottiene con le sostituzioni $\epsilon_0 \to \epsilon \equiv n^2 \epsilon_0$ e $c \to u \equiv \dfrac{c}{n}$, quindi:

$$I \;=\; \left\langle \frac{d\mathcal{P}}{d\Sigma} \right\rangle \;=\; n\,\frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2 \qquad \text{(nei dielettrici)} \tag{25.8}$$

- L'indice di rifrazione in un dielettrico è in generale una funzione della lunghezza d'onda: $n \equiv n(\lambda)$.

25.1 Sovrapposizione di onde, interferenza

La radiazione elettromagnetica è costituita dai campi elettrico e magnetico, che si sommano come vettori. Questo ha conseguenze importanti sulla composizione delle intensità di due onde elettromagnetiche. Si sarebbe portati a dire che se due onde, di intensità I_1, I_2, raggiungono una stessa zona di spazio, l'intensità totale sia $I_1 + I_2$: bene, questo in generale *è falso!*

Consideriamo due onde elettromagnetiche monocromatiche, di frequenze ν_1, ν_2 e lunghezze d'onda λ_1, λ_2, emesse dalle sorgenti (1) e (2). Anzitutto, assumiamo che le due onde viaggino nella stessa direzione, cosicché i due vettori di Poynting $\vec{\boldsymbol{S}}_1$, $\vec{\boldsymbol{S}}_2$ siano allineati. Questa è la situazione più vantaggiosa per avere sovrapposizione di intensità. Inoltre assumiamo che i piani di polarizzazione delle due onde siano coincidenti, cioè che $\vec{\boldsymbol{E}}_1 \parallel \vec{\boldsymbol{E}}_2$. In tal modo anche $\vec{\boldsymbol{B}}_1 \parallel \vec{\boldsymbol{B}}_2$. Quindi possiamo scrivere i campi senza l'uso della notazione vettoriale. Chiamate rispettivamente r_1 e r_2 le distanze di P

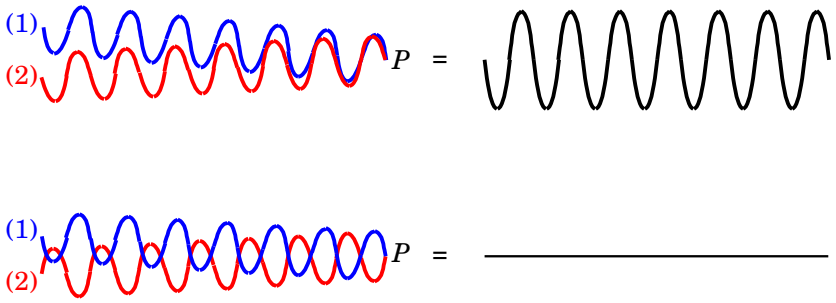


Figura 25.1: *Esempi di interferenza costruttiva (in alto) e interferenza distruttiva (in basso).*

dalle sorgenti (1) e (2), i campi saranno della forma:

$$
\begin{aligned}
E_1(P;t) &= A_1 \cos\left(2\pi\nu_1 t - \frac{2\pi}{\lambda_1} r_1 + \phi_1\right) \quad ; \quad B_1(P;t) = \frac{E_1(P;t)}{u} \\
E_2(P;t) &= A_2 \cos\left(2\pi\nu_2 t - \frac{2\pi}{\lambda_2} r_2 + \phi_2\right) \quad ; \quad B_2(P;t) = \frac{E_2(P;t)}{u}
\end{aligned}
$$

Il campo totale in P sarà

$$
\begin{aligned}
E(P;t) &= E_1(P;t) + E_2(P;t) \\
B(P;t) &= B_1(P;t) + B_2(P;t) = \frac{E(P;t)}{u}
\end{aligned}
$$

L'intensità di ciascuna radiazione, se fosse isolata, sarebbe

$$
\begin{aligned}
I_1(P) &= n\epsilon_0 c \left\langle [E_1(P;t)]^2 \right\rangle = n\frac{\epsilon_0 c}{2} A_1^2 \\
I_2(P) &= n\epsilon_0 c \left\langle [E_2(P;t)]^2 \right\rangle = n\frac{\epsilon_0 c}{2} A_2^2
\end{aligned}
$$

Ora calcoliamo l'intensità complessiva.

$$
\begin{aligned}
I(P) &= n\epsilon_0 c \left\langle [E(P;t)]^2 \right\rangle = n\epsilon_0 c \left\langle [E_1(P;t) + E_2(P;t)]^2 \right\rangle \\
&= n\epsilon_0 c \left\langle [E_1(P;t)]^2 + [E_2(P;t)]^2 + 2E_1(P;t)E_2(P;t) \right\rangle \\
&= n\epsilon_0 c \left\langle A_1^2 \cos^2\Phi_1 + A_2^2 \cos^2\Phi_2 + 2A_1A_2 \cos\Phi_1 \cos\Phi_2 \right\rangle
\end{aligned}
$$

Nell'ultima scrittura abbiamo indicato con Φ_1, Φ_2 la fase di ciascuna onda:

$$
\Phi_i \equiv \left(2\pi\nu_i t - \frac{2\pi}{\lambda_i} r_i + \phi_i\right)
$$

Ora ricordiamo che $\left\langle \cos^2 \right\rangle = \dfrac{1}{2}$ e applichiamo l'identità trigonometrica $2\cos\Phi_1\cos\Phi_2 = \cos(\Phi_1+\Phi_2)+\cos(\Phi_1-\Phi_2)$. Poi esprimiamo $\dfrac{n\epsilon_0 c}{2}A_i^2 = I_i$. Troviamo quindi

$$I(P) \;=\; I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,[\langle\cos(\Phi_1+\Phi_2)\rangle + \langle\cos(\Phi_1-\Phi_2)\rangle]$$

Ora, mediando sul tempo, otteniamo:

$$\langle\cos(\Phi_1 \pm \Phi_2)\rangle \;=\; \left\langle \cos\left[\, 2\pi(\nu_1 \pm \nu_2)t \;-\; 2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda_1} \pm \frac{r_2}{\lambda_2}\right) \;+\; (\phi_1 \pm \phi_2)\right]\right\rangle$$

In generale, il valor medio di un coseno nel tempo è 0, a meno che l'argomento del coseno sia indipendente da t. Questo succede nel caso particolare che si stia considerando $\Phi_1 - \Phi_2$ e che sia $\nu_1 = \nu_2$: in tal caso $\cos(\Phi_1 - \Phi_2)$ rimane costante. In questo caso anche $\lambda_1 = \lambda_2$. Si ottiene dunque

$$\cos(\Phi_1 - \Phi_2) \;=\; \cos\left[2\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda} + (\phi_1 - \phi_2)\right] \;\equiv\; \cos[\Delta\Phi]$$

Abbiamo trovato la seguente relazione per l'intensità totale:

$$I(P) \;=\; \begin{cases} I_1 + I_2 & \text{se } \nu_1 \neq \nu_2 \\[2ex] I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\Phi) & \text{se } \nu_1 = \nu_2 \\[2ex] & \left[\; \Delta\Phi \equiv \dfrac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) + (\phi_1 - \phi_2) \;\right] \end{cases} \tag{25.9}$$

Quindi l'intensità risultante, per uguali frequenze, dipende dalla differenza di fase. In particolare:

- Se i due campi sono *in fase*, $\Delta\Phi = 2K\pi$,

  $$\left(\frac{2\pi}{\lambda}r_1 - \phi_1\right) - \left(\frac{2\pi}{\lambda}r_2 - \phi_2\right) = 2K\pi \quad (K \text{ intero})$$

  si ottiene il campo risultante massimo,

  $$|E_1 + E_2| = A_1 + A_2$$

  Questo caso si chiama *interferenza costruttiva.* I campi si dicono *coerenti.*
  L'intensità è $I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$ (quindi maggiore di $I_1 + I_2$).

- Se i due campi sono *in opposizione di fase*, $\Delta\Phi = (2K+1)\pi$,

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}r_1 - \phi_1\right) - \left(\frac{2\pi}{\lambda}r_2 - \phi_2\right) = (2K+1)\pi \quad (K \text{ intero})$$

  si ottiene il campo risultante minimo,

$$|E_1 + E_2| = |A_1 - A_2|$$

  Questo caso si chiama *interferenza distruttiva*.
  L'intensità è $I(P) = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$ (quindi minore di $I_1 + I_2$).

- Nel caso particolare in cui le ampiezze siano uguali ($A_1 = A_2$) e i campi siano in opposizione di fase, l'interferenza è *completamente distruttiva*, ovvero il campo risultante è nullo.
  In questo caso anche l'intensità è nulla, $I(P) = 0$.

Queste situazioni sono schematizzate nella Fig. 25.1.

25.2 Principio di Huygens-Fresnel

Un'onda elettromagnetica che si propaga nello spazio può essere visualizzata come una successione di *fronti d'onda*. Ciascuno di questi è caratterizzato da punti aventi tutti la stessa fase.

Il principio di Huygens-Fresnel afferma che *tutti i punti su un fronte d'onda si comportano da sorgenti puntiformi coerenti di onde sferiche secondarie, che hanno frequenza e lunghezza d'onda uguali a quelle dell'onda primaria; il fronte d'onda successivo è dato dalla somma algebrica di tutte le onde secondarie, e ha la forma dell'inviluppo di queste.*

Questo principio è in realtà ricavabile con calcoli matematici basati sulla forma delle onde monocromatiche. Qui omettiamo la dimostrazione e lo trattiamo come una legge sperimentale.

25.3 Interferenza di sorgenti coerenti

Consideriamo un fronte d'onda piano che colpisce uno schermo, in cui sono praticate due piccole fenditure. Tutta l'onda viene assorbita dallo schermo, tranne quelle porzioni che raggiungono le fenditure. Se la larghezza delle fenditure è molto minore della lunghezza d'onda λ, esse possono essere considerate come puntiformi. In base al principio di Huygens-Fresnel, le due fenditura sono sorgenti *coerenti* di onde sferiche.

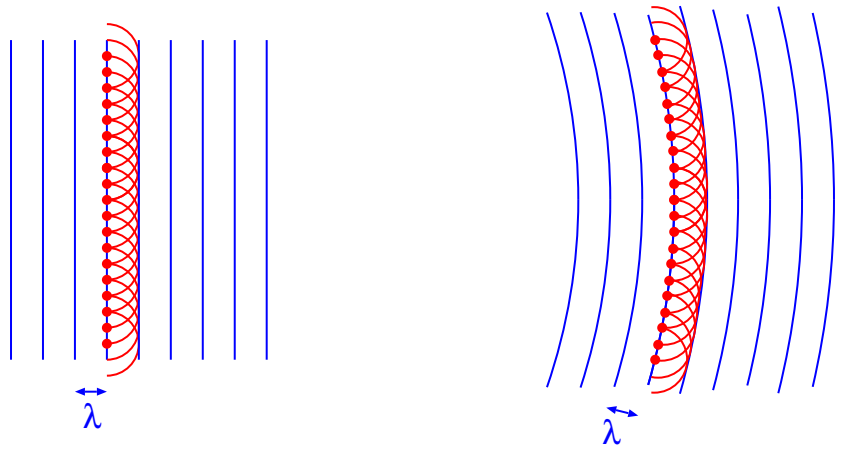


Figura 25.2: *Fronti d'onda (piano a sinistra, sferico a destra) e loro formazione dalla sovrapposizione delle onde sferiche secondarie (principio di Huygens-Fresnel).*

Tali onde sono formate da campi elettrici $E_1(r_1, t)$, $E_2(r_2, t)$ che si sommano. Chiamando r_1, r_2 le distanze di ciascuna fenditura da un generico punto P in cui avviene la sovrapposizione (vd Fig. 25.3), la loro forma matematica deve essere:

$$\begin{aligned} E_1(r_1; t) &= E_0 \cos\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right) \\ E_2(r_2; t) &= E_0 \cos\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right) \end{aligned} \tag{25.10}$$

Diamo qualche spiegazione a queste due formule. Anzitutto si assume che l'ampiezza massima di oscillazione dei campi sia E_0, uguale per entrambe le onde. Ciò è giustificato dal fatto che le due fenditure ricevono la stessa onda piana. Inoltre, anche la frequenza e la lunghezza d'onda devono essere uguali. Infine, le sorgenti delle onde secondarie devono essere coerenti, poiché si trovano sullo stesso fronte d'onda, quindi devono avere la stessa fase: in termini matematici, per $r_1 = 0$ e $r_2 = 0$ l'argomento dei coseni deve essere lo stesso.

In un generico punto P il valore del campo elettrico è la somma algebrica di E_1, E_2:

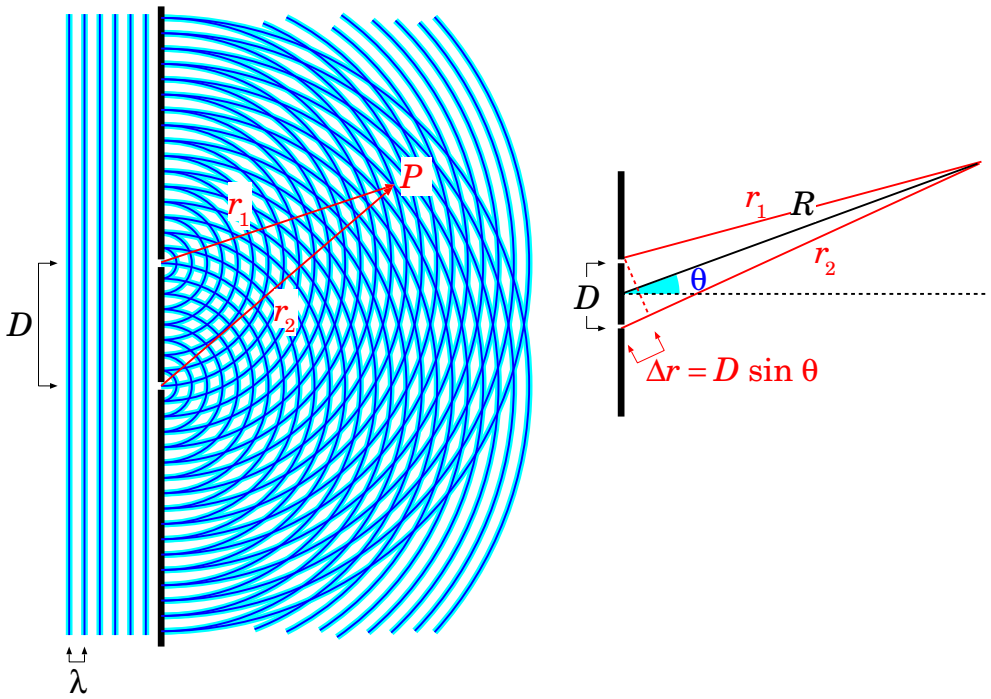


Figura 25.3: *A sinistra: sovrapposizione delle onde sferiche secondarie provenienti dalle due fenditure; ogni riga blu rappresenta una cresta d'onda. A destra: calcolo approssimato di* $|r_1 - r_2| \simeq D \sin\theta$ *per distanze* $R \gg D$.

$$\begin{aligned} E(P;t) &= E_1(r_1,t) + E_2(r_2,t) \\ &= E_0 \left[\cos\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right) + \cos\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right) \right] \end{aligned} \tag{25.11}$$

Possiamo analizzare un po' più in dettaglio le conseguenze dell'Eq. (25.11). Qui bisogna ricordare un'identità trigonometrica: $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$. Quindi troviamo:

$$E(P;t) = 2E_0 \cos\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda}\frac{r_1+r_2}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{r_1-r_2}{2}\right) \tag{25.12}$$

Esaminiamo questo risultato. Il termine $\cos\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda}\frac{r_1+r_2}{2}\right)$ esprime

un'oscillazione nel tempo con frequenza ν. L'ampiezza di tale oscillazione è data da

$$E_0(P) \;=\; 2E_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{r_1 - r_2}{2}\right)$$

quindi ha un'intensità

$$I(P) \;=\; 2\epsilon_0 c E_0^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{r_1 - r_2}{2}\right) \tag{25.13}$$

che può variare da un valore massimo, quando l'argomento di $\cos^2$ è multiplo intero di π, ad un valore nullo, quando l'argomento di $\cos^2$ è multiplo intero dispari di $\pi/2$.

$$I(P) \;=\; \begin{cases} 2\epsilon_0 c E_0^2 & \text{per } r_1 - r_2 = K\,\lambda \qquad (K \text{ intero}) \\ 0 & \text{per } r_1 - r_2 = \left(K + \dfrac{1}{2}\right)\lambda \quad (K \text{ intero}) \end{cases} \tag{25.14}$$

La conclusione può essere anche compresa intuitivamente. Le due onde sferiche secondarie percorrono cammini di lunghezza r_1, r_2 per raggiungere P.

- Se questi cammini differiscono per un numero intero di lunghezze d'onda, ad una cresta della prima onda si sovrapporrà sempre una cresta della seconda onda. Questo caso si chiama *interferenza costruttiva.*
- Se invece la differenza dei cammini contiene una mezza lunghezza d'onda in più o in meno, ad una cresta della prima onda si sovrapporrà sempre una valle della seconda onda. Questo caso si chiama *interferenza distruttiva.*

In Fig. 25.4 sono rappresentate diverse figure di interferenza, ottenute per una stessa lunghezza d'onda $\lambda = 1$ (unità arbitrarie) e diverse separazioni fra le fenditure $D = 0.2,\ 0.5,\ 1,\ 2,\ 5,\ 10$. Il calcolo è fatto al computer, utilizzando l'Eq. (25.11).

Quando l'interferenza viene osservata da una distanza R grande rispetto alla separazione D delle due fenditure, ad un angolo θ rispetto alla direzione perpendicolare allo schermo, si può approssimare $|r_1 - r_2| \simeq D \sin\theta$ (vd Fig. 25.3 a destra). L'Eq. (25.13) si può approssimare con:

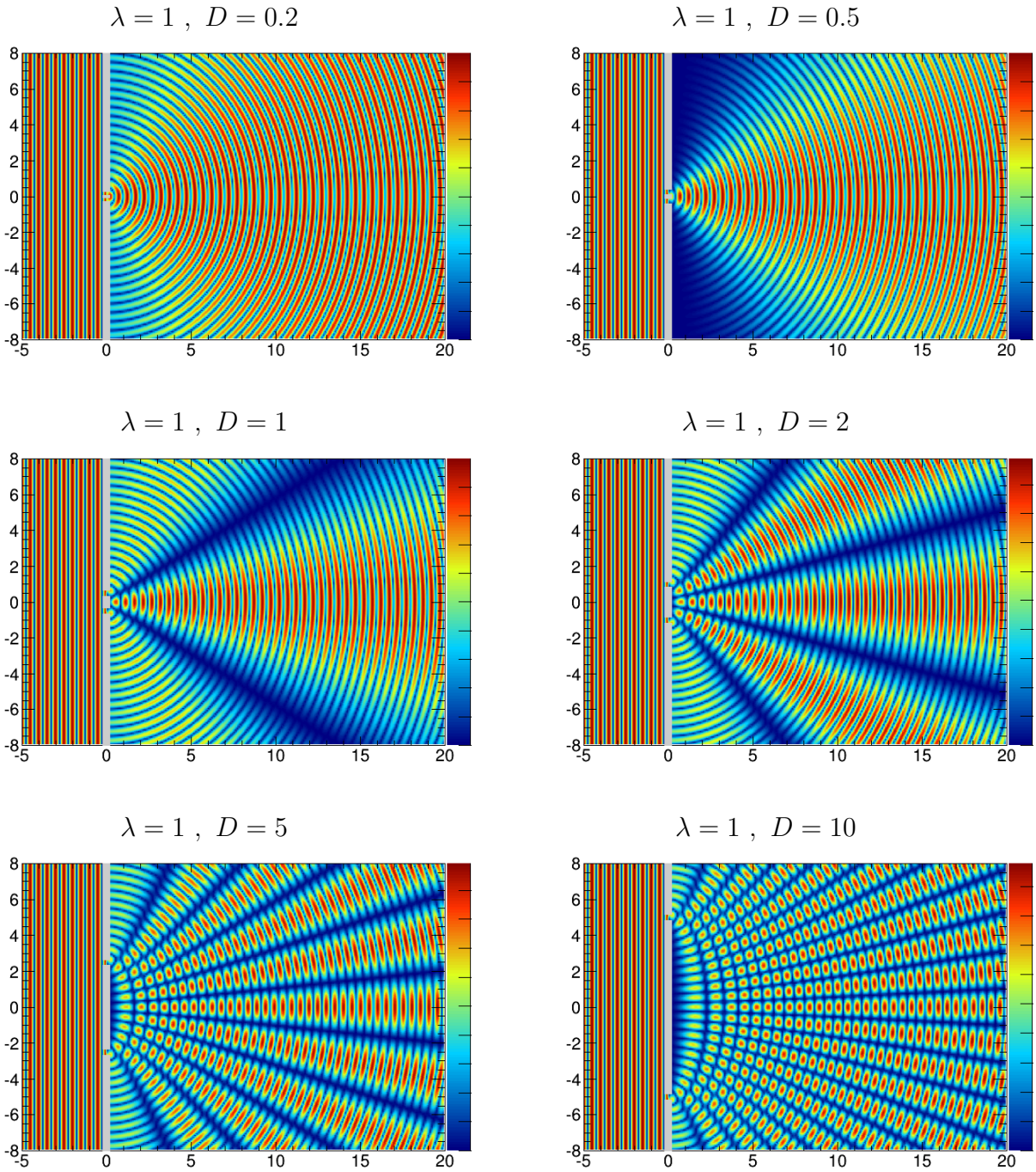


Figura 25.4: *Figure di interferenza prodotte da due fenditure sottili, separate da diverse distanze D. La scala di colori raffigura il valore assoluto del campo elettrico, $|E| \propto \sqrt{I}$.*

$$I(\theta) \;=\; 2\epsilon_0 c E_0^2 \cos^2\left(\pi \frac{D}{\lambda}\sin\theta\right) \tag{25.15}$$

Le condizioni di massimo e minimo, Eq. (25.14), possono essere riscritte così:

$$I(P) \;=\; \begin{cases} 2\epsilon_0 c E_0^2 & \text{per } \sin\theta = K\,\dfrac{\lambda}{D} \qquad (K \text{ intero}) \\ 0 & \text{per } \sin\theta = \left(K+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda}{D} \quad (K \text{ intero}) \end{cases} \tag{25.16}$$

Ovviamente per $\theta = 0$ c'è sempre un massimo — il *massimo centrale*. Possono esistere anche altri massimi, in direzioni diverse. Poiché $\sin\theta \leq 1$, i valori di K sono limitati da $K \leq \dfrac{D}{\lambda}$. Se $D < \lambda$, è possibile solo $K = 0$, ovvero solo il massimo centrale.

Le direzioni di interferenza distruttiva esistono per valori di K tali che $K \leq \dfrac{D}{\lambda} - \dfrac{1}{2}$. Per $D < \dfrac{\lambda}{2}$, tale condizione non è possibile, quindi in tutte le direzioni abbiamo propagazione.

25.4 Raggio ottico

L'onda piana è ovviamente un'astrazione. Abbiamo visto che ogni sorgente elementare di onda elettromagnetica è una carica elettrica puntiforme oscillante, che genera onde sferiche. I fronti d'onda sferici, visti a distanze molto lontane dalla sorgente, possono apparire come fronti d'onda piani.

Un'onda elettromagnetica che viene emessa da una sorgente estesa piana Σ, di dimensioni trasverse $D \gg \lambda$ produce un "raggio di luce", che per esperienza sappiamo propagarsi in direzione rettilinea ortogonale alla superficie stessa.

Si chiama *raggio ottico* una porzione di onda piana di dimensione trasversa $D \gg \lambda$.

Vogliamo capire perché il raggio ottico si propaga in direzione ortogonale alla superficie emittente Σ.

Secondo il principio di Huygens-Fresnel, ogni punto della sorgente Σ è sorgente di un'onda secondaria sferica. Se la sorgente Σ è coerente e monocromatica, il campo elettrico prodotto da ciascuno dei suoi punti a

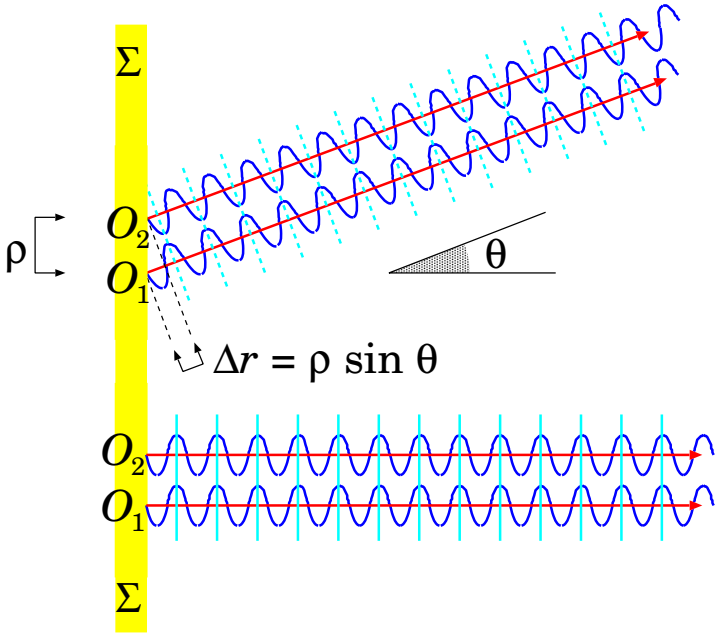


Figura 25.5: *Costruzione di un "raggio ottico". Tutti i punti della sorgente estesa Σ sono sorgenti coerenti di onde secondarie. Per $\theta > 0$ è possibile trovare una separazione ρ fra le sorgenti puntiformi (1), (2), tale che le onde sono sfasate di $\lambda/2$ e quindi formano interferenza completamente distruttiva. Per $\theta = 0$ le onde dalle sorgenti puntiformi (1), (2) restano sempre coerenti.*

distanza r è $\propto \cos\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda} r\right)$. Consideriamo due punti O_1 e O_2 di Σ, separati da una distanza ρ, come in Fig. 25.5. I campi prodotti da essi in un dato punto P, distante rispettivamente $r_1,\ r_2$ da $O_1,\ O_2$, devono valere

$$\begin{aligned} E_1 &\propto \cos\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right) \\ E_2 &\propto \cos\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right) \end{aligned}$$

La differenza di fase fra i due campi è:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\left(r_1 - r_2\right)$$

Osserviamo ora la propagazione da un punto P la cui distanza da Σ sia molto maggiore delle dimensioni trasversa D. I segmenti $r_1,\ r_2$ sono

sostanzialmente paralleli, e possiamo approssimare $|r_1 - r_2| \simeq \rho \sin\theta$. Quindi la differenza di fase è

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\,\rho\,\sin\theta$$

Se $\theta \neq 0$, è sempre possibile trovare un valore di ρ tale che la differenza di fase sia esattamente $\Delta\Phi = \pi$: basta scegliere

$$\rho = \frac{\lambda}{2\,\sin\theta}$$

In questo modo l'interferenza fra le due sorgenti puntiformi è sempre totalmente distruttiva.

Chiaramente, più piccolo è θ, maggiore deve essere ρ. Se consideriamo $\theta > \theta_{min}$, possiamo porre un limite superiore $\rho < \rho_{max} \equiv \dfrac{\lambda}{2\,\sin\theta_{min}}$. Siccome abbiamo supposto $D \gg \lambda$, la maggior parte di punti di Σ deve avere altri punti a distanza ρ con cui fare interferenza totalmente distruttiva. In maniera semi-quantitativa, deve essere $\rho_{max} \approx \dfrac{D}{2}$, cosicché per ogni punto di metà Σ si può trovare un altro punto a distanza ρ_{max} nell'altra metà di Σ con cui si formi un'interferenza totalmente distruttiva. Quindi troviamo $\sin\theta_{min} \approx \dfrac{\lambda}{D}$.

Possiamo concludere che in qualunque direzione θ tale che $\sin\theta \gtrsim \dfrac{\lambda}{D}$ l'interferenza di tutte le sorgenti puntiformi deve essere totalmente distruttiva, dunque per questi angoli non c'è propagazione. Essendo $\lambda \ll D$, $\sin\theta_{min}$ deve essere molto piccolo, quindi possiamo lavorare nell'approssimazione $\sin\theta_{min} \simeq \theta_{min}$. L'apertura angolare totale del raggio ottico, valutabile fra $-\theta_{min}$ e $+\theta_{min}$, quindi vale

$$\Delta\theta \;\approx\; 2\frac{\lambda}{D} \tag{25.17}$$

Esempio: un raggio laser

Un raggio laser rosso ($\lambda_R = 635$ nm) viene emesso da una sorgente di dimensioni trasverse $D_0 = 1$ mm. Qual è la sua apertura angolare? Di quanto si è allargato il raggio, ad una distanza di 10 m? Quali risultati avremmo, per un raggio verde ($\lambda_V = 532$ nm) e un raggio blu ($\lambda_B = 445$ nm)?

Risposta. *La larghezza angolare del raggio rosso è* $\Delta\theta_R \simeq 2\dfrac{\lambda_R}{D_0} = 2\dfrac{6.35\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}}{10^{-3}\ \mathrm{m}} \simeq 6\cdot 10^{-4}$ rad. *A distanza di* $\ell = 10$ m *dalla sorgente la dimensione trasversa del fascio è valutabile come* $D_R = \Delta\theta_R\,\ell \simeq 6$ mm.

Per i raggi verde e blu i risultati sono $\Delta\theta_V \simeq 5 \cdot 10^{-4}$ rad, $D_R =\simeq 5$ mm, $\Delta\theta_B \simeq 4 \cdot 10^{-4}$ rad, $D_B =\simeq 4$ mm.

Osservazione: *poiché la formula usata per* $\Delta\theta$ *è approssimativa, abbiamo usato il segno* $\simeq$ *anziché* $=$*; per questo si è valutato che non abbia senso esprimere i risultati con più di una cifra.*

25.5 Diffrazione da una fenditura

Un fenomeno simile a quello dell'interferenza si ha quando la luce passa attraverso un'unica fenditura, di larghezza D, che non può essere più considerata puntiforme. In tal caso, ogni punto della fenditura può essere considerato come una sorgente di onda sferica secondaria, secondo il principio di Huygens-Fresnel.

Scegliamo un sistema di assi cartesiani con l'origine al centro della fenditura e l'asse z nella direzione dell'onda incidente. La fenditura giace sul piano x, y, e ha una sezione Σ. Ogni piccola area $d\Sigma'$ di fenditura, centrata intorno a un punto $(x', y', 0) \in \Sigma$, produce un'onda sferica $E(r) = A\, d\Sigma'\, E_0 \cos\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda} r\right)$ in ciascun punto $P \equiv (x, y, z)$ posto a distanza $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}$. Ci aspettiamo infatti che l'intensità del campo elettrico dell'onda secondaria sia proporzionale al campo elettrico incidente E_0 e alla superficie emittente $d\Sigma$. Formalmente, quindi, il campo elettrico totale in P si scrive come:

$$E(P) \;=\; A\, E_0 \int_\Sigma d\Sigma' \cos\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}\right) \tag{25.18}$$

Il calcolo è in generale complesso, dipende dalla forma della fenditura, e solitamente si può effettuare solo al computer.

In Fig. 25.6 sono rappresentate diverse figure di diffrazione, per una fenditura di larghezza $D = 2$ (unità arbitrarie) e diverse lunghezze d'onda λ. In generale, si nota che l'onda si propaga in diverse direzioni, ma presenta sempre la massima intensità *in avanti* — cioè nella stessa direzione dell'onda incidente. A seconda del rapporto $\frac{D}{\lambda}$, possono esistere direzioni in cui l'intensità si annulla, e altre in cui resta significativa.

Questi comportamenti possono essere compresi in maniera semi-qualitativa, anche senza addentrarsi nei calcoli matematici. In una generica direzione θ, due punti (x', y') e (x'', y'') della fenditura che distano fra loro $\rho = \sqrt{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2}$ hanno distanze r', r'' da un generico punto P

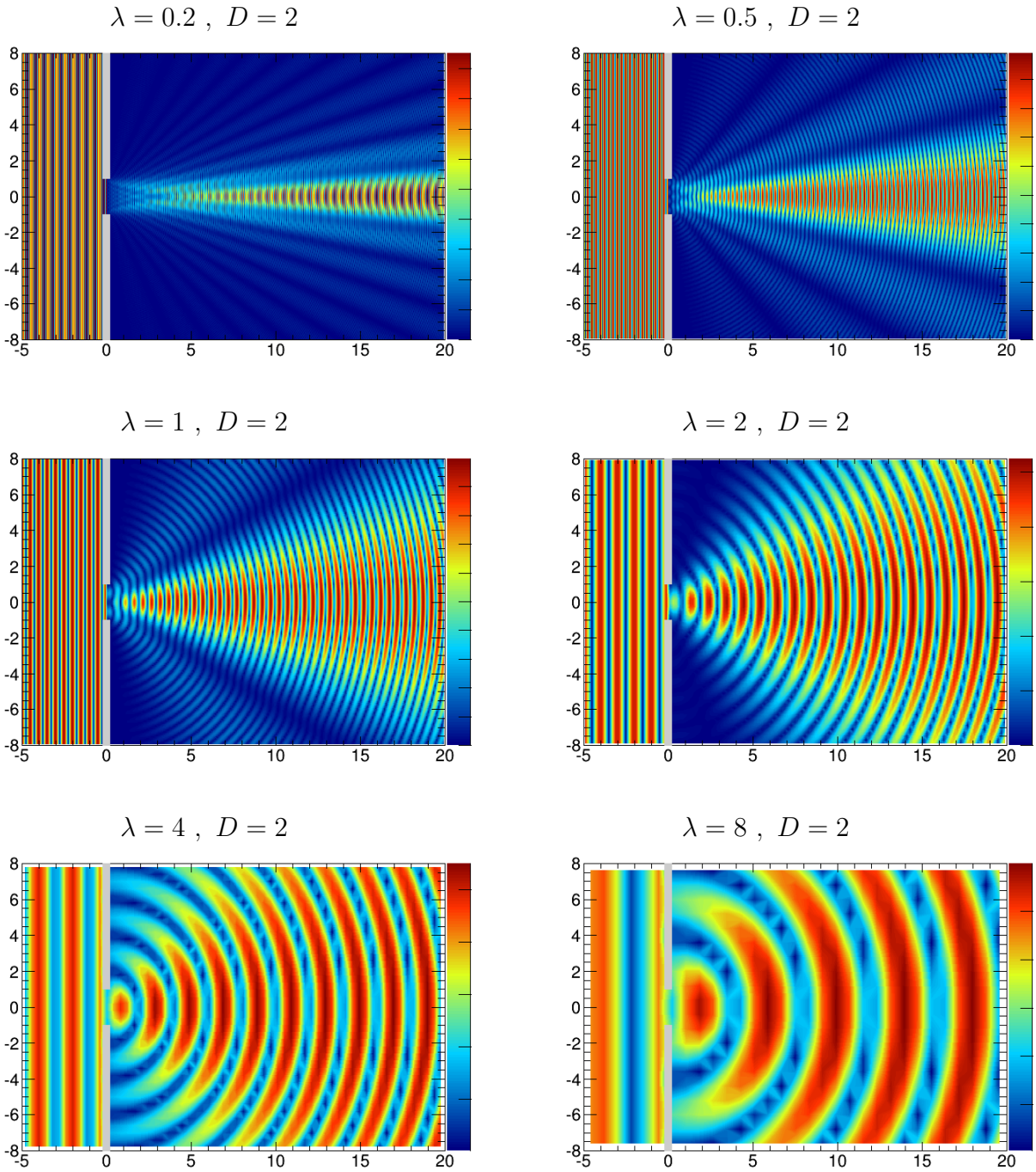


Figura 25.6: *Figure di diffrazione da fenditure di diverse larghezze D. La scala di colori raffigura il valore assoluto del campo elettrico, $|E| \propto \sqrt{I}$.*

che differiscono di $|r' - r''| \simeq \rho \sin\theta$. L'approssimazione (indicata con $\simeq$) è tanto migliore, quanto più la distanza di P dalla fenditura è grande rispetto alle dimensioni della fenditura stessa. Se la coppia di punti (x', y') e (x'', y'') è tale che $|r' - r''| = \dfrac{\lambda}{2}$, allora le onde secondarie emesse da essi formano interferenza distruttiva. In termini di ρ, questa condizione si scrive come $\rho = \dfrac{\lambda}{2\sin\theta}$.

Ovviamente occorre che ρ sia più piccolo delle dimensioni della fenditura, altrimenti non è possibile trovare due punti di distanza ρ nella fenditura. Più precisamente, chiamando D la dimensione della fenditura, se $\rho \simeq \dfrac{D}{2}$ metà dei punti della fenditura fa interferenza distruttiva con l'altra metà, e la cancellazione è totale [2]. La stessa cosa succede se $\rho \simeq \dfrac{D}{4}, \dfrac{D}{6}, \ldots$ in generale se $\rho \simeq \dfrac{D}{2K}$, con $K \neq 0$. Viceversa, se $\rho \simeq \dfrac{D}{3}$, un terzo di fenditura resta "non cancellato"; se $\rho \simeq \dfrac{D}{5}$, un quinto di fenditura resta "non cancellato". In generale, se $\rho \simeq \dfrac{D}{2K+1}$, con $K \neq 0$, c'è propagazione residua, che deriva dal fatto che $\simeq \dfrac{1}{2K+1}$ della radiazione uscente dalla fenditura non viene cancellata.

Ora ricordiamo che $\rho = \dfrac{\lambda}{2\sin\theta}$. Le condizioni di cancellazione totale e di propagazione residua diventano:

$$\begin{aligned} \text{cancellazione totale} \iff \sin\theta &\simeq K\,\frac{\lambda}{D} \qquad (K \neq 0) \\ \text{propagazione} \iff \sin\theta &\simeq \left(K + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{D} \qquad (K \neq 0) \end{aligned} \tag{25.19}$$

Poiché $\sin\theta \leq 1$, è possibile avere zone di cancellazione totale solo se $\lambda \leq D$. Il numero di zone di cancellazione si ottiene scrivendo $K \simeq \dfrac{D}{\lambda}\sin\theta \leq \dfrac{D}{\lambda}$, quindi sono

$$N_{min} = \mathrm{Int}\left[\frac{D}{\lambda}\right] \tag{25.20}$$

[2] Rammentiamo che non stiamo facendo un'analisi precisa: per esempio non abbiamo fatto ipotesi sulla forma trasversa della fenditura. Per questo abbiamo usato i segni $\simeq$ anziché $=$.

L'intensità nelle direzioni in cui c'è propagazione può essere stimata in maniera semi-quantitativa, ricordando che solo $\simeq \dfrac{1}{2K+1}$ della radiazione uscente dalla fenditura sopravvive. Poiché $I \propto E^2$, deve essere $I(\theta) \simeq I_0 \left(\dfrac{1}{2K+1}\right)^2$, essendo I_0 una costante di proporzionalità. Ricordando che $\sin\theta \simeq (2K+1)\dfrac{\lambda}{2D}$, otteniamo

$$I(\theta) \simeq \frac{I_0}{(2K+1)^2} = I_0 \frac{\lambda^2}{4\,D^2 \sin^2\theta} \qquad \text{(massimi secondari)} \tag{25.21}$$

Il numero di massimi secondari si ottiene scrivendo $K \simeq \dfrac{D}{\lambda}\sin\theta - \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{D}{\lambda} - \dfrac{1}{2}$, quindi sono

$$N_{max} = \text{Int}\left[\frac{D}{\lambda} - \frac{1}{2}\right] \tag{25.22}$$

Esempio: calcolo del numero di frange

Se avete la vista buona, potete verificare i valori di N_{min}, N_{max} nella Fig. 25.6. I valori di $\dfrac{D}{\lambda}$, insieme ai calcoli per N_{min}, N_{max} secondo le Eq. (25.22), Eq. (25.22), sono riportati nella seguente tabella:

D/λ	N_{min}	N_{max}
10	10	9
4	4	3
2	2	1
1	1	0
0.5	0	0
0.25	0	0

Il caso $\theta = 0$ va trattato a parte: in questo caso $\rho \to +\infty$, quindi non è mai possibile avere cancellazione.

L'intensità può essere stimata come fatto per i massimi secondari, ma qui ricordiamo che tutta la radiazione dalla fenditura è coerente, quindi nessuna porzione viene cancellata. Di conseguenza deve essere

$$I(\theta) \simeq I_0 \qquad \text{(massimo centrale)} \tag{25.23}$$

In generale, la larghezza del massimo centrale della diffrazione è esprimibile come la distanza fra i due minimi adiacenti, che si hanno per $\sin\theta = \pm\dfrac{\lambda}{D}$, ovvero per $\theta = \pm\sin^{-1}\left(\dfrac{\lambda}{D}\right)$. L'apertura angolare del massimo centrale vale quindi:

$$\Delta\theta_{max} = 2\,\sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{D}\right) \tag{25.24}$$

Si nota che, all'aumentare di D — o al diminuire di λ — la larghezza del massimo centrale diventa sempre più collimata. Nel limite $\lambda \ll D$, $\Delta\theta_{max} \simeq 0$ e la propagazione avviene, nei fatti, solo in avanti, come abbiamo trovato per il raggio ottico.

25.6 Rifrazione e riflessione di un'onda elettromagnetica

Ora studiamo che cosa succede quando un raggio ottico — o un'onda piana — attraversa un'interfaccia che separa due dielettrici, chiamati (1) e (2), con diversi indici di rifrazione n_1, n_2. Per fissare le idee, supponiamo che il raggio ottico provenga dal mezzo (1). La situazione è schematizzata in Fig. 25.7: una parte del raggio ottico in generale viene riflessa, rimanendo in (1), mentre un'altra parte passa al mezzo (2), dove si dice che viene rifratta.

Che cosa succede ai fronti d'onda durante la riflessione e la rifrazione?

Ricordiamoci che il fronte d'onda è definito come il luogo dei punti in cui la fase dell'onda è sempre uguale. La fase è

$$\Phi = 2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda} r \tag{25.25}$$

Per chiarezza, pensiamo al fronte d'onda che costituisce una cresta d'onda: deve essere $\cos\Phi = +1$. Questo avviene per tutte le fasi multiple intere di 2π, $\Phi = 2K\pi$. Due creste d'onda contigue hanno fasi che differiscono di 2π.

La frequenza ν non cambia nel passare dal mezzo (1) al mezzo (2). La lunghezza d'onda invece si modifica: ricordando che $\lambda = \dfrac{u}{\nu} = \dfrac{c}{n\,\nu}$, abbiamo

$$\lambda_1 = \frac{1}{n_1}\frac{c}{\nu} \quad ; \quad \lambda_2 = \frac{1}{n_2}\frac{c}{\nu}$$

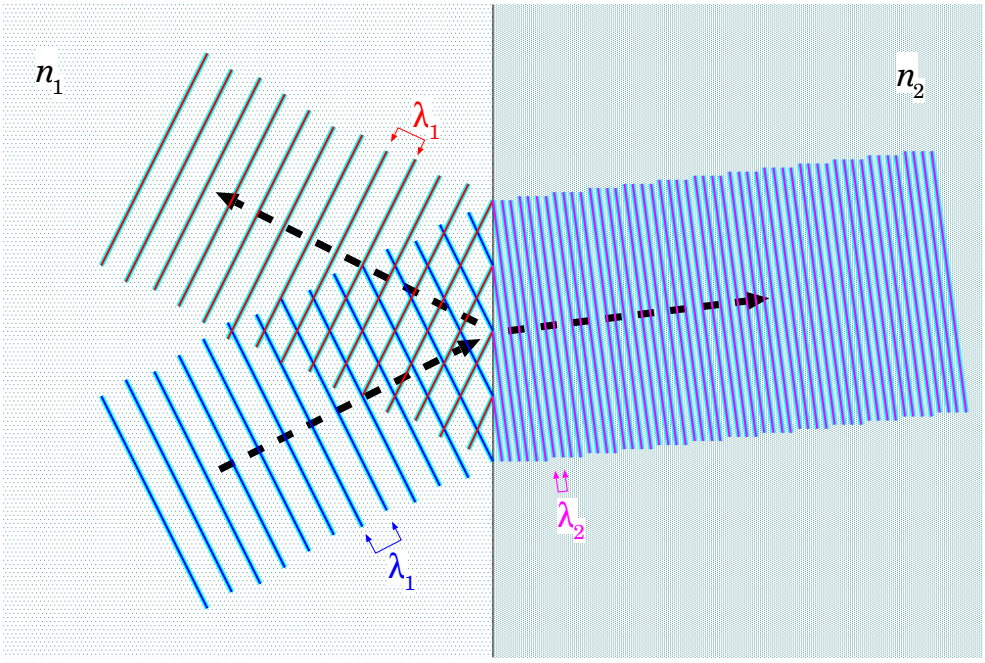


Figura 25.7: *Rifrazione e riflessione di un fromnte d'onda piano.*

La differenza di fase fra due creste contigue, in un dato istante t, è $2\pi = \Delta\Phi = \dfrac{2\pi}{\lambda}\Delta r$, da cui $\Delta r = \lambda$. Distinguendo i mezzi (1), (2), troviamo:

$$\Delta r = \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1}{n_1}\dfrac{c}{\nu} & \text{nel mezzo (1)} \\ \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{n_2}\dfrac{c}{\nu} & \text{nel mezzo (2)} \end{cases}$$

Guardiamo la Fig. 25.8, a sinistra. Se il raggio incidente forma un angolo θ_1 con la direzione ortogonale alla superficie, due creste d'onda contigue intercettano la superficie in due punti distanti $D = \dfrac{\lambda_1}{\sin\theta_1}$. Da questi punti partono due creste d'onda del raggio rifratto nel mezzo (2), che si propagano in direzione θ_2. Anche in questo caso, $D = \dfrac{\lambda_2}{\sin\theta_2}$. Uguagliando le due espressioni si trova

$$\frac{\sin\theta_1}{\lambda_1} = \frac{\sin\theta_2}{\lambda_2} \tag{25.26}$$

oppure

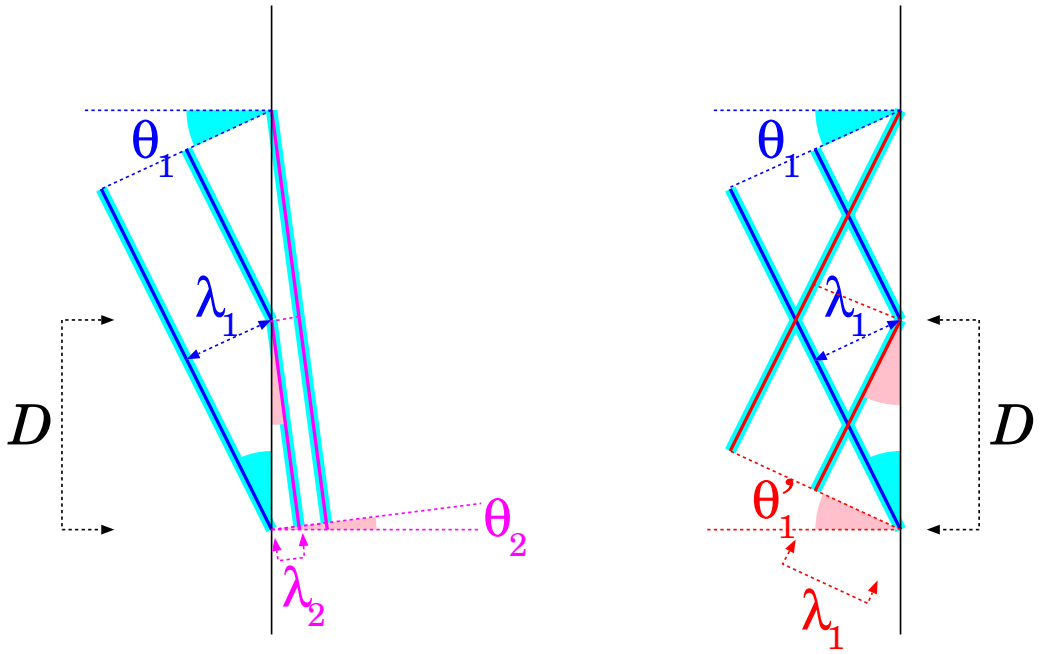


Figura 25.8: *Costruzione geometrica per ottenere le leggi della rifrazione (a sinistra) e della riflessione (a destra). Gli angoli θ_1, θ_2, θ_1' sono rispettivamente gli angoli di incidenza, rifrazione e riflessione. In figura, angoli con lo stesso colore sono uguali.*

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{25.27}$$

Questa relazione è nota come *legge della rifrazione*, oppure *legge di Snell*.

Nel caso della riflessione, il raggio ottico riflesso si trova nello stesso mezzo del raggio incidente (Fig. 25.8, a destra), quindi la lunghezza d'onda non cambia, e gli angoli sono gli stessi:

$$\sin\theta_1 = \sin\theta_1' \tag{25.28}$$

La legge di Snell fornisce la spiegazione di effetti ottici cui siamo tutti abituati, quando un oggetto viene immerso in acqua (come raffigurato in

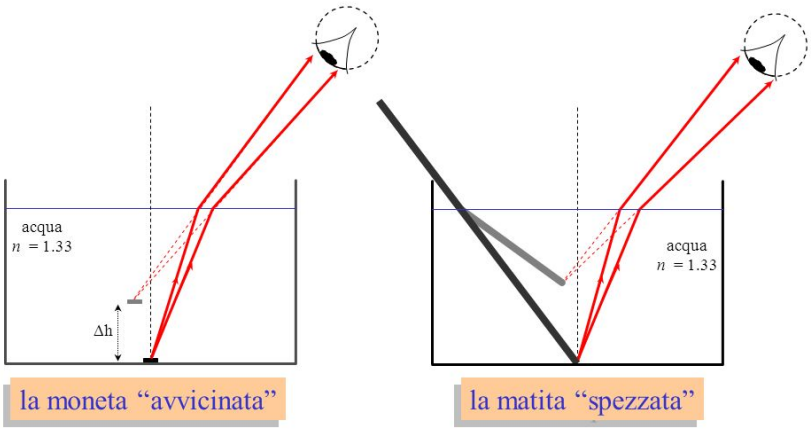


Figura 25.9: *Esempi dell'effetto della rifrazione. Poiché l'acqua ha un indice di rifrazione* > 1*, una moneta immersa appare più vicina (a sinistra), oppure una matita immersa appare "spezzata" (a destra).*

Fig. 25.9) o visto attraverso un vetro spesso. La spiegazione è sempre la stessa: l'oggetto illuminato emette raggi ottici, che passando dall'acqua all'aria subiscono una deviazione (linee rosse continue). Tuttavia, il nostro cervello interpreta le immagini come se i raggi ottici fossero dritti (linee tratteggiate), pertanto sembrano provenire da un punto diverso da quello reale.

Inoltre, nella Fig. 25.9, solo due raggi ottici sono disegnati (in rosso); se uno ne disegna di più, seguendo attentamente la legge di Snell, si rende conto che i loro prolungamenti rettilinei (tratteggiati) non convergono esattamente in un solo punto. Per questa ragione, le immagini viste attraverso l'acqua o un vetro spesso appaiono sempre leggermente sfocate, e possono affaticare la vista.

25.6.1 Riflessione totale

L'Eq. (25.27) per la rifrazione ci dice che minore èl'indice di rifrazione, maggiore è l'angolo di rifrazione. Consideriamo il passaggio da un mezzo (1) a un mezzo (2), tali che $n_1 > n_2$ — per esempio dal vetro all'aria. L'angolo di rifrazione deve essere tale che

$$\sin\theta_2 \;=\; \sin\theta_1 \frac{n_1}{n_2}$$

Ora, stiamo considerando il caso $\dfrac{n_1}{n_2} > 1$, quindi $\sin\theta_2 > \sin\theta_1$. Nello stesso tempo deve essere $\sin\theta_2 \leq 1$, quindi ci deve essere un limite superiore a $\sin\theta_1$.

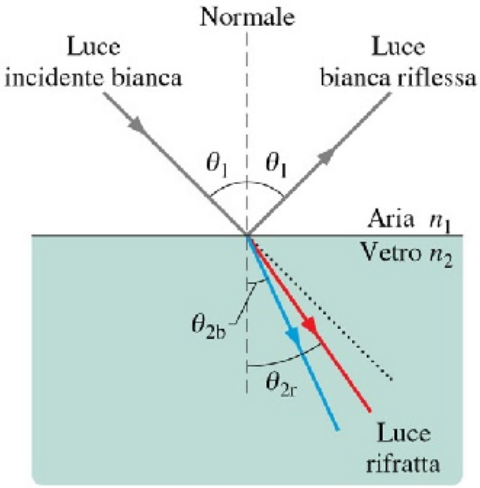


Figura 25.10: *Dispersione cromatica di un raggio di luce bianca che entra in un vetro.*

Precisamente, possiamo scrivere:

$$\sin\theta_1 \;=\; \underbrace{\sin\theta_2}_{\leq\,1}\,\frac{n_2}{n_1} \;<\; \frac{n_2}{n_1}$$

e questo è l'angolo massimo per avere una rifrazione.

25.7 Dispersione cromatica

Parlando di onde elettromagnetiche nei materiali dielettrici, abbiamo già visto nella Sezione 24.9.2 che la costante dielettrica ϵ, e quindi l'indice di rifrazione $n = \sqrt{\dfrac{\epsilon}{\epsilon_0}}$, dipendono dalla frequenza ν dell'onda:

$$n \;\equiv\; n(\nu) \tag{25.29}$$

In generale, n decresce all'aumentare di λ, quindi cresce all'aumentare di ν: per frequenze più elevate abbiamo un indice di rifrazione maggiore, dunque una velocità di propagazione $u = \dfrac{c}{n}$ minore.

Ne consegue che, nella legge di Snell per la rifrazione, Eq. (25.27), la relazione fra gli angoli di incidenza (θ_1) e di rifrazione (θ_2) dipende dalla frequenza della radiazione:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} \;=\; \frac{n_2(\nu)}{n_1(\nu)} \tag{25.30}$$

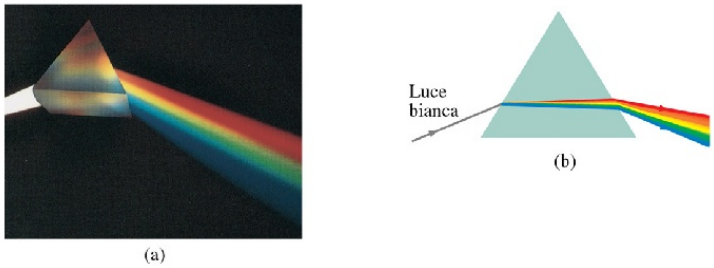


Figura 25.11: *Dispersione cromatica di un raggio di luce bianca attraverso un prisma.*

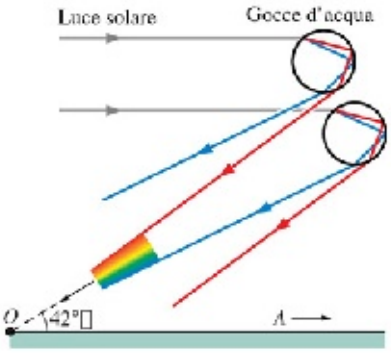


Figura 25.12: *Formazione dell'arcobaleno.*

Nel caso in cui il mezzo (1) sia l'aria, o il vuoto, $n_1 \simeq 1$, indipendentemente da ν. Per semplicità ribattezziamo $n_2 \equiv n$: quindi si può scrivere

$$\sin\theta_2 = \frac{\sin\theta_1}{n(\nu)} \tag{25.31}$$

L'angolo di rifrazione è tanto più piccolo quanto più è grande la frequenza. Nello spettro della luce visibile, per esempio, il colore meno deviato è il rosso, quello più deviato il blu. L'effetto è quello mostrato in Fig. 25.10. La scomposizione della luce bianca in uno spettro iridescente, mediante l'uso di un prisma, come in Fig. 25.11, ne è una conseguenza. L'uso di strumenti ottici basati su prismi consente di scomporre in righe spettrali la radiazione emessa o assorbita da una sostanza, come già mostrato in Fig. 24.8 e Fig. 24.9. Questa tecnica consente di estrarre informazioni sulla composizione chimica di una sostanza.

La dispersione cromatica è anche all'origine degli arcobaleni. In seguito ad un temporale, nell'aria restano sospese molte goccioline d'acqua di forma sferica. I raggi del Sole, bianchi, vengono rifratti due volte (in entrata e in

uscita della gocciolina) e riflessi una volta (all'interno della gocciolina), come indicato in Fig. 25.12.

25.8 Esercizi di ottica

Esercizio 25.1. *Un'onda elettromagnetica di frequenza* $\nu = 500 \cdot 10^{12}$ Hz *viene fatta passare attraverso un materiale trasparente. Con tecniche interferometriche si misura la lunghezza d'onda,* $\lambda = 550$ nm. *Calcolare l'indice di rifrazione e la costante dielettrica relativa del mezzo.*

Risposta. *La velocità di propagazione nel mezzo è* $u = \lambda\nu = 2.75 \cdot 10^8$ m/s, *pertanto* $n = \dfrac{c}{u} = 1.091$ *e* $\epsilon_r = n^2 = 1.19$.

Esercizio 25.2. *Due oggetti (1) e (2) stanno a distanze* r_1, r_2, *molto simili, da un punto di osservazione. Per verificare che le due distanze siano effettivamente uguali, ci si serve di una sorgente di micro-onde di frequenza* $\nu = 10^{10}$ Hz *che può emettere onde coerenti di uguale intensità nelle direzioni dei due oggetti. Un ricevitore, vicino all'emettitore, misura l'intensità dell'onda riflessa. Quando uno solo dei due oggetti viene irradiato, l'intensità misurata dal ricevitore è* $I_1 = I_2 = 1.5$ W/m^2. *Quando entrambi gli oggetti vengono irradiati, l'intensità complessiva misurata dal ricevitore è* $I_{tot} = 4.5$ W/m^2. *Che cosa possiamo dire delle distanze* r_1, r_2*?*

Risposta. *Anzitutto, dal fatto che* $I_1 = I_2$ *possiamo dire che le distanze dei due oggetti sono effettivamente simili: altrimenti per l'oggetto più lontano dovrebbe osservarsi un'intensità riflessa minore. Poiché la radiazione è coerente, le due intensità dovrebbero combinarsi secondo la legge dell'interferenza:* $I_{tot} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(2\pi\dfrac{\ell_1 - \ell_2}{\lambda}\right)$ *essendo* $\ell_{1,2}$ *la distanza totale percorsa dall'onda in ciascun caso, quindi* $\ell_{1,2} = 2r_{1,2}$ *per l'andata e il ritorno. Dai dati, capiamo già che* $r_1 \neq r_2$, *altrimenti avremmo osservato* $I_{tot} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = 6$ W/m^2.

Possiamo dunque calcolare il coseno dello sfasamento, $\cos(\Delta\Phi) \equiv \cos\left(2\pi\dfrac{\ell_1 - \ell_2}{\lambda}\right) = \dfrac{I_{tot} - (I_1 + I_2)}{2\sqrt{I_1 I_2}} = 0.5$. *Da qui si deduce* $\Delta\Phi = 60° = \dfrac{\pi}{3}$ rad — *in realtà questo valore è definito a meno di un segno e di una periodicità di* 2π. *Possiamo quindi calcolare la differenza fra le distanze:* $\Delta r = r_1 - r_2 = \dfrac{\ell_1 - \ell_2}{2} = \lambda\dfrac{\Delta\Phi}{4\pi} = \dfrac{\lambda}{12}$. *Per completare il calcolo ci occorre* $\lambda = \dfrac{c}{\nu} = 0.03$ m $= 3$ cm. *Quindi* $\Delta r = 0.25$ cm $= 2.5$ mm.

Osservazione. *Come si è già notato, il calcolo di* $\Delta\Phi$ *è ambiguo: potremmo aggiungere un qualunque multiplo intero di* 2π *e andrebbe comunque bene. Questa ambiguità si riflette sulla misura delle distanze attraverso la relazione* $\Delta r = \lambda\dfrac{\Delta\Phi}{4\pi}$, *ovvero variando* $\Delta\Phi$ *di* 2π, Δr *varierebbe di* $\lambda/2$, *cioè di mezza lunghezza d'onda.*

Questa tecnica, chiamata interferometria*, può solo misurare distanze che sono pari a frazioni di lunghezze d'onda, non multipli interi. Siccome la distanza totale è andata+ritorno, la tecnica non può essere sensibile a multipli interi di mezze lunghezze d'onda — in questo caso* 1.5 cm *— no surprise! Qui diventa importante l'ipotesi che* r_1, r_2 *siano "circa uguali", nella fattispecie uno deve essere ragionevolmente convinto che non differiscano per più di 1 cm circa.*

Esercizio 25.3. *Una lampadina emette una luce apparentemente bianca, che viene passata attraverso una fenditura sottile, di larghezza nota* $D = 1$ μm*. Nella figura di diffrazione si osserva il massimo centrale, bianco, più tre massimi secondari di diversi colori, ad angoli rispettivamente* $\theta_1 = 42.5°$, $\theta_2 = 60.5°$, $\theta_3 = 77.2°$*. Evidentemente, la luce non era monocromatica, e la figura di diffrazione consente di farne l'analisi spettrale. Perché il massimo centrale resta bianco? Quali sono le lunghezze d'onda* λ_1, λ_2, λ_3 *e le frequenze* ν_1, ν_2, ν_3 *osservabili? Che colori sono?*

Risposta. *Anzitutto, il fatto che i tre massimi secondari hanno colori diversi, ci consente di associarli a diverse frequenze, e non a pensare, erroneamente, che siano massimi secondari di diverso ordine della stessa frequenza. Inoltre, è presumibile che per ciascuna delle frequenze si osservi il massimo secondario più intenso, vale a dire il primo. La relazione da usare è* $\sin\theta_k = \frac{3}{2}\frac{\lambda}{D}$*, ovvero* $\lambda_k = \frac{2}{3} D \sin\theta_k$*. Si trovano rispettivamente le lunghezze d'onda* $\lambda_1 = 450$ nm, $\lambda_2 = 580$ nm, $\lambda_3 = 650$ nm*. Le frequenze corrispondenti sono* $\nu_1 = 6.67 \cdot 10^{12}$ Hz, $\nu_2 = 5.17 \cdot 10^{12}$ Hz, $\nu_3 = 4.62 \cdot 10^{12}$ Hz*. Guardando la Fig. 24.5 possiamo indovinare che i colori sono rispettivamente blu, giallo, rosso. Il massimo centrale appare comunque bianco, poiché in quella direzione i tre colori si continuano a sovrapporre.*

Esercizio 25.4. *Una sorgente coerente di micro-onde ("maser") produce una radiazione con frequenza* $\nu = 5 \cdot 10^{11}$ Hz*, che incide ortogonalmente su una fenditura di larghezza* D*, regolabile. La figura di diffrazione che si osserva in uscita ha il primo minimo (interferenza distruttiva) ad un angolo* $\theta_{min1} = 15°$*. Quanto vale* D*? Quanti minimi e quanti massimi secondari ci sono nella figura di diffrazione?*

Risposta. *Ricordiamo che i minimi si hanno per angoli tali che* $\sin\theta = K\frac{\lambda}{D}$*, mentre i massimi secondari per angoli tali che* $\sin\theta = \left(K + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{D}$*. Dunque ci occorre* $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{5 \cdot 10^{11} \text{ Hz}} = 6 \cdot 10^{-4}$ m $= 0.6$ mm*. Il primo minimo è tale che* $\sin\theta_{min1} = \frac{\lambda}{D}$*, quindi deve essere* $D = \frac{\lambda}{\sin\theta_{min1}} = \frac{0.6 \text{ mm}}{0.2588} = 2.318$ mm*. Il*

numero di minimi è $N_{min} = \text{Int}\left[\frac{D}{\lambda}\right] = 3$. *Il numero di massimi secondari è* $N_{max} = \text{Int}\left[\frac{D}{\lambda} - \frac{1}{2}\right] = 3$.

Esercizio 25.5. *Con i dati dell'esercizio precedente, di quanto è necessario aprire la larghezza D, perché il massimo centrale della figura di diffrazione abbia una larghezza* $\Delta\theta = 1°$*?*

Risposta. *Occorre che* $\theta_{min1} = \frac{\Delta\theta}{2} = 0.5° = 8.727 \cdot 10^{-3}$ rad. *Quindi* $D = \frac{\lambda}{\sin\theta_{min1}} = \frac{0.6 \text{ mm}}{0.2588} = 6.875$ mm. *Il numero di massimi secondari è* $N_{max} = \text{Int}\left[\frac{D}{\lambda} - \frac{1}{2}\right] = 13$.

Esercizio 25.6. *Una gabbia di Faraday è stata costruita per schermare una regione di spazio da qualunque disturbo elettromagnetico esterno. Purtroppo ci si accorge che nella parete della gabbia si è formata una fessura larga un millimetro. All'interno, un'antenna posta esattamente di fronte alla fessura rileva un disturbo di frequenza* $\nu_1 = 2 \cdot 10^{13}$ Hz. *Qual è l'angolo minimo* θ_1 *per cui occorre spostare l'antenna, per metterla al riparo dal disturbo? Come cambierebbe la risposta, se la frequenza del disturbo fosse* $\nu_2 = 2 \cdot 10^{12}$ Hz*? E se invece fosse* $\nu_2 = 2 \cdot 10^{11}$ Hz*?*

Risposta. *Dobbiamo renderci conto di quanto è grande la lunghezza d'onda rispetto alla fessura. Quindi calcoliamo* $\lambda_i = \frac{c}{\nu_i}$, *ottenendo rispettivamente* $\lambda_1 = 0.015$ mm, $\lambda_2 = 0.15$ mm, $\lambda_3 = 1.5$ mm. *In tutti i casi si forma una figura di diffrazione, il cui massimo centrale occupa la regione angolare compresa fra* $\pm\theta = \pm\sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{D}\right)$. *Spostando l'antenna di tale angolo* θ, *la si pone in una zona dove la diffrazione è completamente distruttiva, dunque è protetta. Per le tre frequenze si trova rispettivamente:* $\frac{\lambda_1}{D} = 0.015$, $\frac{\lambda_2}{D} = 0.15$, $\frac{\lambda_3}{D} = 1.5$. *Nei primi due casi, l'angolo di spostamento è quindi* $\theta_1 = 1.5 \cdot 10^{-2}$ rad $= 0.86°$; $\theta_2 = 0.1505$ rad $= 8.63°$. *Nell'ultimo caso* $\frac{\lambda_3}{D} > 1$, *quindi non esiste un angolo a cui la radiazione non arrivi.*

Esercizio 25.7. *Un raggio di luce passa dall'aria a un mezzo trasparente, con angolo di incidenza* $\theta_1 = 45°$, *e viene rifratto con un angolo* $\theta_2 = 37°$. *La frequenza della radiazione è* $\nu = 400 \cdot 10^{12}$ Hz. *Quanto vale la lunghezza d'onda* λ_2 *nel mezzo?*

Risposta. *Dagli angoli si può dedurre l'indice di rifrazione* n_2 *del mezzo (per l'aria si assume* $n_1 = 1$*):* $n_2 = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = 1.149$. *La lunghezza d'onda è* $\lambda_2 = \frac{c}{n_2\nu} = 6.53 \cdot 10^{-7}$ m $= 653$ nm.